第 30 卷 第 4 期 自 动 化 学 报 Vol. 30, No. 4
2004 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 2004

中立型线性时滞系统的时滞相关稳定性[1)]

张先明 吴 敏 何 勇
(中南大学信息科学与工程学院 长沙 410083)
(E-mail: zhangxmy@mail.csu.edu.cn)

摘 要 讨论中立型线性时滞系统的时滞相关稳定性.首先将中立型系统转化为广义系统，然后利用 Lyapunov-Krasovskii V 泛函方法，在处理 V 的导数时，不进行放大估计，而通过引入一些恰当的 0 项，构造多个 LMI，从而获得基于多个 LMI 的时滞相关稳定充分条件.最后的数值例子说明所得的结论较已有文献具有较小的保守性.

关键词 中立型系统，时滞相关，渐近稳定，LMI
中图分类号 TP13

Delay-Dependent Stability for Linear Neutral Type Systems with Delay

ZHANG Xian-Ming WU Min HE Yong
(*School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha* 410083)
(E-mail: zhangxmy@mail.csu.edu.cn)

Abstract The delay-dependent stability for the neutral type linear systems with delay is discussed. At first, the neutral system is equivalently represented as a descriptor system, then the Lyapunov-Krasovskii functional method is used. By adding some appropriate zero terms to the deviation of V and constructing some linear matrix inequalities, the delay-dependent stability sufficient condition is derived to ensure the neutral system's asymptotical stability. At last, some examples are given to illustrate that the new sufficient condition is less conservative than the present results.

Key words Neutral system, delay dependent, asymptotical stability, linear matrix inequality

1 引言

近 20 年来，中立型时滞系统稳定性的研究非常活跃，并已获得了一系列相当好的结果.在这些结果中，时滞相关稳定条件备受关注，并且尚在进一步研究之中，参见文献[1～6].从

1) 教育部青年教师奖计划(教人[2002]5 号)和国家博士点基金(2000053303)资助
Supported by the Teaching and Research Award Program for Outstanding Young Teachers in Higher Education Institutions of MOE, P. R. China, and the Doctor Subject Foundation of P. R. China(2000053303)
收稿日期 2002-12-04 收修改稿日期 2003-08-12
Received December 4, 2002; in revised form August 12, 2003

现有的文献来看，LMI 方法已成为研究这一问题的主要方法. 通过构造一个恰当的 Lyapunov-Krasovskii V 泛函，利用基本不等式，对 V 沿系统的导数 $\dot V$ 进行放大处理，获得系统时滞相关稳定的基于 LMI 的充分条件，然而这种放大处理的方法往往导致所得的结论具有保守性，参见文献[2,3]. 本文提出一种新的方法，不对导数 $\dot V$ 进行放大处理，而是在 $\dot V$ 中恰当地添加一些 0 项，配成 LMI，获得系统稳定的基于 LMI 的时滞相关条件. 最后的实例表明，所获得的条件扩大了系统稳定的时滞界限，因而降低了对时滞的保守性.

全文沿用如下记号：R^n，$R^{n\times n}$分别表示实数域上的 n 维向量空间和 $n\times n$ 矩阵空间；$A^{\mathrm T}$ 表示矩阵 A 的转置；$\|A\|$表示矩阵 A 的 Eulidean 二范数，即 $\|A\|=\lambda_{\max}^{1/2}(A^{\mathrm T}A)$；$\lambda_{\max}(A)$，$\lambda_{\min}(A)$分别记矩阵 A 的最大、最小特征值；$P>0$ 表示 P 为对称正定阵.

2　主要结果

考虑如下线性中立型系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol x}(t)-\sum\limits_{i=1}^{m}D_i\dot{\boldsymbol x}(t-h_i)=\sum\limits_{i=0}^{m}A_i\boldsymbol x(t-h_i)\ , & t>0\\ \boldsymbol x(t)=\boldsymbol\varphi(t), & t\in[-h,0]\end{cases}\tag{1}$$

上式中 $\boldsymbol x(t)\in R^n$；$A_i,D_i\in R^{n\times n}$；$0<h_i\leqslant h,i=1,2,\cdots,m,h_0=0$；$\boldsymbol\varphi(t)$为连续可微初始函数.

为保证差分算子 $\Gamma:C[-h,0]\to R^n$

$$\Gamma(\boldsymbol x_t)=\boldsymbol x(t)-\sum_{i=1}^{m}D_i\boldsymbol x(t-h_i)$$

的稳定性，假设[7]

$$\sum_{i=1}^{m}|D_i|<1\tag{2}$$

其中$|D_i|$表示矩阵 D_i的任意范数.

在给出主要结果之前，先引入以下引理.

引理 1[8]. 设函数 $\phi:R^+\to R$. 如果 $\dot\phi$ 在$[0,\infty)$上有界，即存在一个 $\alpha>0$，使得对任意的 $t\in[0,\infty)$满足$|\dot\phi(t)|\leqslant\alpha$，则 ϕ 在$[0,\infty)$上一致连续.

引理 2[8]. (Barbalat 引理) 设函数 $\phi:R^+\to R$. 如果 ϕ 是一致连续的，且$\int_0^\infty\phi(s)\mathrm ds<\infty$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t)=0$.

定理 1. 设式(2)成立，如果存在 $P>0,Q_i>0,R_i>0,X_i\geqslant0,Y_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,m)$，以及 $P_1,P_2\in R^{n\times n}$，使得下面的 LMIs

$$\varXi=\begin{bmatrix}P_1^{\mathrm T}\sum\limits_{i=0}^{m}A_i+\sum\limits_{i=0}^{m}A_i^{\mathrm T}P_1+\sum\limits_{i=1}^{m}h_iX_i & \sum\limits_{i=0}^{m}A_i^{\mathrm T}P_2+P-P_1^{\mathrm T} & P_1^{\mathrm T}D_1 & \cdots & P_1^{\mathrm T}D_m\\ P_2^{\mathrm T}\sum\limits_{i=0}^{m}A_i+P-P_1 & -P_2^{\mathrm T}-P_2+\sum\limits_{i=1}^{m}(Q_i+h_iY_i+h_iR_i) & P_2^{\mathrm T}D_1 & \cdots & P_2^{\mathrm T}D_m\\ D_1^{\mathrm T}P_1 & D_1^{\mathrm T}P_2 & -Q_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ D_m^{\mathrm T}P_1 & D_m^{\mathrm T}P_2 & 0 & \cdots & -Q_m\end{bmatrix}<0\tag{3}$$

成立以及

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} X_i & 0 & P_1^{\mathrm{T}} A_i \\ 0 & Y_i & P_2^{\mathrm{T}} A_i \\ A_i^{\mathrm{T}} P_1 & A_i^{\mathrm{T}} P_2 & R_i \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{4}$$

则系统(1)渐近稳定.

证明. 首先将系统(1)等价地转化为如下的广义系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{y}(t), \quad \boldsymbol{y}(t) = \sum_{i=1}^{m} D_i \boldsymbol{y}(t-h_i) + \sum_{i=0}^{m} A_i \boldsymbol{x}(t-h_i) \tag{5}$$

因 $\boldsymbol{x}(t-h_i)=\boldsymbol{x}(t)-\int_{t-h_i}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$,代入式(5),得到如下具有离散时滞与分布时滞的广义系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{y}(t), \quad 0 = -\boldsymbol{y}(t) + \sum_{i=1}^{m} D_i \boldsymbol{y}(t-h_i) + \Big(\sum_{i=0}^{m} A_i\Big)\boldsymbol{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} A_i \int_{t-h_i}^{t} \boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s \tag{6}$$

作 Lyapunov-Krasovskii 泛函[1]

$$V(t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) P \boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t-h_i}^{t} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s) Q_i \boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m} \int_{-h_i}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s) R_i \boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \tag{7}$$

其中 $P>0, Q_i>0, R_i>0, i=1,2,\cdots,m$,则 $V(t)$ 沿系统(6)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = {} & 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) P \boldsymbol{y}(t) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t) Q_i \boldsymbol{y}(t) - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-h_i) Q_i \boldsymbol{y}(t-h_i) + \\ & \sum_{i=1}^{m} h_i \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t) R_i \boldsymbol{y}(t) - \sum_{i=1}^{m} \int_{t-h_i}^{t} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s) R_i \boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{8}$$

由式(6)的第 2 式,有

$$0 = 2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) P_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t) P_2^{\mathrm{T}}]\Big[-\boldsymbol{y}(t) + \sum_{i=1}^{m} D_i \boldsymbol{y}(t-h_i) + \Big(\sum_{i=0}^{m} A_i\Big)\boldsymbol{x}(t) - \sum_{i=1}^{m} A_i \int_{t-h_i}^{t} \boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s\Big] \tag{9}$$

又

$$0 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[h_i X_i - h_i X_i]\boldsymbol{x}(t), \quad 0 = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)[h_i Y_i - h_i Y_i]\boldsymbol{y}(t) \tag{10}$$

$$-h_i \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) X_i \boldsymbol{x}(t) = -\int_{t-h_i}^{t} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) X_i \boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}s, \quad -h_i \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t) Y_i \boldsymbol{y}(t) = -\int_{t-h_i}^{t} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t) Y_i \boldsymbol{y}(t)\mathrm{d}s \tag{11}$$

其中 $i=1,2,\cdots,m$. 令

$$\xi^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t), \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t), \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-h_1), \cdots, \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-h_m)], \quad \zeta^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t), \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t), \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)]$$

将式(9),(10)加到式(8)的右边,再利用式(11)得到

$$\dot{V}(t) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \Xi \boldsymbol{\xi} - \sum_{i=1}^{m} \int_{t-h_i}^{t} \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}} \Omega_i \boldsymbol{\zeta}\mathrm{d}s \tag{12}$$

其中,Ξ,Ω 分别由(3),(4)定义. 于是

$$\dot{V}(t) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} \Xi \boldsymbol{\xi} - \sum_{i=1}^{m} \int_{t-h_i}^{t} \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}} \Omega_i \boldsymbol{\zeta}\mathrm{d}s < 0 \tag{13}$$

下面证明系统(6)的渐近稳定性. 设 $t>t_0-h\geqslant 0$. 由式(7),(13)可得

$$\int_{t-h_i}^{t} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(s)Q_i\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s - V(t_0) \leqslant V(t) - V(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{V}(s)\mathrm{d}s <$$
$$-\lambda_{\max}(-\Xi)\int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{\xi}(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant -\lambda_{\max}(-\Xi)\int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{y}(s)\|^2\mathrm{d}s$$

于是
$$\lambda_{\min}(Q_i)\ \sup_{t-h_i\leqslant s\leqslant t}h_i\,\|\boldsymbol{y}(s)\|^2 + \lambda_{\max}(-\Xi)\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{y}(s)\|^2\mathrm{d}s < V(t_0)$$

从而$\|\boldsymbol{y}(t)\|$和$\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{y}(s)\|^2\mathrm{d}s$均有界，由式(6)可知$\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|$有界. 同样可得$\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{x}(s)\|^2\mathrm{d}s$有界，于是由引理1及引理2有$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$.

另一方面，由条件(2)及$\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{y}(s)\|^2\mathrm{d}s$的有界性，类似于文献[8]的证明过程，可证得

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{y}(t) = 0$$

从而系统(6)渐近稳定，于是系统(1)也是渐近稳定的.　证毕.

注 1. 从定理1的证明过程可以看出，P_1和P_2是自由矩阵，没有正定性的要求，只要使得LMI(3)和(4)可解即可，这就使得定理1的条件具有较小的保守性.

注 2. 对于中立型系统的渐近稳定，由文献[7]知条件(2)是必要的. 文献[5]也讨论了系统(1)的稳定性，所得结果用以下非常强的条件

$$\sum_{i=1}^{m}\|D_i\| + \sum_{i=1}^{m}h_i\|A_i\| < 1$$

代替，因而导致了其结果的保守性.

3 应用实例

例 1. 讨论如下中立型线性时滞系统[6,9]

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-h_1) + A_2\boldsymbol{x}(t-h_2) + D_1\dot{\boldsymbol{x}}(t-h_1) + D_2\dot{\boldsymbol{x}}(t-h_2),\quad t\geqslant 0$$

式中$\boldsymbol{x}\in R^2$，$0<h_i\leqslant h$，$i=1,2$且

$$A_0 = \begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad A_1 = \begin{bmatrix}0 & 0.3\\ -0.3 & 0\end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix}0.1 & -0.05\\ 0.05 & 0.1\end{bmatrix}$$
$$D_1 = \begin{bmatrix}0 & -0.1\\ -0.1 & 0\end{bmatrix},\quad D_2 = \begin{bmatrix}0.05 & 0\\ 0 & 0.05\end{bmatrix}$$

易算得$\|D_1\|+\|D_2\|=0.06<1$. 利用定理1，系统稳定的最大时滞界限$h<2.6567$，而文献[6]给出的结论为$h<1.007$，文献[9]给出的结论为$h<0.552$，说明本文的结论具有较小的保守性.

4 结语

本文利用Lyapunov-Krasovskii泛函讨论了中立型线性时滞系统的时滞相关稳定性，在对V的导数的处理过程中，通过引入一些恰当的0项，而不进行放大估计，构造多个LMI，获得了系统稳定的时滞相关条件. 数值例子表明，本文方法所得的结论较已有文献具有较小的保守性.

References

1 Fridman E. Effects of small delays on stability of singularly perturbed systems. *Automatic*, 2002,**38**(5): 897～902

2 Han Qing-Long. New results for delay dependent stability of linear systems with time-varying delay. *International Journal of System Science*, 2002,**33**: 213～228

3 Fridman E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *System & Control Letters*, 2001,**43**: 309～319

4 Zhang Xi-Ping, Tsiotras P, Knospe C. Stability analysis of LPV timed systems. *International Journal of Control*, 2002,**75**: 538～558

5 Lien C-H, Yu K-W, Hsieh J-G. Stability conditions for a class of neutral systems with multiple time delays. *Journal of Math. Analysis Applications*, 2000,**245**: 20～27

6 Fan K K, Lien C H, Hsieh J G. Asymptotic stability for a class of neutral systems with discrete and distributed time delays. *Journal of Optimization theory and applications*, 2002,**114**: 705～716

7 Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction of Functional Differential Equations. New York: Springer,1993

8 Xu Sheng-Yuan, Dooren P V, Stefan R, Lam J. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002,**47**:1122～1128

9 Park J H, Won S. Asymptotic stability of neutral systems with multiple delays. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1999,**103**: 183～200

张先明 中南大学博士研究生. 主要研究方向为时滞系统、广义系统的鲁棒控制.

(**ZHANG Xian-Ming** Received the master degree from Central South University, P. R. China, in 1992. Now he is a Ph. D. candidate at School of Information Science and Engineering, Central South University. His research interests include the robust control of the systems with delay and the descriptor systems.)

吴 敏 中南大学教授、博士生导师. 主要研究方向为鲁棒控制、智能控制和过程控制.

(**WU Min** Received the bachelor and master degrees from Central South University, P. R. China, in 1983 and 1985, respectively, and the Ph. D. degree from Tokyo Institute of Technology, Tokyo,Japan, in 1999. Now he is a professor and a Ph. D. supervisor in School of Information Science and Engineering, Central South University. His research interests include the robust control and its applications, intelligent control, process control.)

何 勇 中南大学博士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制及其应用.

(**HE Yong** Received the bachelor and master degrees from Central South University, P. R. China, in 1991 and 1994, respectively. Now he is a Ph. D. candidate at School of Information Science and Engineering. His research interests include the robust control and its applications.)