第 30 卷 第 4 期
2004 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 30, No. 4
July, 2004

减链约束多处理器任务在三处理器中的调度[1)]

杨根科　　吴智铭　　陈　赟

（上海交通大学自动化系　上海　200030）

（E-mail: gkyang@sjtu. edu. cn）

摘　要　研究三个并行处理器环境中，具有递减链约束的多处理器任务的调度问题，调度目标是最小化总处理时间，假设单项任务需单位处理时间. 首先给出了减链调度问题的最优化性质与条件，并说明了减链调度问题仍然是 NP 难的. 随后基于两段 flow-shop 问题的 Johnson's 算法的修正和减链调度问题最优化性质，提出了一个启发式算法，并从分析和仿真计算两方面说明该算法是有效的和高效的.

关键词　调度，多处理器任务，前提约束，启发算法

中图分类号　TP393

Scheduling Multiprocessor Tasks with Decrease Chain Constrains on Three Identical Multiprocessors

YANG Gen-Ke　WU Zhi-Ming　CHEN Yun

(*Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai*　20030)

(E-mail: gkyang@sjtu. edu. cn)

Abstract　This paper focuses on scheduling unit length multiprocessor tasks with decreasing chain precedence constrains on three identical processors so as to minimize makespan. First, a few properties for optimally scheduling decreasing chains are given. However, that optimally solving the problem is NP-hard is illustrated. Then, a heuristic algorithm is proposed which is based on a revision of well-known Johnson's algorithm for two-stage flow-shop problem and the optimal properties for scheduling decreasing chains. Finally, simulation illustrates that the heuristic algorithm is effective and efficient.

Key words　Scheduling, multiprocessor tasks, precedence constrains, heuristic

1　引言

多处理器任务系统广泛存在于多处理器计算系统、半导体制造和机器人控制等实时处

1) 国家自然科学基金(60174009)和西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室开放基金资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60174009) and Machinery Manufacturing System Engineering National Lab of Xi'an Jiaotong University
收稿日期　2002-09-02　　收修改稿日期　2003-03-13
Received September 2, 2002; in revised form March 13, 2003

理中[1]. 多处理器任务系统的特点是某些任务必须同时由多个并行处理器协同处理. 而且一项处理任务可分解为一系列子任务,子任务对处理器数量的需求不同,任务之间的前提约束增加了调度问题的复杂性[2,3]. 如在视觉辨识系统中,每帧图象处理过程中多处理器任务具有递减链约束关系,处理过程分解为几个阶段:特征获取阶段、分组/符号表示和识别/解释阶段. 由于有多种不同侧重特征的获取算法,不同算法在并行处理器上并发计算以加快响应速度,即前段任务需要由并行处理器协同处理,后段识别/解释阶段只需要单处理器进行融合计算. 又如,由多机器人组成的自动清障系统,有单机器人的搜索过程和运输过程,也有双处理器的障碍捕获过程等. 本文研究具有单调减链约束的多处理器任务的最优化调度问题,优化目标是最小化总处理时间. 下面采用三域记号来表示调度问题. 考虑任务具有单位执行时问题,问题(P_m|size,$p_j=1$|$C_{\max}$)是多项式时间内可解的[4],但是,一旦任务之间具有前提约束关系,则问题会变的非常复杂. 尽管对于任意的约束,问题(P_2|size,$p_j=1$,prec|$C_{\max}$)是多项式时间内可解的[5]. 但是在三处理器环境下,问题(P_3|size$\in\{1,2\}$,$p_j=1$,chain|$C_{\max}$)仍是强NP-hard[2]. 当任务之间的约束附加链为具有对立性质的递减链条件时,仍有多项式时间最优算法[2,3]. 但在三处理器视觉辨识系统中,多处理器任务仅有递减链约束,但却不一定有对立性质. 本文将研究调度递减链问题的复杂性和启发式算法.

2 问题描述

记 P_1,P_2,P_3 为三个相同能力的并行处理器,任意时刻每个处理器只能处理一项任务. 假定任务的处理时间为单位时间,即记为 $p_j=1$. N 个多处理器任务集合 T 在任务约束下划分为 n 个独立的链集合 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,其中 C_i 中有 N_i 任务. 任务 $T_j\in C$ 同时需要 k_j 个处理器处理,$k_j\in\{1,2,3\}$,可以记为 T^{k_j}-任务. $\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 被称为减链集,如果每个链 C_i 包括三部分任务,第一部分是 u_i 个 T^3-任务,随后是 v_i 个 T^2-任务,最后是 w_i 个 T^1-任务.

3 减链最优化调度的性质及其复杂性

引理 1. 关于问题(P_3|$p_j=1$,decreasing chain|$C_{\max}$).

1)在最先$\sum_{i=1}^{n}u_i$个时隙内处理全部 T^3-任务是最优的. 2)在 T^3-任务处理结束的随后$\sum_{i=1}^{n}v_i$时隙内,连续处理 T^2-任务是最优的,且每个链的 T^2-任务被连续处理是最优的. 在链约束下,尾部 T^1-任务由 high level first(HLF)策略配置在最早可用的处理器上是最优的. 3)如果有两个链 C_i 和 C_j 具有关系 $v_i\leqslant v_j$ 和 $w_i\geqslant w_j$,则 C_i 的 T^2-任务优先处理是最优的.

证明. 1)由于 T^3-任务要占用全部处理器,链的 T^3-任务在不违背链约束前提下,处于头部的 T^3-任务尽早被处理,可为随后的 T^2-任务和 T^1-任务获得更多的并发机会,因此是最优的. 2)考虑调度 σ,假设一个 T^2-任务配置在$[t,t+1]$时隙,而前一个时隙$[t-1,t]$既无 T^3-任务又无 T^2-任务被配置时,则在时隙$[t-1,t]$被配置的至多有三项 T^1-任务,而且将至多有一项 T^1-任务是$[t,t+1]$时隙后续 T^1-任务的前提任务. 因此,该 T^2-任务前移到$[t-1,t]$时隙将无任何处理顺序冲突,其次,任何链的 T^2-任务被连续地配置显然是最优的. 最后,对于 T^1-任务部分来说,简单的 HLF 算法是最优调度算法[6]. 3)在保持其它链的 T^2-任务位

置不变的前提下，使得 C_i 的 T^2-任务率先被处理，则由于 $v_i \leqslant v_j$ 和 $w_i \geqslant w_j$，所以交换 C_i 和 C_j 不会新增空闲时隙，而且 C_i 和 C_j 的 T^1-任务在 HLF 策略下获得更早更多的处理机会[2,3].

证毕.

由引理 1，对初始调度的改进核心是关于链之间的 T^2-任务部分的处理顺序调整. 减链集合的最优调度将使 T^2-任务在时隙 $\left[\sum_{i=1}^{n} u_i, \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)\right)$ 内处理，与 T^2-任务并发的只能是 T^1-任务. 此时不妨假设，单处理器任务总是被配置在处理器 M_3 上，而 M_1 和 M_2 处理 T^2-任务. 因此，在 $\left[\sum_{i=1}^{n} u_i, \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)\right)$ 时间区间内关于 T^2-任务和 T^1-任务组成子链的调度问题与两段 flow-shop($F2 \parallel C_{\max}$)问题具有一定联系，即上游 T^2-任务在 M_1 和 M_2 处理后，下游 T^1-任务在 M_3 处理. 我们知道，Johnson's 算法是具有复杂度 $O(n\log n)$ 的($F2 \parallel C_{\max}$)的最优算法[7].

Johnson's 算法. 对于问题($F2 \parallel C_{\max}$)，给定任务集合 $J_i(v_i, w_i)$，$1 \leqslant i \leqslant n$.

首先对于满足 $v_j \leqslant w_j$ 的任务集按照 $v_{\sigma(1)} \leqslant \cdots \leqslant v_{\sigma(n')}$ 排序形成部分调度 σ，这里 n' 是满足 $v_j \leqslant w_j$ 的任务数. 然后，对于满足 $v_j > w_j$ 的任务集按顺序 $w_{\sigma(n'+1)} \geqslant \cdots \geqslant w_{\sigma(n)}$ 加入调度 σ.

定理 2. 如果调度 σ 把减链集合 $\{C_i(u_i, v_i, w_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 排序为 $w_{\sigma(1)} \geqslant \cdots \geqslant w_{\sigma(n)}$，在 $\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)$ 时刻前，处理器的空闲时间为 $IDLE$，这里 $IDLE = C_{\max}^* - \sum_{i=1}^{n} w_i$，$C_{\max}^*$ 是由 Johnson's 算法确定的关于问题($F2 \parallel C_{\max}$)的任务集合 $\{J_i(v_i, w_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 的最小处理时间，则调度 σ 是最优的.

证明. 上述条件的核心是保持了既在 $\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)$ 时刻前最小的空闲时间（由 Johnson's 算法确定），又在 $\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)$ 时刻后，全部链的剩余 T^1-任务将获得最多的并发可能，因此，该调度是最优的. 详细证明略.　　证毕.

但是，通过移植混合 flow-shop 问题的 NP-hard 证明事例[7]，我们可以证明调度问题($P_3 \mid p_j = 1$, decreasing chains $\mid C_{\max}$)至少是普通意义下 NP-hard.

4　启发式算法

4.1　启发过程

设 $\delta(k, n-k)$ 表示前面 k 链由 $v_{\delta(i)}$-值的增序排列，随后的链由 $w_{\delta(i)}$-值的减序排列.

启发式算法 H.

初始化：由 Johnson's 算法确定对应 $\{J_i(v_i, w_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 任务集合在问题($F2 \parallel C_{\max}$)中的最优排序，把相应的递减链排序记为 σ. 设 $k = n'$，$\delta(k, n-k) = \sigma$.

While($k > 1$){

步骤 1. 计算调度 $\delta(k, n-k)$ 的总处理时间 $C_{\max}(k)$. If $((C_{\max}(k) = LB) \mid (k-1 \leqslant 0))$ {break;} 其中 LB 为下界估计.

步骤 2. 构造调度 $\delta(k-1, n-k+1)$. 把调度 $\delta(k, n-k)$ 中第 k^{th} 链插入该调度的后半部

分中，其位置紧随具有较大 $w_{\delta(i)}$-值链的后面. $k=k-1$;Return;}

记 $\delta(k^*, n-k^*)$, $C(H) \triangleq C_{\max}(k^*) = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n'}\{C_{\max}(k)\}$. 算法复杂性 $O(n^2\log n)$.

4.2 算法分析

定理 3. 算法 H 的精度为 $C(H)\leqslant(1+2/7)C_{\max}^*$，$C_{\max}^*$为最优调度处理时间.

证明. 初始调度给出了在时刻$\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i+v_i)$前 M_3 最小可能的空闲时隙，启发式调度与最优调度的差距在于时刻$\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i+v_i)$后，由于链约束，$T^1$-任务无法配置在空闲处理器上.

在最坏的情形下，在初始调度中有某个链 C_k 的 T^1-任务被处理时无其它的 T^1-任务并发. 如果 $w_k\leqslant C(H)/3$，则

$$C_{\max}^* \geqslant LB \geqslant (C(H)-w_k)+\frac{1}{3}w_k \geqslant \frac{7}{9}C(H),\ i.e.,\ C(H)\leqslant(1+2/7)C_{\max}^*$$

如果 $w_k>C(H)/3$，$v_k\leqslant C(H)/3$，通过算法 H，链 C_k 的 T^2-任务无可行的并发任务，因此，在时刻$\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i+v_i)$前最多可能使得处理器 M_3 增加 v_k 个空闲时隙，以换取时刻$\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i+v_i)$后 T^1-任务的最多的并发可能性，则

$$C_{\max}^* \geqslant LB \geqslant C(H)-\frac{1}{3}v_k \geqslant \frac{8}{9}C(H),\ i.e.,\ C(H)\leqslant(1+1/8)C_{\max}^*$$

如果 $w_k>C(H)/3$，$v_k>C(H)/3$，通过算法 H，$C(H)=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n'}\{C_{\max}(K)\}$，所以至多有$\frac{1}{2}(C(H)-v_k-w_k)$的 T^2-任务可移到链 C_k 的 T^2-任务后方，与链 C_k 的 T^1-任务并发，即

$$C_{\max}^*\geqslant LB\geqslant C(H)-\frac{1}{2}(C(H)-v_k-w_k)\geqslant\frac{5}{6}C(H),\ i.e.,\ C(H)\leqslant(1+1/5)C_{\max}^*$$

综合上面讨论，得 $C(H)\leqslant(1+2/7)C_{\max}^*$. 证毕.

4.3 仿真分析

一个紧凑的最优化调度的下界是评估启发式算法性能的重要因数，容易给出一种减链调度问题的下界估计 $LB=\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i+v_i)+\left\lceil\left[\sum\limits_{i=1}^{n}w_i-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}v_i-IDLE\right)\right]/3\right\rceil$.

启发式算法 H 进行了仿真，测试事例中每条单减链无 T^3-任务，T^2-任务长度服从 $U[0,20]$均匀分布，而 T^1-任务分别服从 $U[0,10\beta]$，$\beta=1,2,3$，均匀分布. 减链数量分别为 $n=20\alpha$，$\alpha=1,2,3,4,5$. 每种情形生成 100 个问题，以相对误差$[C(H)-LB]/LB$ 最大值和到达下界次数$(C(H)=LB)$作为评价指标，结果统计如表 1 所示.

表 1 启发式调度 H 的相对误差与到达下界的次数

Table 1 Relative error and times hit LB of heuristic schedule H

β	α				
	1	2	3	4	5
1	0.011,(96)	0.002,(99)	0.003,(98)	0.008,(99)	0.001,(99)
2	0.010,(96)	0.013,(94)	0.006,(98)	0.012,(99)	0.005,(99)
3	0.004,(98)	0.000,(100)	0.001,(99)	0.000,(100)	0.000,(100)

仿真过程表明，每条链的 T^1-任务与 T^2-任务长度不一致时，通过启发式算法 H 的调

整，调度结果可以非常接近下界. 而当 T^2-任务与 T^1-任务长度长较为一致时，调度结果较差. 但是随着被调度减链数量的增加，启发式算法同样给出很好的调度. 另外，这里启发式算法具有较高精度的原因是，当单个减链的 T^1-任务长度相对于全部链集合的总处理时间很小时，初始调度已经具有很高的近似精度. 最坏情形误差是在假设减链的 T^1-任务长度无界情形下获得的.

5 结论

本文研究了一般的减链调度问题的算法. 一些特殊的减链可以有多项式时间算法，但是一般减链调度问题至少是在普通意义下 NP-hard 的. 通过对提出的一个启发式算法的分析和仿真可以知道，当单个减链的 T^1-任务长度占整个链集合的总处理时间较小的比例时，启发式算法具有较高精度. 在视觉识别和多机器人协同等实际问题中，每条递减链的 T^1-任务部分有界的，所以启发式算法是适用的.

References

1 Cai Xiao-Qiang, Lee Chung-Yee, Wong Tin-Lam. Mutiprocessor tasks scheduling to minimize the maximum tardiness and total completion time. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2000, **16**(6): 824～830

2 Blazewicz Jacek, Liu Zhen. Scheduling multiprocessor tasks with chain constrains. *European Journal of Operational Research*, 1996, **94**(1): 231～241

3 Blazewicz Jacek, Liu Zhen. Linear and quadratic algorithms for scheduling chains and opposite chains. *European Journal of Operational Research*, 2002, **137**(1): 248～264

4 Blazewocz J, Drabowski M, Weglarz J. Scheduling multiprocessor tasks to minimize schedule length. *IEEE Transactions on Computers*, 1986, **35**(2): 389～393

5 Lloyd E L. Concurrent task systems. *Operations Research*, 1981, **29**(1): 189～201

6 Liu Z, Sanlaville E. Preemptive scheduling with variable profile, precedence constrains and due dates. *Discrete Applied Mathematics*, 1995, **58**(1): 253～280

7 Jatinder N D Gupta, Venkata R Neppalli, Frank Werner. Minimizing total flow time in a two-machine flowshop problem with minimum makespan. *International Journal of Production Economics*, 2001, **69**(2): 323～338

杨根科　博士，教授. 研究兴趣为混合系统控制和供应链.

(**YANG Gen-Ke**　Ph. D., Professor. His research interests include hybrid systems and supply chain management.)

吴智铭　教授. 研究领域为离散事件、CIMS 和计算机软件技术等.

(**WU Zhi-Ming**　Professor. His research interests include discrete event system, hybrid systems and software engineering.)

陈　赟　硕士研究生. 研究方向为实时嵌入式系统和网络协议分析.

(**CHEN Yun**　Master student. His research interests include software engineering.)