



# 高精度伺服系统低速问题研究

张锦江 吴宏鑫 李季苏 邹广瑞

(北京控制工程研究所 北京 100080)

**摘 要** 采用相平面法、代数分析法和李雅普诺夫稳定性定理得出了三阶系统克服低速滞滑爬行的判定定理. 通过该判定定理得到系统参数与低速滞滑爬行的关系, 在满足常规稳定控制器参数选择范围的基础上, 给出了为消除低速滞滑爬行, PID 控制器参数还应满足的条件. 该判定定理简单实用, 对于高精度伺服系统的调试具有很好的指导意义.

**关键词** 低速滞滑, 稳定性判据, 摩擦

**中图分类号** TP273

## ON LOW-SPEED PROBLEM OF HIGH PRECISION SERVO SYSTEM

ZHANG Jin-Jiang WU Hong-Xin LI Ji-Su ZOU Guang-Rui

(Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100080)

**Abstract** The criteria of overcoming low-speed slip-stick phenomenon of third-order system is given by using phase plane method, algebra analyzing method and Lyapunov stability theorem. The relationship between system parameter and low-speed slip-stick phenomenon is found, and the condition of choosing the parameter of PID is given, which should satisfy the purpose of overcoming low-speed stick-slip and guaranteeing the stability. This method is simple and easy to implement. It has directive significance to high precision servo system.

**Key words** Low-speed slip-stick, stability criterion, friction

## 1 引言

在 PID 控制下高精度伺服系统低速问题分析中, 由于摩擦力矩存在, 容易产生滞滑爬行现象, 严重影响高精度伺服系统的低速性能. 常用的分析方法有分段线性化方法、相平面法、谐波分析法和李亚普诺夫法等<sup>[1]</sup>. 国内外不少学者分析了摩擦对伺服系统的影响关系,

但是控制参数和低速滞滑的定量关系没有给出<sup>[1~3]</sup>. 本文综合上述方法得出了高精度伺服系统简化为三阶系统克服低速滞滑爬行的判定定理, 建立了定量判定克服低速滞滑、保证稳定的条件. 根据该定理确定的 PID 参数, 使得系统既满足稳定, 又无低速滞滑爬行现象, 在机电和电液伺服系统调试中都证明了其正确性.

对于机电或电液伺服系统, 假设系统  $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$  从  $(0, 0, 0)$  以恒速  $\dot{r}_d > 0$  运动, 位置量为  $r_d = \dot{r}_d t$ , 简化为三阶系统, 统一表示为

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + T\theta = K \cdot u - M_c \quad (1)$$

上式中  $u = K_i \int_{t_0}^{t^*} (r_d - \theta) dt + K_p (r_d - \theta) + K_d (\dot{r}_d - \dot{\theta})$  为控制量;  $J, B, T, K$  为系统参数;  $M_c$  为摩擦力矩, 其摩擦模型为<sup>[1]</sup>

$$\text{运动时} \quad M_c(\dot{\theta}) = \left[ M_k + K_v |\dot{\theta}| + M_s \cdot \frac{1}{1 + (\dot{\theta}/\dot{\theta}_s)^2} \right] \text{sgn}(\dot{\theta}) \quad (2)$$

$$\text{停滞时} \quad M_c = \begin{cases} -M_m, & M > M_m \\ -M, & M_m > M > -M_m \\ M_m, & M < -M_m \end{cases} \quad (3)$$

其中  $M$  为驱动力矩,  $M_m$  为最大静摩擦力矩,  $M_k$  为库仑摩擦力矩,  $K_v$  为粘性摩擦比例系数,  $M_s$  为 Stribeck 摩擦力矩,  $\dot{\theta}_s$  为 Stribeck 摩擦特征速率,  $M_m = M_k + M_s$ .

## 2 克服滞滑爬行的定理建立

$$\text{定义 1.} \quad \int_{t_0}^{t^*} \theta' dt = \int_{t_0}^{t^*} \theta dt - \int_{t_0}^{t^*} r_d dt + \left( \frac{T}{K \cdot K_i} r_d + \frac{B + K_v \dot{r}_d}{K \cdot K_i} \dot{r}_d + \frac{M_k}{KK_i} + \frac{M_s}{KK_i [1 + (\dot{r}_d/\dot{\theta}_s)^2]} \right),$$

其中  $\theta' = \theta - r_d, \dot{\theta}' = \dot{\theta} - \dot{r}_d, \ddot{\theta}' = \ddot{\theta}$ . 将(2)式代入(1)式得

$$\ddot{\theta}' + \frac{B + KK_d + K_v \dot{\theta}'}{J} \dot{\theta}' + \frac{T + KK_p}{J} \theta' + \frac{KK_i}{J} \int_{t_0}^{t^*} \theta' dt = \frac{M_s}{J} \left( \frac{1}{1 + (\dot{r}_d/\dot{\theta}_s)^2} - \frac{1}{1 + [(\dot{\theta}' + \dot{r}_d)/\dot{\theta}_s]^2} \right) \quad (4)$$

令方程(4)左边部分存在的三个特征根分别为  $-\rho\omega \pm \omega \sqrt{\rho^2 - 1}$  和  $-\lambda\omega$ .

$$\text{定义 2.} \quad \xi = \theta' / \alpha, t^* = \beta \cdot t, \text{其中 } \beta = \omega = \sqrt[3]{\frac{KK_i}{J\lambda}}, \alpha = \frac{\dot{\theta}_s}{\beta}.$$

通过变换, 隐去  $\omega$  和  $\dot{\theta}_s$  两个参数, 将系统化为特征根简化形式

$$d^2 \left[ \xi + \lambda \int_{t_0}^{t^*} \xi dt^* \right] / dt^{*2} + \left[ \xi + \lambda \int_{t_0}^{t^*} \xi dt^* \right] = -2\rho d \left[ \xi + \lambda \int_{t_0}^{t^*} \xi dt^* \right] / dt^* + M_s^* \Phi(\xi) \quad (5)$$

$$\text{其中 } \rho = \frac{B + KK_d + K_v}{2J\beta} - \frac{KK_i}{2J\beta^3} \text{ 或 } \rho = \frac{(T + KK_p)\beta - J\beta^3}{2KK_i}, M_s^* = \frac{M_s}{J\alpha\beta^2}, \Phi(\xi) = \frac{1}{1 + \xi_d^2} -$$

$$\frac{1}{1 + (\dot{\xi}(t^*) + \dot{\xi}_d)^2}.$$

$$\text{定义 3.} \quad TL = \frac{M_s^*}{2\rho\lambda + 1} \left( \frac{-\dot{\xi}_d^2}{1 + \dot{\xi}_d^2} \right) + \frac{2\rho + \lambda}{2\rho\lambda + 1} \dot{\xi}_d, TR = \frac{2M_s^*}{2\rho\lambda + 1} + \frac{M_s^*}{2\rho\lambda + 1} \left( \frac{2 + \dot{\xi}_d^2}{1 + \dot{\xi}_d^2} \right) + \frac{2\rho + \lambda}{2\rho\lambda + 1} \dot{\xi}_d.$$

把  $\int_{t_0}^{t^*} \xi dt^*$ ,  $\xi, \dot{\xi}$  相平面分成平衡原点  $O$ 、停滞区  $S$ 、运动区  $W$ . 根据定义 1, 可得确立平衡原点  $O = \left\{ \left( \int_{t_0}^{t^*} \xi dt^*, \xi, \dot{\xi} \right) \mid \int_{t_0}^{t^*} \xi dt^* = 0, \xi = 0, \dot{\xi} = 0 \right\}$  为系统的平衡点, 此时系统稳定跟踪速率  $\dot{r}_d$ . 如果系统停滞, 由  $\dot{\theta} = 0, \theta = 0, -M_m \leq M_c \leq M_m$ , 可得系统的停滞区为  $S = \left\{ \left( \int_{t_0}^{t^*} \xi dt^*, \xi, \dot{\xi} \right) \mid TL < \frac{\lambda}{2\rho\lambda + 1} \int_{t_0}^{t^*} \xi dt^* + \xi < TR, \dot{\xi} = -\dot{\xi}_d \right\}$ , 其中  $TL$  为停滞区的左界,  $TR$  为停滞区的右界. 除此之外为系统的运动区  $W$ .

**引理 1**<sup>[4]</sup>. 如果系统存在滞滑运动, 在相平面上系统存在停滞区, 平衡点不在停滞区, 且满足条件: 1) 如果系统当前状态在运动区, 则有限时间必将到达停滞区; 2) 如果系统当前状态在停滞区, 则有限时间必将滑出停滞区.

**定义 4.** 投影平面横轴坐标为  $X = \frac{\lambda}{2\rho\lambda + 1} \int_{t_0}^{t^*} \xi dt^* + \xi$ , 纵轴坐标为  $Y = \dot{\xi}$ .

将系统滞滑运动在  $\left( \frac{\lambda}{2\rho\lambda + 1} \int_{t_0}^{t^*} \xi dt^* + \xi, \dot{\xi} \right)$  平面的投影如图 1 和 2 所示, 图 1 表示  $TL \leq 0$  的情况, 图 2 表示  $TL > 0$  的情况. 根据引理 1 和对相平面的划分, 系统处在停滞状态,  $\theta = \text{const}, \dot{\theta} = 0, S$  中无平衡点, 且随着时间的变化, 系统从停滞区的左界离开  $S$ , 系统满足引理 1 条件 2). 下面寻找满足引理 1 条件 1) 的系统参数关系.

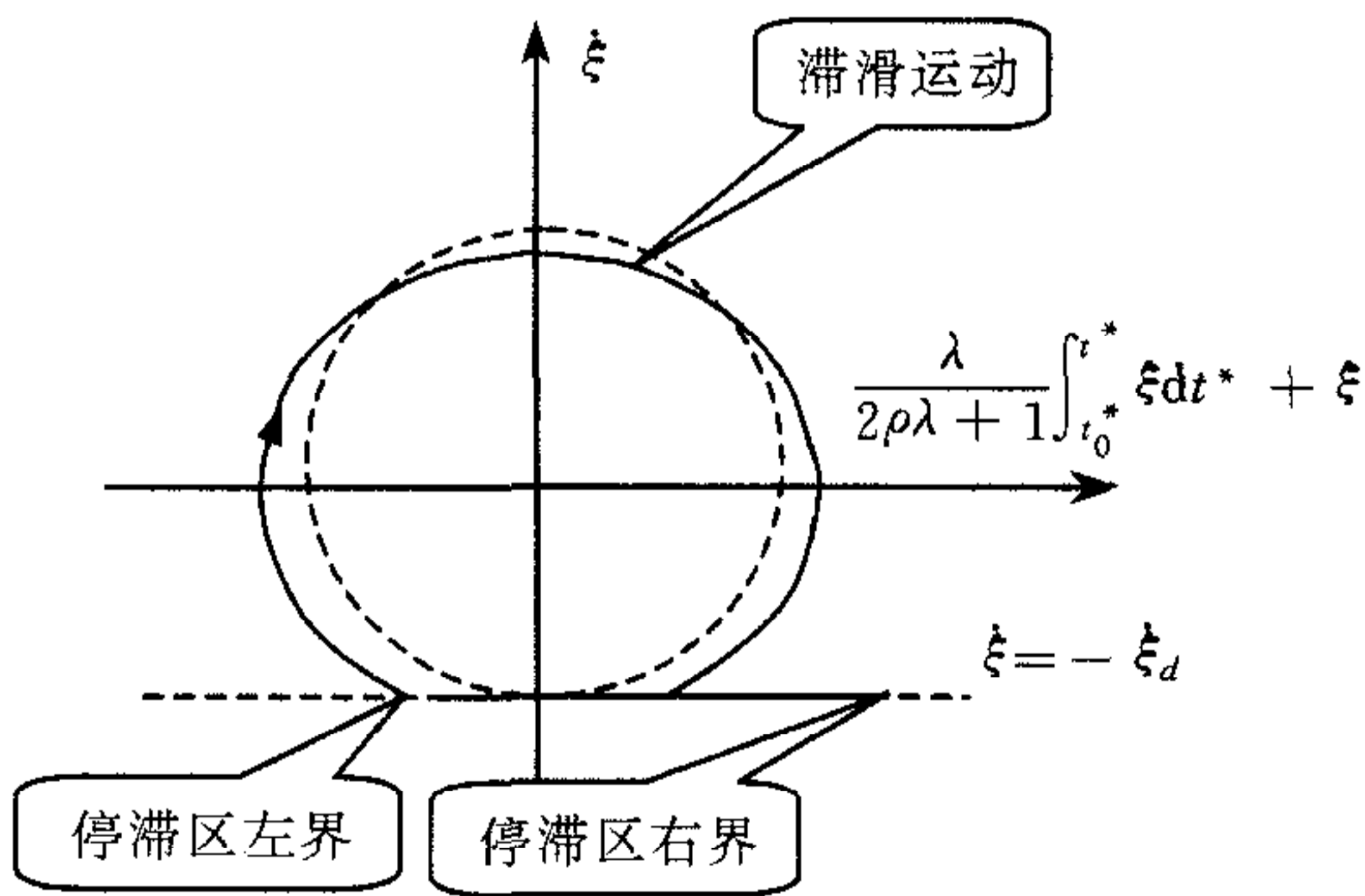


图 1  $TL \leq 0$  条件下系统滞滑平面投影

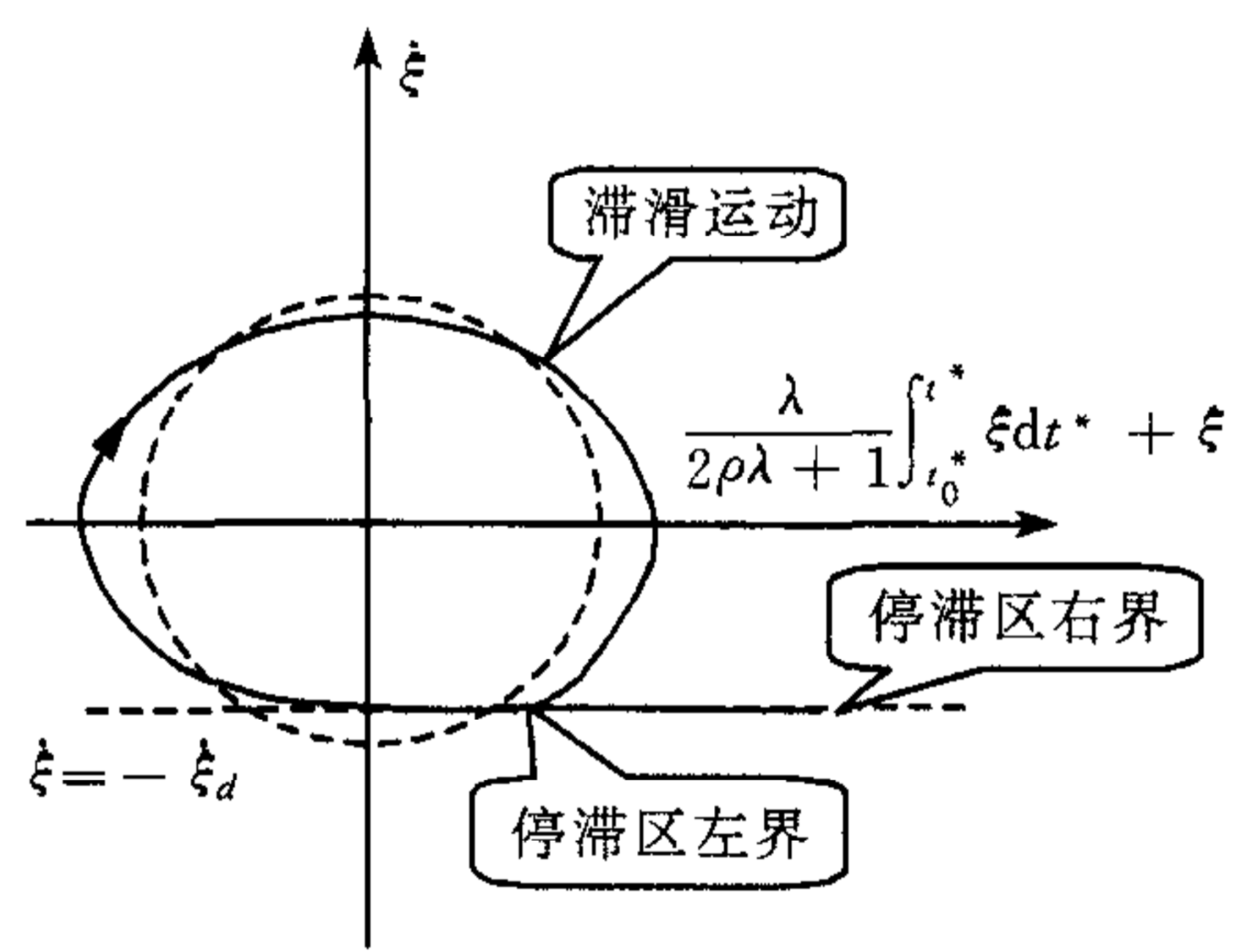


图 2  $TL > 0$  条件下系统滞滑平面投影图

假设系统正处于离开停滞区的边缘, 即停滞区的左界  $X = TL$  分为两种情况: 当  $TL \leq 0$ , 按照图 1 所示实线, 经运动到达  $A_1 = \{(X, Y) \mid 0 < X < TR, Y = -\dot{\xi}_d\}$ , 系统存在滞滑运动; 当  $TL > 0$ , 按照图 2 所示实线, 经运动到达  $A_2 = \{(X, Y) \mid TL < X < TR, Y = -\dot{\xi}_d\}$ , 系统存在滞滑运动. 构造李亚普诺夫函数  $E = X^2 + Y^2$ , 将运动区的轨迹近似看作沿图 1 和 2 中虚线运动, 通过  $E$  在停滞区和运动区消耗关系, 得到如下定理 (篇幅所限过程从简).

**定理 1.** 对于控制系统 (5), 当  $TL \leq 0$ , 如果系统参数和控制参数满足

$$\frac{-4\pi\rho\xi_d^2}{\lambda^2 + 1} + 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M_s^* (1/\sqrt{1 + \lambda^2}) \dot{\xi}_d \cos(t^* + \gamma)}{1 + (\dot{\xi}_d + (1/\sqrt{1 + \lambda^2}) \dot{\xi}_d \cos(t^* + \gamma))^2} dt^* < \left( \frac{M_s^*}{2\rho\lambda + 1} \left( \frac{1}{1 + \xi_d^2} - 1 \right) + \frac{2\rho + \lambda}{2\rho\lambda + 1} \xi_d \right)^2,$$

则系统稳定且不出现滞滑;当  $TL > 0$ , 如果系统参数和控制参数满足

$$\frac{-4\pi\rho}{\lambda^2 + 1}R^2 + 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M_s^* (1/\sqrt{1 + \lambda^2})R \cos(t^* + \gamma)}{1 + (\dot{\xi}_d + (1/\sqrt{1 + \lambda^2})R \cos(t^* + \gamma))^2} dt^* < 0,$$

则系统稳定且不出现滞滑现象. 这里  $\gamma = \arctg(\lambda)$ ,  $R = \sqrt{\dot{\xi}_d^2 + (TL)^2}$ .

### 3 实验研究

以某型高精度伺服控制系统为例分析. 将系统摩擦理论参数  $M_s^* = \frac{M_s}{J\theta_s\omega} = \frac{11.4}{\omega}$ ,  $\lambda = 5$ .

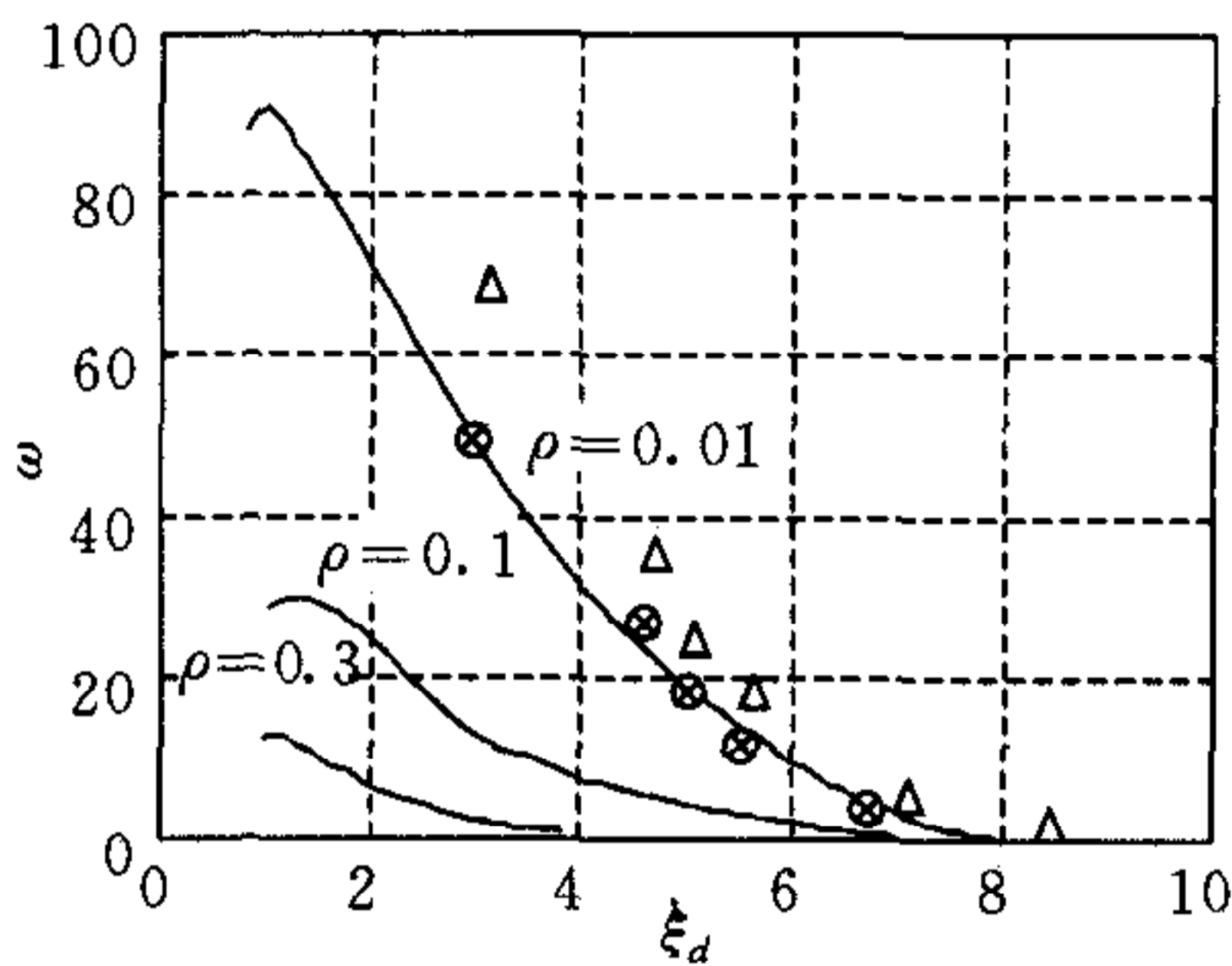


图 3 PID 控制下滞滑运动和稳定关系

令  $\rho = 0.01, 0.1, 0.3$ , 根据定理 1 确定了三条曲线如图 3 所示. 如果确定后的  $\rho, \omega$  和  $\dot{\xi}_d$  对应的点在相应的曲线之下, 则存在滞滑现象; 如果  $\rho, \omega$  和  $\dot{\xi}_d$  对应的点在该界限之上, 则不存在滞滑爬行现象. 测试了实际系统, 限定  $\rho = 0.01$ , 对于不同的  $\dot{\xi}_d$ , 存在滞滑爬行的点表示为  $\otimes$ , 不存在滞滑爬行的点表示为  $\Delta$ . 从  $\otimes$  和  $\Delta$  点的分布走向与  $\rho = 0.01$  的曲线相对比说明定理 1 是正确的.

### 4 结束语

本文得到如下结论: 1) 低速滞滑爬行是介于跟踪稳定与不稳定的临界状态; 2) Stribeck 摩擦是系统低速滞滑的原因; 3) 增大系统阻尼比和转折频率可减少滞滑运动, 定量关系由定理 1 确定; 4) 如果系统带宽大, 实际系统不能近似看作二阶或三阶系统, 而是高阶系统时, 定理 1 的适用性就相对差些.

### 参 考 文 献

- 1 Brian Armstrong *et al.* A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, 1994, **30**(7):1083~1138
- 2 C Canudas de Wit, Astrom K J. A new model for control of systems with friction. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1995, **AC-40**(3):419~424
- 3 Pieere E Dupont, Eric P Dunlap. Friction modeling and PD compensation at very low velocities. *Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control*, 1995, **117**(1):8~14
- 4 Brian Armstrong, Bimal Amin. PID control in the presence of static friction; a comparison of algebraic and describing function analysis. *Automatica*, 1996, **32**(5):679~692

**张锦江** 1999 年在哈尔滨工业大学获得博士学位. 主要研究方向为航天器控制、非线性控制等领域.

**吴宏鑫** 1965 年毕业于清华大学自动化系, 研究员, 自动控制理论与应用博士生导师. 主要研究方向为航天器控制、自适应控制和智能控制等领域.