第 28 卷 第 4 期
2002 年 7 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 28, No. 4
July, 2002

短文

满意滤波在航迹辨识中的应用[1)]

盛安冬 王远钢 戚国庆 黄 飞 郭 治
(南京理工大学自动化系 南京 210094)
(E-mail: shengandong@263.net)

摘 要 利用线性矩阵不等式(LMI, linear matrix inequalities)方法,首先研究了 Kalman 滤波的稳态误差方差和滤波增益的解法,并根据满意控制的思想,提出了具有误差方差上界约束的滤波问题,然后研究了误差方差上界约束下对系统测量噪声具有最大容许强度的满意鲁棒滤波.本文的研究成果已被应用于某型 C^3I 系统中的航迹辨识.

关键词 Kalman 滤波,满意滤波,误差方差,测量噪声,LMI 方法
中图分类号 TP231.3

APPLICATION OF SATISFACTORY FILTERING TO TRACKING-IDENTIFICATION PROBLEM

SHENG An-Dong WANG Yuan-Gang QI Guo-Qing HUANG Fei GUO Zhi
(*Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing* 210094)
(E-mail: shengandong@263.net)

Abstract A solution to steady error variance and filter gain of Kalman filter is studied with LMI(linear matrix inequalities) method in this paper. And a satisfactory filtering problem with upper bound constraint on error variance is proposed. Then the satisfactory robust filtering with largest admissible intensity of measurement noise under constraint of given upper error-variance is discussed. Finally, the result has been applied to tracking-identification problem in a C^3I system.

Key words Kalman filter, satisfactory filtering, error variance, measurement noise, LMI approach

1 引言

工程控制中经常要面对多种性能指标要求的问题,而诸多性能指标之间是否彼此矛盾,

1) 国家自然科学基金(60174028)资助
收稿日期 2000-01-11 收修改稿日期 2001-04-10

即是否相容，目前还没有相应的理论来判定．因而建立一种约束指标之间相容性理论，指出相容性能指标的取值范围，无疑为工程人员设定实际系统的性能指标具有指导或参考意义．同时在实际系统期望的多项性能指标相容时，给出求取相应满意控制策略方法，这是“满意控制”[1]的核心内容．

在实际工程中，传感器精度的提高受到技术、成本等多种因素的制约．满足实际工程精度指标要求的条件（例如 σ^2 为系统所要求的滤波误差方差精度），设计一种鲁棒满意滤波器，在误差系统渐近稳定且稳态方差阵 P 满足 $\mathrm{diag}(P)\leqslant\sigma^2$ 的前提下，使其容许系统有尽可能大强度的测量噪声，从而降低系统对传感器精度的要求，这无疑具有十分重要的意义．

常用的 Kalman 滤波是一种无偏的最小方差估计，而实际工程往往只要求估计误差方差满足一定的上界要求．本文基于某型 C^3I 系统中的航迹辨识问题，首先利用线性矩阵不等式方法，研究了其稳态 Kalman 滤波，给出了 Kalman 滤波误差方差及滤波增益的解法，其误差方差可作为实际系统的最小误差方差上界，然后对具有误差方差上界约束的估计问题，研究了滤波对测量噪声的容许强度．

2 问题描述

考虑如下状态及测量方程描述的线性离散随机系统(Σ)

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k) = \phi \boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{W}(k-1) \\ \boldsymbol{z}(k) = H\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{V}(k) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{z}(k)$ 为 m 维测量向量，$\boldsymbol{W}(k)$ 为 n 维随机干扰，$\boldsymbol{V}(k)$ 为 m 维测量噪声，ϕ 为 $n\times n$ 状态转移矩阵，H 为 $m\times n$ 测量系数阵．噪声的统计特性分别为

$$E\{\boldsymbol{W}(k)\} = 0,\quad \mathrm{COV}\{\boldsymbol{W}(k),\boldsymbol{W}(1)\} = Q(k)\delta_{k1},$$

$$E\{\boldsymbol{V}(k)\} = 0,\quad \mathrm{COV}\{\boldsymbol{V}(k),\boldsymbol{V}(1)\} = R(k)\delta_{k1}.$$

已知随机初始状态的统计特性为

$$E\{\boldsymbol{x}(0)\} = \boldsymbol{x}_0,\quad \mathrm{Var}\{\boldsymbol{x}(0)\} = P_{x_0},$$

$$\mathrm{COV}\{\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{W}(k)\} = 0,\quad \mathrm{COV}\{\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{V}(k)\} = 0.$$

经典卡尔曼滤波的递推公式为[2]

1) $$K(k)=P(k|k-1)H^{\mathrm{T}}\{H[\phi P(k-1|k-1)\phi^{\mathrm{T}}+Q(k-1)]H^{\mathrm{T}}+R(k)\}^{-1} \tag{2}$$

2) $$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}(k|k) &= \hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1) + K(k)\tilde{\boldsymbol{z}}(k|k-1) = \\ &\phi\hat{\boldsymbol{x}}(k-1|k-1) + K(k)[\boldsymbol{z}(k) - H\phi\hat{\boldsymbol{x}}(k-1|k-1)]\end{aligned} \tag{3}$$

3) $$\begin{aligned}P(k|k) = &[I-K(k)H][\phi P(k-1|k-1)\phi^{\mathrm{T}} + Q(k-1)] \\ &[I-K(k)H]^{\mathrm{T}} + K(k)R(k)K^{\mathrm{T}}(k)\end{aligned} \tag{4}$$

滤波误差方程为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k) = (I-KH)\tilde{\boldsymbol{x}}(k-1) + (I-KH)\boldsymbol{W}(k-1) - K\boldsymbol{V}(k) \tag{5}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{x}}(k)=\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k|k)$．

若估计目标的运动具有较好的平稳性，则当 $k\to+\infty$ 时，卡尔曼滤波的误差方差 $P(k|k)$，$K(k)$ 将分别趋于稳定值 P_{Kal}，K_{Kal}，设 $H(k)\equiv H$，$Q(k)\equiv Q$，$R(k)\equiv R$，$\phi(k,k-1)=\phi$，则对(2)，(4)两式取极限得到

$$P = (I-KH)(\phi P\phi^{\mathrm{T}} + Q)(I-KH)^{\mathrm{T}} + KRK^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

$$K = (\phi P\phi^{\mathrm{T}} + Q)H^{\mathrm{T}}[H(\phi P\phi^{\mathrm{T}} + Q)H^{\mathrm{T}} + R]^{-1} \tag{7}$$

令
$$f(P,K) = (I - KH)(\phi P\phi^{\mathrm{T}} + Q)(I - KH)^{\mathrm{T}} + KRK^{\mathrm{T}} - P \tag{8}$$

1）对于上述系统给出 Kalman 滤波误差方差及滤波增益；

2）对于上述系统给定滤波误差方差上界约束指标，研究相应满意滤波器对测量噪声的容许强度.

为了叙述方便，本文除常用标准符号外，对于两个同维向量 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}\leqslant\boldsymbol{N}$ 表示各分量不等式同时成立，并用 $\mathrm{diag}(P)$表示方阵 P 的主对角元素组成的行向量.

3　主要结论

引理 1(Schur 补)[3]. 设 P,R,Y 为适维矩阵，且 $R>0$，则以下不等式等价

$$P - YR^{-1}Y^{\mathrm{T}} > 0,\qquad \begin{bmatrix} P & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & R \end{bmatrix} > 0.$$

引理 2. 若滤波增益为 K 使系统(Σ)渐近稳定，则矩阵变量 $\widetilde{P}$ 的以下不等式

$$(I - KH)\phi\widetilde{P}\phi(I - KH)^{\mathrm{T}} - \widetilde{P} + (I - KH)Q(I - KH)^{\mathrm{T}} + KRK^{\mathrm{T}} < 0 \tag{9}$$

有正定解；相应系统(Σ)的稳态状态方差阵 $\widetilde{P}$ 是上述不等式的解集 Ω 的下确界，而且 P 可通过求 $\min\{\mathrm{tr}(\widetilde{P})\mid\widetilde{P}\in\Omega\}$得到，这里 $\Omega=\{\widetilde{P}\mid\widetilde{P}$ 正定且满足不等式(9)$\}$.

证明. 对系统的滤波增益 K，由离散方程的 Lyapunov 稳定性理论，可得式(9)的任一正定解 $\widetilde{P}$ 必满足 $\widetilde{P}>P$；又对任意正整数 k，设 $\widetilde{P}_k$ 是如下方程

$$(I-KH)\phi\widetilde{P}\phi(I-KH)^{\mathrm{T}}-\widetilde{P}+(I-KH)Q(I-KH)^{\mathrm{T}}+KRK^{\mathrm{T}}+\frac{1}{k}I=0$$

的唯一正定解，则 $\widetilde{P}_k$ 满足不等式(9)、矩阵列$\{\widetilde{P}_k\}$ 单调递减且 $\widetilde{P}_k>P$，因而矩阵列$\{\widetilde{P}_k\}$有极限；对上式关于 k 取极限即得 $\widetilde{P}_k$ 以 P 为极限，从而 P 是式(9)的解集 Ω 的下确界，而式(9)是矩阵变量 $\widetilde{P}$ 的线性不等式，所以 Ω 是凸矩阵集，且 Ω 的下确界 P 就是 $\min\{\mathrm{tr}(\widetilde{P})\mid\widetilde{P}\in\Omega\}$相应的极小阵.

记 $\Omega=\{(P,K)\mid f(P,K)<0,P>0\}$，因为 Kalman 滤波的误差方差阵 P_{Kal}最小，所以对所有$(P,K)\in\Omega$，均有 $P_{\mathrm{Kal}}<P$，且 P_{Kal}是 Ω 的下确界，故$(P_{\mathrm{Kal}},K_{\mathrm{Kal}})$是约束极值问题

$$\min(\mathrm{tr}(P)) \tag{10}$$

$$f(P,K) = (I - KH)(\phi P\phi^{\mathrm{T}} + Q)(I - KH)^{\mathrm{T}} + KRK^{\mathrm{T}} - P < 0 \tag{11}$$

相应极小点. 记

$$p = P^{-1},\qquad S = pK \tag{12}$$

则 $f(P,K)<0$ 变为

$$p(I - KH)(\phi p^{-1}\phi^{\mathrm{T}} + Q)(I - KH)^{\mathrm{T}}p + pKRK^{\mathrm{T}}p - p < 0 \tag{13}$$

证毕.

定理 1. 设(p_0,S_0)是如下 LMI

$$\begin{bmatrix} -p & p\phi - SH\phi & p - SH & S \\ (p\phi - SH\phi)^{\mathrm{T}} & -p & 0 & 0 \\ p - H^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ S^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{14}$$

约束极大值问题 $\max\limits_{(p,S)\in\Omega}\operatorname{tr}(p)$ 相应的极值点，则系统(Σ)的稳态 Kalman 滤波增益及误差方差分别为 $K_{\mathrm{Kal}}=p_0^{-1}S$，$P_{\mathrm{Kal}}=p_0^{-1}$.

证明. 利用引理 1 易得(p,S)的不等式(13)有解且 $p>0$，等价于 LMI(14)有解，因而由上述分析即得定理结论. 证毕.

当 R 为零时，设 p^* 是变量 p,S 的如下不等式

$$\begin{bmatrix} -p & p\phi-SH\phi & p-SH \\ (p\phi-SH\phi)^{\mathrm{T}} & -p & 0 \\ p-H^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}<0 \tag{15}$$

约束极值问题$\max\{\operatorname{tr}(p)\}$相应的极大阵，记 $P_L=(p^*)^{-1}$. 于是对所有满足

$$\sigma^2\geqslant\operatorname{diag}(P_L)$$

的方差上界指标 σ^2，均可考虑误差方差上界约束 $\operatorname{diag}(P)\leqslant\sigma^2$ 下满意滤波对测量噪声的容许强度.

定理 2. 给定方差上界指标 σ^2 满足 $\sigma^2>\operatorname{diag}(P_L)$，假设($r_L,p_L,S_L$)是如下 LMI

$$\begin{bmatrix} -p & p\phi-SH\phi & p-SH & S \\ (p\phi-SH\phi)^{\mathrm{T}} & -p & 0 & 0 \\ p-H^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}} & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ S^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -r \end{bmatrix}<0 \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} -P_1 & I \\ I & -p \end{bmatrix}<0 \tag{17}$$

约束问题 $\min\{\operatorname{tr}(r)\}$ 相应的极小点，其中 P_1 满足 $P_1>P_L$ 且 $\operatorname{diag}(P_1)=\sigma^2$，$P_1$ 可取成对角元素与 σ^2 相同，非对角元素与 P_L 相同. 则 $K=p_L^{-1}S_L$ 是一个满足方差约束 $\operatorname{diag}(P)\leqslant\sigma^2$ 的一个鲁棒滤波，它容许时不变测量噪声强度为 $R_u:=(r_L)^{-1}$，亦即对所有强度为 R：$0<R<R_u$ 时不变测量噪声，其滤波误差方差均满足 $\operatorname{diag}(P)\leqslant\sigma^2$.

4 算 例

假设某一雷达航迹辨识系统的参数分别为 $R=9\times10^6(\mathrm{m}^2)$，

$$Q=\begin{bmatrix} 12839.62 & 1950.31 & 2.5 \\ 1950.31 & 392.5 & 20.0 \\ 2.5 & 20.0 & 160.0 \end{bmatrix},\quad H=[1,0,0],\quad \phi=\begin{bmatrix} 1 & 10 & 1.234 \\ 0 & 1 & 0.125 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据定理 1，利用 Matlab-Toolbox[4]中的 LMI 软件，算得稳态 Kalman 滤波增益及误差方差分别为

$$P_{\mathrm{Kal}}=\begin{bmatrix} 2.82\times10^6 & 5.12\times10^4 & 0 \\ 5.12\times10^4 & 2.0\times10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 200.0 \end{bmatrix},\quad K_{\mathrm{Kal}}=\begin{bmatrix} 0.3093 \\ 0.0056 \\ 0.0000 \end{bmatrix}.$$

而 $R=0$，Q,H,ϕ 不变时，算得 $P_L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 170.5 & 28.2 \\ 0 & 28.2 & 200.0 \end{bmatrix}$.

于是对方差上界指标 $\sigma^2=4\times\operatorname{diag}(P_{\mathrm{Kal}})=[1.128\times10^7,8.0\times10^3,800.0]$，根据定理 2 求得满

意滤波增益 $K=[0.2231\quad 0.0028\quad 0.0000]^{T}$,其相应最大测量噪声强度 $R_{u}=3.924\times 10^{7}$ 的误差方差为

$$P=\begin{bmatrix} 8.817\times 10^{6} & 1.109\times 10^{5} & 0 \\ 1.109\times 10^{5} & 3.0\times 10^{3} & 0 \\ 0 & 0 & 200.0 \end{bmatrix}.$$

对比满意滤波误差方差 P 阵和卡尔曼滤波误差方差阵 P_{Kal} 可看出,当误差方差阵主对角元素放大到原来的 4 倍(即标准差放大为原来的 2 倍),允许的测量误差方差 R 扩大为原来的 4.36 倍(即标准差放大为原来的 2.09 倍),也即对于雷达的测量精度的要求可放宽到原来的 2 倍左右.

参 考 文 献

1 Guo Zhi. A survey of satisfying control and estimation. In: Han-Fu Chen. Proceedings of the 14th IFAC Congress, Beijing: Press of Tsinghua University, 1999. G:443～447

2 付梦印,钟秋海. 现代控制理论与应用. 北京:机械工业出版社, 1997

3 Boyle S, Ghaoui L E, Feron E, Balakhrishnan V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. SIAM Series in Systems and Control, Philadelphia:Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994

4 Gahinet P, Nemirovsky A, Laub A J, Hilali M. LMI Control Toolbox. Massachusetts: Mathworks Inc., 1995

5 Wang Zidong, Guo Zhi. Robust constrained variance estimation for discrete systems with model noise intensity uncertainty and its application. *Chinese Journal of Automation*, 1996, **8**(3):249～253

盛安冬　工学博士.现研究满意滤波及其在火力、指挥控制中的应用.

王远钢　博士研究生.现研究满意控制中的相容性理论.