第29卷 第6期　　自　动　化　学　报　　Vol. 29, No. 6
2003年11月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 2003

基于LMI的非线性摄动系统鲁棒绝对稳定性判据[1)]

杨　莹　　黄　琳
(北京大学力学与工程科学系　北京　100871)
(E-mail: yy@water. pku. edu. cn)

摘　要　讨论了前馈通道同时存在对象和控制器的范数摄动，而反馈通道存在扇区非线性的摄动系统的稳定性问题. 基于 H_∞ 理论和 LMI 方法，得到了一组由线性矩阵不等式表达的充分性条件，建立了判断非线性摄动系统鲁棒绝对稳定性的新判据.

关键词　范数摄动，鲁棒绝对稳定性，线性矩阵不等式
中图分类号　TP273

An LMI-Based Criterion for Robust Absolute Stability of Uncertain Nonlinear Systems

YANG Ying　HUANG Lin
(*Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing* 100871)
(E-mail: yy@water. pku. edu. cn)

Abstract　This paper is concerned with the problem of robust absolute stability of nonlinear systems under both plant and controller perturbations. Based on the popular H_∞ theory and LMI approach, sufficient conditions obtained via a system of linear matrix inequality formulations are stated to guarantee both the robustness and the absolute stability under additive norm-bounded perturbations. A new criterion in terms of linear matrix inequalities for the analysis of robust absolute stability of nonlinear systems is derived.

Key words　Norm-bounded perturbations, robust absolute stability, linear matrix inequalities

1　引言

近年来，非线性摄动系统的稳定性研究引起了人们的广泛关注，但大部分文献研究的是

1) 国家自然科学基金项目(10272001)和国家重点基础研究专项经费(G1998020302)联合资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(10272001) and National Key Basic Research Special Funds(G1998020302)
收稿日期　2001-06-22　　收修改稿日期　2001-11-19
Received June 22, 2001; in revised form November 19, 2001

当非线性系统的线性部分存在参数不确定性时系统的稳定性问题[1~4]，线性部分的摄动仅限于对象摄动. 对于对象和控制器同时存在摄动，尤其是范数摄动（未建模动态）的情况，据作者所知，还没有相应的文献及研究结果出现. 针对这种情况，本文对单输入单输出非线性系统在对象和控制器同时存在加性范数摄动的情况进行了研究，得到了系统鲁棒绝对稳定的充分性条件.

本文的创新之处在于：用线性函数 ky，$k\in[0,\mu]$ 代替非线性输入，用复数 $\alpha+\beta i$，$\alpha^2+\beta^2\leqslant\gamma^2$ 代替控制器的摄动 Δ_2，利用 H_∞ 理论和 LMI 方法建立李雅普诺夫函数来验证闭环系统的全局渐近稳定性，最后得到了一组由线性矩阵不等式表达的稳定性条件. 结果表明，非线性系统的鲁棒绝对稳定性问题可以归结为检验一组线性矩阵不等式的解的存在性问题.

2　主要结果

设非线性反馈系统的的线性部分是稳定、时不变、有限维的，其最小实现为 $(A,\ B, C^{\mathrm{T}})$，$A\in R^{n\times n}$，$B\in R^n$，$C\in R^n$，$\varphi(y)$ 满足扇区条件 $0\leqslant\varphi(y)/y\leqslant\mu$.

把系统的非线性输入用一个线性函数代替，即 $\varphi(y)=ky$，$k\in[0,\mu]$，$\mu>0$，则其闭环实现为 (A', B, C^{T})，其中 $A'=A+kBC^{\mathrm{T}}$，$k\in[0,\mu]$.

研究图 1 所示闭环摄动系统的鲁棒稳定性. F 为标称控制器，$P(s)=C^{\mathrm{T}}(sI-A')^{-1}B$，$F(s)=D_F+C_F(sI-A_F)^{-1}B_F$，$P=\{P(s)+\Delta_1, \Delta_1\in RH_\infty, \|\Delta_1\|_\infty\leqslant 1\}$，$F=\{F(s)+\Delta_2, \Delta_2\in RH_\infty, \|\Delta_2\|_\infty\leqslant\gamma\}$，由传统鲁棒控制理论[5]，$F$ 镇定 P 当且仅当 $\left\|\dfrac{F(s)+\Delta_2}{1+P(s)(F(s)+\Delta_2)}\right\|_\infty<1$，$\forall\Delta_2\in RH_\infty$，$\|\Delta_2\|\leqslant\gamma$，它等价于

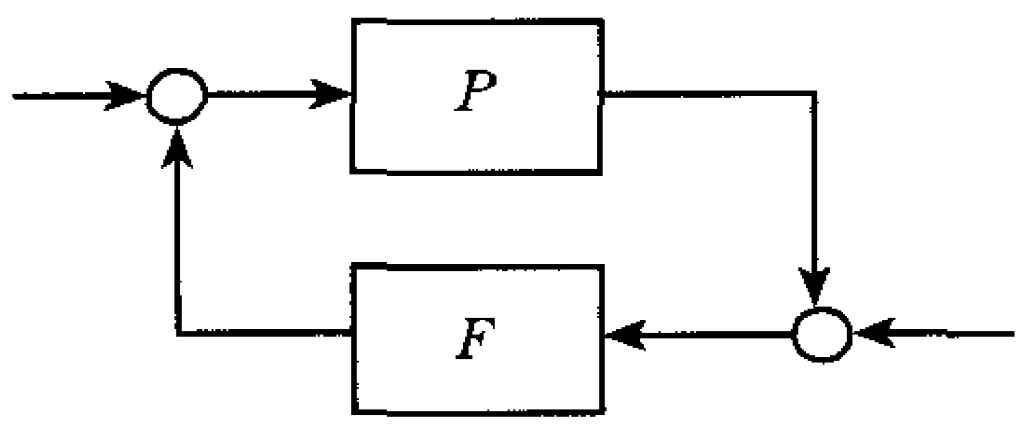

图 1　摄动系统

Fig. 1　Perturbed system

$$\left\|\frac{F(s)+\alpha+\beta i}{1+P(s)(F(s)+\alpha+\beta i)}\right\|_\infty<1,\ \forall\alpha+\beta i, \alpha^2+\beta^2\leqslant\gamma^2$$

下面将上述 H_∞ 控制问题转换成求解一组线性矩阵不等式.

注意到 $\left\|\dfrac{F(s)+\alpha+\beta i}{1+P(s)(F(s)+\alpha+\beta i)}\right\|_\infty<1$ 等价于广义对象为 $\hat{P}:=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -P\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}A' & 0 & B\\ \hline 0 & 0 & 1\\ C^{\mathrm{T}} & 1 & 0\end{array}\right]$ 的 H_∞ 控制问题，即 $\|T_{zw}\|_\infty<1$，其中 T_{zw} 表示外部输入信号 w 到误差输出信号 z 的传递函数. 设 $T_{zw}(s)=D_{cl}+C_{cl}(sI-A_{cl})^{-1}B_{cl}$，则

$$A_{cl}=\begin{bmatrix}A'+BD_FC^{\mathrm{T}} & BC_F\\ B_FC^{\mathrm{T}} & A_F\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}BC^{\mathrm{T}}(\alpha+\beta i) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=A_u+\begin{bmatrix}BC^{\mathrm{T}}(\alpha+\beta i) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$B_{cl}=\begin{bmatrix}BD_F\\ B_F\end{bmatrix}+(\alpha+\beta i)\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}=B_u+(\alpha+\beta i)\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}$$

$$C_{cl}=[C^{\mathrm{T}}D_F\quad C_F]+(\alpha+\beta i)[C^{\mathrm{T}}\quad 0]=C_u+(\alpha+\beta i)[C^{\mathrm{T}}\quad 0],\ D_{cl}=D_F+\alpha+\beta i$$

其中 $\begin{bmatrix}A_u & B_u\\ C_u & D_F\end{bmatrix}$ 为 $\dfrac{F(s)}{1+P(s)F(s)}$ 的一个最小实现.

由有界实引理，$\|T_{zw}\|_\infty<1$ 成立当且仅当对 $\forall k\in[0,\mu]$，$\forall \alpha+\beta i,\alpha^2+\beta^2\leqslant\gamma^2$，存在 $X_{cl}>0$ 使得

$$\begin{bmatrix} X_{cl}A_{cl}+A_{cl}^HX_{cl} & X_{cl}B_{cl} & C_{cl}^H \\ B_{cl}^HX_{cl} & -1 & D_{cl}^H \\ C_{cl} & D_{cl} & -1 \end{bmatrix}<0 \tag{1}$$

若对于 $\forall k\in[0,\mu]$，$\forall \alpha+\beta i,\alpha^2+\beta^2\leqslant\gamma^2$ 上式有公共解 X_{cl}，设闭环线性系统的 Lyapunov 函数为 $V=x^{\mathrm{T}}X_{cl}x$，则 $\dot V=x^{\mathrm{T}}(A_{cl}^HX_{cl}+X_{cl}A_{cl})x$. 由式(1)知 $A_{cl}^HX_{cl}+X_{cl}A_{cl}<0$，将 $A_{cl}=\begin{bmatrix} A'+BD_FC^{\mathrm{T}}+BC^{\mathrm{T}}(\alpha+\beta i) & BC_F \\ B_FC^{\mathrm{T}} & A_F\end{bmatrix}$ 带入，化简得 $\begin{bmatrix} F_1+kF_2 & G \\ G^{\mathrm{T}} & H\end{bmatrix}<0$，其中 F_1,F_2,H 均为对称阵. 若将 k 替换成 $\varphi(y)/y$，则非线性系统 Lyapunov 函数的微商为

$$\dot V=\begin{bmatrix} F_1+\dfrac{\varphi(y)}{y}F_2 & G \\ G^{\mathrm{T}} & H\end{bmatrix}<0$$

于是闭环非线性摄动系统是全局渐近稳定的. 以下结果表明对 $\forall k\in[0,\mu]$，$\forall \alpha+\beta i,\alpha^2+\beta^2\leqslant\gamma^2$，存在公共的 X_{cl}.

引理 1. F_1,F_2,G,H 为给定的矩阵，且 $F_i=F_1^H,i=1,2$，$H=H^H$，则对 $\forall k\in[0,\mu]$，$\mu>0$

$$\Phi_k:=\begin{bmatrix} F_1+kF_2 & G \\ G^{\mathrm{T}} & H\end{bmatrix}<0$$

成立当且仅当 $\Phi_0<0,\Phi_\mu<0$.

引理 2[6]. 对 $\forall k\in[0,\mu]$，以下条件等价：

i) $\left\|\dfrac{F(s)+\alpha+\beta i}{1+P(s)(F(s)+\alpha+\beta i)}\right\|_\infty<1$，$\forall \alpha^2+\beta^2\leqslant\gamma^2$；

ii) 存在 $X_{cl}>0$ 使得

$$P\begin{bmatrix} X_{cl}A_u+A_u^HX_{cl} & X_{cl}B_u & C_u^H \\ B_u^HX_{cl} & -1 & D_F^H \\ C_u & D_F & -1\end{bmatrix}P^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\gamma&0\\0&0&\gamma\end{bmatrix}<0,\ P=\begin{bmatrix} I & -\begin{bmatrix}C\\0\end{bmatrix} & -X_{cl}\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{2}$$

引理 3[7]. 设 $B\in R^{n\times m}$，$C\in R^{k\times n}$，$Q\in R^{n\times n}$，且 $\mathrm{rank}(B)<n$，$\mathrm{rank}(C)<n$，$Q=Q^{\mathrm{T}}$，那么存在相容的矩阵 G 使得 $BGC+(BGC)^{\mathrm{T}}+Q<0$，当且仅当 $B^\perp QB^{\perp\mathrm{T}}<0$，$C^{\mathrm{T}\perp}QC^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}}<0$.

将式(2)改写为 $\tilde BG\tilde C+(\tilde BG\tilde C)^{\mathrm{T}}+Q+Q_1<0$ 的形式，

$$\left[\begin{array}{c|c}\tilde B & Q \\ \hline * & \tilde C\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|ccc} X_{cl}B_2 & X_{cl}\tilde A'+\tilde A^{\mathrm{T}}X_{cl} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \tilde D_{12} & D_F & -1 & -1 \\ \hline * & \tilde C_2 & \tilde D_{21} & 0\end{array}\right]$$

$$Q_1=\begin{bmatrix} \gamma X_{cl}\begin{bmatrix}BB^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}X_{cl}+\gamma\begin{bmatrix}CC^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} & \gamma X_{cl}\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix} & \gamma\begin{bmatrix}C\\0\end{bmatrix} \\ \gamma[B^{\mathrm{T}}\ \ 0]X_{cl} & \gamma & 0 \\ \gamma[C^{\mathrm{T}}\ \ 0] & 0 & \gamma\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c|c}\tilde A & \tilde B_1 & \tilde B_2 \\ \hline \tilde C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline \tilde C_2 & D_{21} & G^{\mathrm{T}}\end{array}\right]=$$

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc} A' & 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline C^{\mathrm{T}} & 0 & 1 & D_F^{\mathrm{T}} & B_F^{\mathrm{T}} \\ 0 & 1 & 0 & C_F^{\mathrm{T}} & A_F^{\mathrm{T}} \end{array}\right]$$

定义 X_{cl} 和 X_{cl}^{-1} 为如下形式的分块矩阵

$$X_{cl} := \begin{bmatrix} S & N \\ N^{\mathrm{T}} & * \end{bmatrix},\quad X_{cl}^{-1} := \begin{bmatrix} R & M \\ M^{\mathrm{T}} & * \end{bmatrix},\ R,S,M,N \in R^{n\times n}$$

运用引理 1 及引理 3，很容易得到以下非线性摄动系统鲁棒绝对稳定性判据.

定理 1. 闭环摄动系统 $\{P,F,\varphi(y)\}$，$P=\{P(s)+\Delta_1,\|\Delta_1\|_\infty\leqslant 1\}$，$P(s)=C^{\mathrm{T}}(sI-A)^{-1}B$，$F=\{F(s)+\Delta_2,\|\Delta_2\|_\infty\leqslant\gamma,\gamma<1\}$，$\varphi(y)\in[0,\mu]$ 鲁棒绝对稳定的一个充分条件为

i) 存在 $R=R^{\mathrm{T}}>0$ 使得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AR+RA^{\mathrm{T}}+\gamma BB^{\mathrm{T}} & \gamma B & RC^{\mathrm{T}} \\ \gamma B^{\mathrm{T}} & -1+\gamma & 0 \\ CR & 0 & \dfrac{-1+\gamma}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}^{\perp T} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A+\mu BC^{\mathrm{T}})R+R(A+\mu BC^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}+\gamma BB^{\mathrm{T}} & \gamma B & RC^{\mathrm{T}} \\ \gamma B^{\mathrm{T}} & -1+\gamma & 0 \\ CR & 0 & \dfrac{-1+\gamma}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}^{\perp T} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

ii) 存在 $S=S^{\mathrm{T}}>0$ 使得

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SA+A^{\mathrm{T}}S+\gamma CC^{\mathrm{T}} & \gamma C & SB \\ \gamma C^{\mathrm{T}} & -1+\gamma & 0 \\ B^{\mathrm{T}}S & 0 & \dfrac{-1+\gamma}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix}^{\perp T} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix}^{\perp} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(A+\mu BC^{\mathrm{T}})+(A+\mu BC^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}S+\gamma CC^{\mathrm{T}} & \gamma C & SB \\ \gamma C^{\mathrm{T}} & -1+\gamma & 0 \\ B^{\mathrm{T}}S & 0 & \dfrac{-1+\gamma}{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ 1 \end{bmatrix}^{\perp T} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

iii) $\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix}\geqslant 0$

上述定理表明非线性摄动系统存在顶点检验结果，即扇区的全局渐近稳定性可由其边界的全局渐近稳定性保证.

若以上线性矩阵不等式有解 R 和 S，则通过结构奇异值分解求得两个可逆矩阵 $M,N\in R^{n\times n}$ 使得 $MN^{\mathrm{T}}=I-RS$，对应的有界实引理矩阵 X_{cl} 由以下矩阵方程唯一决定

$$X_{cl}\begin{bmatrix} R & I \\ M^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

4 结论

非线性摄动系统的鲁棒绝对稳定性条件可以归结为一组线性矩阵不等式是否存在正定解.由于系统的李雅普诺夫函数由线性矩阵不等式组的公共解决定,因此,何种条件下线性矩阵不等式组存在公共解仍是一个开放问题,有待于今后进一步研究.

References

1 Chapellat H, Dahleh M, Bhattacharyya S P. On robust nonlinear stability of interval control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(1): 56~67

2 Dahleh M, Tesi A, Vicino A. On the robust Popov criterion for interval Lue's system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, **38**(9): 1400~1405

3 Wang Z, Biao H, Unbehauen H. Robust reliable control for a class of uncertain nonlinear state-delayed systems. *Automatic*, 1999, **35**(5): 955~963

4 Tesi A, Vicino A. Robust absolute stability of Lue's control systems in parameter space. *Automatic*, 1991, **27**(1): 147~151

5 Zhou K, Doyle J C, Keith G. Robust and Optimal Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996

6 Duan Z, Huang L, Wang L. Robustness analysis and synthesis of SISO systems under both plant and controller perturbations. *Systems and Control Letters*, 2000, **42**(3): 201~216

7 Gahinet P, Aplcarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994, **4**(4): 421~448

杨 莹 2003年于北京大学获博士学位,现为北京大学力学与工程科学系博士后.研究方向为鲁棒控制、非线性系统控制理论.

(**YANG Ying** Received her Ph. D. degree from Peking University in 2003. She is currently a postdoctoral fellow in the Department of Mechanics and Engineering Science at Peking University. Her research interests include robust control and nonlinear systems control theory.)

黄 琳 北京大学力学与工程科学系教授,博士生导师,研究方向为稳定性理论与应用、鲁棒控制、复杂控制系统理论.

(**HUANG Lin** Professor in the Department of Mechanics and Engineering Science at Peking University. His research interests include stability theory and its applications, robust control, and complex control systems theory.)