第 27 卷 第 6 期
2001 年 11 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 6
Nov., 2001

时滞系统的一种低阶 l_1-控制

刘允刚[1] 施颂椒[2] 潘子刚[3] 秦 滨[2]

[1](中国科学院数学与系统科学研究院 北京 100080)

[2](上海交通大学自动化系 上海 200030)

[3](辛辛那提大学电子和计算机工程及计算机科学系 美国)

(E-mail: lygfr@263.net)

摘 要 研究了离散时滞系统的一种低阶 l_1-控制问题.得到了系统可实现状态反馈及输出反馈 l_1-控制的充分条件,并将其转化为线性矩阵不等式(LMI)形式,给出了 l_1-控制的显式表达形式.文中的处理不是转化为无穷维受限优化问题,而是优化 l_1-范数的一上界.尽管得到的是次优 l_1-控制律,但由于它具有确定的结构,故分析和设计过程十分简单.

关键词 时滞系统,低阶 l_1-控制,Riccati 不等式方程,线性矩阵不等式(LMI).

LOW-ORDER l_1-CONTROL FOR SYSTEMS WITH TIME-DELAY

LIU Yun-Gang[1] SHI Song-Jiao[2] PAN Zi-Gang[3] QIN Bin[2]

[1](*Academy of Math. & Syst. Sci., Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

[2](*Depart. of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

[3](*Depart. of Electrical & Comput. Engineering & Comput. Sci., University of Cincinnati, USA*)

(E-mail: lygfr@263.net)

Abstract In this paper, the problem of low-order l_1-control for systems with time-delay is studied. The sufficient condition of the solvability of state-feedback l_1-control and output-feedback l_1-control of the time-delay systems is obtained, and the condition is also transformed into the form of linear matrix inequality (LMI). This paper gives the forms of the solution of l_1-controllers. In this paper, the treatment does not translate the problem into the infinite dimensional constrained optimal problem, but optimizes one upper bound of the induced l_1-norm. Although the l_1-controller of this paper is not optimal, it has fixed structure and the process of analyzing and designing is much simple.

Key words Time-delay systems, low-order l_1-control, Riccati inequality, linear matrix inequality (LMI).

收稿日期 1999-01-13 收修改稿日期 2001-01-09

1 引言

研究扰动对控制系统的影响具有重要意义.实际上,扰动的情况各种各样,有的具有 L_2 衰减性,有的是随机燥声,还有的是 $L_\infty(l_\infty)$ 的[1~3].如果外部扰动建模为有界能量信号,而且性能由输出能量描述,则是 H_∞ 控制问题.如果性能是输出的能量形式,则为 H_2 控制问题.如果外部输入扰动为峰值有界的,性能是输出的最坏峰值,则为 l_1(或 L_1)控制问题[1~3].控制设计的目标之一是系统对外界扰动是否具有抑制性,通过对扰动建模或者适当设计控制律是实现扰动抑制的主要方法.

l_1-控制是 L_1-控制的离散形式. 线性规划是分析和设计 L_1 控制的有效方法[1,2].它是将 L_1 控制问题转化为一无穷维受限凸优化问题.不过,愈是逼近 L_1 最优解,控制器的 McMillan 阶愈高.逼近方法得到的 L_1(或 l_1)控制器是无理的和无穷维的[1,2,4~6].即使得到的是次优控制器,其 McMillan 阶也是非常高的,分析和设计此类控制器很复杂.为了避免设计的复杂性,现提出了不直接最小化 L_1-范数本身,而是最小化 L_1-范数的一上界函数的方法[7].不过所得到的控制器不是近优的,它和最优控制器之间也没有解析联系,但得到的控制器其 McMillan 阶等于系统的阶,从而大大简化了 l_1-控制器分析与设计的复杂性.

本文针对时滞系统,研究了具有 l_∞-扰动时的 l_1-控制问题.得到了闭环系统可实现低阶 l_1-控制的充分条件,并将其转化为 LMI 形式,给出了 l_1-控制的状态反馈及输出反馈的显式表达形式.与逼近方法相比,控制器具有确定的结构,且分析和设计过程十分简单.

2 系统与问题

考虑具有以下描述形式的离散时滞系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A_1\boldsymbol{x}(k) + A_2\boldsymbol{x}(k-d) + B_1\boldsymbol{u}(K) + B_2\boldsymbol{w}(k), \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{u}(k), \\ \boldsymbol{z}(k) = E_1\boldsymbol{x}(k) + E_2\boldsymbol{u}(k). \end{cases} \tag{1}$$

上式中 $\boldsymbol{x}(k)\in R^n$ 为状态向量; $\boldsymbol{u}(k)\in R$ 为控制量; $\boldsymbol{w}(k)$ 为扰动; $\boldsymbol{y}(k)\in R$ 为输出; $\boldsymbol{z}(k)\in R$ 为辅助输出;矩阵 $A_i,C,D,E_i,B_i(i=1,2)$ 具有相应维数; d 为正整数时滞量.系统(1)满足如下假设条件:

1) 系统(1)能控能观测;

2) 系统(1)扰动满足 $\boldsymbol{w}(k)\in\left\{\boldsymbol{w}(\cdot)\,\middle|\,\sum_{k=0}^{N}\|\boldsymbol{w}(i)\|_2^2\leqslant 1,\ N=0,1,\cdots\right\}$.

本文目标是设计状态反馈和输出反馈控制器,使得

1) 无扰动时闭环系统为渐近稳定的;

2) 闭环系统外部扰动输入到辅助输出的 l_∞-增益不大于给定常数 $\gamma>0$,即

$$\|\boldsymbol{z}(k)\|_\infty^2 \leqslant \gamma\|\boldsymbol{w}(k)\|_\infty^2. \tag{2}$$

定义性能指标 $J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=\|\boldsymbol{z}(k)\|_\infty^2-\gamma\|\boldsymbol{w}(k)\|_\infty^2$,即设计控制器 $\boldsymbol{u}_*(k)$,使得

$$J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_*,\boldsymbol{w}_*) = \inf_{\boldsymbol{u}}\sup_{\boldsymbol{w}\in L_\infty}\left[\|\boldsymbol{z}(k)\|_\infty^2 - \gamma\|\boldsymbol{w}(k)\|_\infty^2\right]. \tag{3}$$

如果存在控制器 $\boldsymbol{u}(k)$,使得对任意的 $\boldsymbol{w}(k)$, $J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\leqslant 0$,则称此控制为 l_∞-增益不大于常数 γ 的. 下面的 Schur 补引理在后续分析中用到.

引理[8]. 分块矩阵 $\begin{bmatrix} P & T \\ T^{\mathrm{T}} & Q \end{bmatrix}<0$ 当且仅当 $Q<0$, $P-TQ^{-1}T^{\mathrm{T}}<0$. 对正定矩阵,也有类似的结论.

3 离散时滞系统状态反馈 l_1-控制

首先考虑 l_1-控制器的状态反馈问题. 控制器为 $\boldsymbol{u}(k)=K\boldsymbol{x}(k)$,则闭环系统为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=[A_1+B_1K]\boldsymbol{x}(k)+A_2\boldsymbol{x}(k-d)+B_2\boldsymbol{w}(k)\\ \qquad\qquad =:\bar{A}_1\boldsymbol{x}(k)+A_2\boldsymbol{x}(k-d)+B_2\boldsymbol{w}(k),\\ \boldsymbol{y}(k)=[C+DK]\boldsymbol{x}(k)=:\bar{C}\boldsymbol{x}(k),\\ \boldsymbol{z}(k)=[E_1+E_2K]\boldsymbol{x}(k)=:\bar{E}\boldsymbol{x}(k).\end{cases} \tag{4}$$

离散时滞系统(1)存在 l_1-状态反馈控制的充分条件由下面定理给出.

定理 1. 研究离散时滞闭环系统(4),对给定的衰减系数 $\gamma>0$,如果存在正定矩阵 P,Q 及常数 $\alpha>1$,满足下面的 Riccati 不等式方程

$$\alpha\bar{A}_1^{\mathrm{T}}P\bar{A}_1+\alpha A_2^{\mathrm{T}}(P+P^2)A_2+\alpha Q-P+\bar{A}_1^{\mathrm{T}}PA_2Q^{-1}A_2^{\mathrm{T}}P\bar{A}_1+\alpha^2\bar{A}_1^{\mathrm{T}}PB_2T^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P\bar{A}_1<0,$$

$$\gamma\geqslant\sigma_{\max}([E_1+E_2K]P^{-1}[E_1+E_2K]^{\mathrm{T}}), \tag{5),(6}$$

其中 $T=[(\alpha-1)I-\alpha B_2^{\mathrm{T}}B_2]-\alpha B_2^{\mathrm{T}}PB_2>0$. 则存在 l_∞-增益不大于 γ 的状态反馈控制.

证明(参见文献[9]). 将系统(4)作变换: $\hat{\boldsymbol{x}}(k)=\alpha^{(k-N)/2}\boldsymbol{x}(k)$,则有

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)=\hat{A}_1\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\hat{A}_2\hat{\boldsymbol{x}}(k-d)+\hat{B}_2\boldsymbol{v}(k),\\ \boldsymbol{y}(k)=\hat{C}\hat{\boldsymbol{x}}(k),\\ \boldsymbol{z}(k)=\hat{E}\hat{\boldsymbol{x}}(k),\end{cases} \tag{7}$$

其中 $\hat{A}_1=\alpha^{1/2}\bar{A}_1$, $\hat{A}_2=\alpha^{1/2}\bar{A}_2$, $\hat{B}_2=\alpha^{1/2}\bar{B}_2$, $\hat{E}=\alpha^{-(k-N)/2}\bar{E}$, $\hat{C}=\alpha^{-(k-N)/2}\bar{C}$. 而且 $\boldsymbol{v}(k)=\alpha^{(k-N)/2}\boldsymbol{w}(k)$,从而有 $\boldsymbol{v}(k)\in\left\{\boldsymbol{v}(\cdot):\sum\limits_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{v}(k)\leqslant(\alpha-1)^{-1}\right\}$. 定义系统(7)的 Lyapunov 函数 $W(\hat{\boldsymbol{x}}(k))=\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k)P\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\sum\limits_{i=k-d}^{k-1}\alpha\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(i)Q_1\hat{\boldsymbol{x}}(i)$,其中 P,Q_1 为正定矩阵. 则有

$$\begin{aligned}\Delta W(\hat{\boldsymbol{x}}(k))=&W(\hat{\boldsymbol{x}}(k+1))-W(\hat{\boldsymbol{x}}(k))=\\ &\alpha[\bar{A}_1\hat{\boldsymbol{x}}(k)+A_2\hat{\boldsymbol{x}}(k-d)+B_2\boldsymbol{v}(k)]^{\mathrm{T}}P[\bar{A}_1\hat{\boldsymbol{x}}(k)+A_2\hat{\boldsymbol{x}}(k-d)+B_2\boldsymbol{v}(k)]-\\ &\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k)P\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\alpha\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k)Q_1\hat{\boldsymbol{x}}(k)-\alpha\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k-d)Q_1\hat{\boldsymbol{x}}(k-d)\leqslant\\ &\alpha\{\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k)[\bar{A}_1^{\mathrm{T}}P\bar{A}_1+Q_1-\alpha^{-1}P]\hat{\boldsymbol{x}}(k)+2\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k)\bar{A}_1^{\mathrm{T}}PA_2\hat{\boldsymbol{x}}(k-d)+\\ &\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k-d)A_2^{\mathrm{T}}PA_2\hat{\boldsymbol{x}}(k-d)2\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k)\bar{A}_1^{\mathrm{T}}PB_2\boldsymbol{v}(k)+2\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k-d)A_2^{\mathrm{T}}PB_2\boldsymbol{v}(k)+\\ &\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(k)B_2^{\mathrm{T}}PB_2\boldsymbol{v}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k-d)Q_1\hat{\boldsymbol{x}}(k-d)\}.\end{aligned}$$

如果 $Q=Q_1-A_2^{\mathrm{T}}(P+P^2)A_2>0$, 则 $Q_1=A_2^{\mathrm{T}}(P+P^2)A_2+Q$. 从而

$$\begin{aligned}\Delta W(\hat{\boldsymbol{x}}(k))\leqslant&2\alpha\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k)\bar{A}_1^{\mathrm{T}}PB_2\boldsymbol{v}(k)+\alpha\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(k)B_2^{\mathrm{T}}(P+I)B_2\boldsymbol{v}(k)-\alpha^2\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(k)\bar{A}_1^{\mathrm{T}}PB_2T^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P\bar{A}_1\hat{\boldsymbol{x}}(k)=\\ &-[\alpha B_2P\bar{A}_1\hat{\boldsymbol{x}}(k)-T\boldsymbol{v}(k)]^{\mathrm{T}}T^{-1}[\alpha B_2P\bar{A}_1\hat{\boldsymbol{x}}(k)-T\boldsymbol{v}(k)]+(\alpha-1)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{v}(k)\leqslant\\ &(\alpha-1)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{v}(k).\end{aligned} \tag{8}$$

对上式累加，有 $W(\hat{\boldsymbol{x}}(N)-W(\hat{\boldsymbol{x}}(0))\leqslant\sum_{i=0}^{N}(\alpha-1)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{v}(i)\leqslant 1$. 如果 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=0$，因为 $\boldsymbol{x}(N)=\hat{\boldsymbol{x}}(N)$，从而有 $W(\boldsymbol{x}(N))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N)P\boldsymbol{x}(N)\leqslant 1$, $\forall N>0$. 故

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{z}(N)\|_2^2 = \|[E_1+E_2K]\boldsymbol{x}(N)\|_2^2 \leqslant \sup_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\leqslant 1}\|[E_1+E_2K]\boldsymbol{x}\|_2^2 = \\
\sup_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant 1}\|[E_1+E_2K]P^{-1/2}\boldsymbol{x}\|_2^2 = \\
\sigma_{\max}(P^{-1/2}[E_1+E_2K]^{\mathrm{T}}[E_1+E_2K]P^{-1/2}) = \\
\sigma_{\max}([E_1+E_2K]P^{-1}[E_1+E_2K]^{\mathrm{T}}),
\end{aligned}
$$

并注意到

$$
J(\boldsymbol{x},K\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\leqslant\sigma_{\max}([E_1+E_2K]^{\mathrm{T}}P^{-1}[E_1+E_2K])\cdot\|\boldsymbol{w}(k)\|_\infty^2-\gamma\|\boldsymbol{w}(k)\|_\infty^2, \tag{9}
$$

如果 $\gamma\geqslant\sigma_{\max}([E_1+E_2K]P^{-1}[E_1+E_2K]^{\mathrm{T}})$，则闭环系统的 l_∞-增益不大于常数 γ 的.

由式(8)易证闭环系统无扰动时的渐近稳定性. 证毕.

可将上述充分性条件转化为 LMI 形式，进而采用 LMI 技术求解系统的 l_1-状态反馈控制.

如果 $B_1B_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，而且取控制律为 $\boldsymbol{u}(t)=B_1^{\mathrm{T}}P^{-1}V\cdot\boldsymbol{x}(t)$，其中 V 为对称矩阵，则式(5)，(6)可化为下面的 LMIs

$$
\begin{bmatrix}
M(P,V) & \begin{bmatrix} V\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}V & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}P & & & \\ & I & & \\ & & I & \\ & & & I\end{bmatrix}
\end{bmatrix}<0, \tag{10}
$$

其中

$$
M(P,V)=\begin{bmatrix}-P+\alpha Q & & & \\ & -Q & & \\ & & -I & \\ & & & -(\alpha-1)I+\alpha B_2^{\mathrm{T}}B_2\end{bmatrix}+
$$

$$
\alpha\begin{bmatrix}
\begin{matrix}A_1^{\mathrm{T}}PA_1+A_2^{\mathrm{T}}PA_2+B_2^{\mathrm{T}}PB_2+\\ A_1^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}V+V\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}A_1\end{matrix} & \left(A_1^{\mathrm{T}}P+V\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}\right)\alpha^{-1/2}A_2 & 0 & \left(A_1^{\mathrm{T}}P+V\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}\right)B_2 \\
\alpha^{-1/2}A_2^{\mathrm{T}}\left(PA_1+\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}V\right) & 0 & & \\
0 & & 0 & \\
B_2^{\mathrm{T}}\left(PA_1+\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}V\right) & & & 0
\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} -
$$

$$\alpha\begin{bmatrix} B_2 & & & \\ & \alpha^{-1/2}A_2 & B_2 & \\ & & I & \\ & & & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\cdot\begin{bmatrix} P & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} B_2 & & & \\ & \alpha^{-1/2}A_2 & B_2 & \\ & & I & \\ & & & 0 \end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix} 0 & A_2^{\mathrm{T}} & & \\ & 0 & & \\ & & I & \\ & & & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} P & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ A_2 & I & & \\ & & & 0 \end{bmatrix}+$$

$$\alpha\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & B_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} P & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & B_2 \end{bmatrix}-\alpha\begin{bmatrix} A_2^{\mathrm{T}} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} P & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & P \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A_2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

而且 $M(P,V)<0$ 为关于 P,V 的线性矩阵不等式. 式(10)转化为

$$\begin{bmatrix} \gamma I & E_1+E_2B_1^{\mathrm{T}}P^{-1}V \\ E_1^{\mathrm{T}}+VP^{-1}B_1E_2^{\mathrm{T}} & P_1 \end{bmatrix}\geqslant 0\,. \tag{11}$$

式(10)，(11)是闭环系统存在 l_1 控制的条件，可以通过现有的 LMI 技术求解 P 及 V，进而设计出状态反馈 l_1-控制器. 上面的讨论可用如下定理概述.

定理 2. 考虑离散时滞系统(1)的 l_1-控制. 对给定的衰减系数 $\gamma>0$，如果存在正定矩阵 P 及对称矩阵 V 满足上面的 LMIs(10)及(11)，则状态反馈 l_1-控制律为 $\boldsymbol{u}(k)=B_1^{\mathrm{T}}P^{-1}V\boldsymbol{x}(k)$.

4　离散时滞系统输出反馈 l_1-控制

输出反馈情况较状态反馈情况更有意义. 设计如下输出反馈控制器

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_c(k+1)=A_c\boldsymbol{x}_c(k)+B_c\boldsymbol{y}(k), \\ \boldsymbol{u}(k)=C_c\boldsymbol{x}_c(k). \end{cases} \tag{12}$$

这里 $\boldsymbol{x}_c(k)\in R^n$ 为状态估计；A_c,B_c,C_c 为控制器参数矩阵. 则闭环离散时滞系统为

$$\begin{cases} X(k+1)=\widetilde{A}_1X(k)+\widetilde{A}_2X(k-d)+\widetilde{B}_2\boldsymbol{w}(k), \\ \boldsymbol{y}(k)=\widetilde{C}X(k), \\ \boldsymbol{z}(k)=\widetilde{E}X(k), \end{cases} \tag{13}$$

其中 $X(k)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\ \ \boldsymbol{x}_c^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{A}_1=\begin{bmatrix} A_1 & B_1DC_c \\ B_cC & A_c+B_cDC_c \end{bmatrix}$，$\widetilde{A}_2=\begin{bmatrix} A_2 & \\ & 0 \end{bmatrix}$，$\widetilde{B}_2=\begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\widetilde{C}=[C\ \ DC_c]$，$\widetilde{E}=[E_1\ \ E_2C_c]$. 又记 $e(k)=\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}_c(k)$，$\hat{X}(k)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k),\ e^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{cases} \hat{X}(k+1)=\hat{A}_1\hat{X}(k)+\hat{A}_2\hat{X}(k-d)+\hat{B}_2\boldsymbol{w}(k), \\ \boldsymbol{y}(k)=\hat{C}\hat{X}(k), \\ \boldsymbol{z}(k)=\hat{E}\hat{X}(k), \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\hat{A}_1=\begin{bmatrix} A_1+B_1DC_c & -B_1DC_c \\ A_1-A_c-B_cDC_c+B_1DC_c-B_cC & A_c+B_cDC_c-B_1DC_c \end{bmatrix}$，$\hat{A}_2=\begin{bmatrix} A_2 & \\ & 0 \end{bmatrix}$，$\hat{B}_2=\begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\hat{C}=[C+DC_c\ \ -DC_c]$，$\hat{E}=[E_1+E_2C_c\ \ -E_2C_c]$.

离散时滞系统(1)存在输出反馈控制器的充分条件由如下定理描述.

定理 3. 对离散时滞闭环系统(14)，给定的衰减系数 $\gamma>0$，如果存在正定矩阵 P,Q 及常数 $\alpha>1$，满足下面的 Riccati 不等式方程组

$$\alpha\hat{A}_1^{\mathrm{T}}P\hat{A}_1+\alpha\hat{A}_2^{\mathrm{T}}(P+P^2)\hat{A}_2+\alpha Q-P+\hat{A}_1^{\mathrm{T}}P\hat{A}_2Q^{-1}\hat{A}_2^{\mathrm{T}}P\hat{A}_1+\alpha^2\hat{A}_1^{\mathrm{T}}P\hat{B}_2T^{-1}\hat{B}_2^{\mathrm{T}}P\hat{A}_1<0,$$

$$\gamma\geqslant\sigma_{\max}(\hat{E}P^{-1}\hat{E}^{\mathrm{T}}),\qquad(15),(16)$$

其中 $T=(\alpha-1)I-\alpha\hat{B}_2\hat{B}_2^{\mathrm{T}}-\alpha\hat{B}_2^{\mathrm{T}}P\hat{B}_2$. 则存在 l_∞-增益不大于给定正 γ 的输出反馈控制.

证明. 类同于定理 2.

下面基于定理 3 给出的充分性条件,研究输出反馈 l_1-控制器的设计问题.

设 $P=\begin{bmatrix}P_1 & \\ & P_1\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}Q_1 & \\ & Q_1\end{bmatrix}$,则式(15)可转化为

$$\begin{aligned}&\alpha[A_1+B_1DC_c]^{\mathrm{T}}P_1[A_1+B_1DC_c]+\alpha[A_1-A_c-B_cDC_c-B_cC]^{\mathrm{T}}P_1[A_1-A_c-\\&B_cDC_c+B_1DC_c-B_cC]+\alpha A_2^{\mathrm{T}}(P_1+P_1^2)A_2+[A_1+B_1DC_c]^{\mathrm{T}}P_1A_2Q_1^{-1}A_2^{\mathrm{T}}P_1[A_1+\\&B_1DC_c]+\alpha[A_1+B_1DC_c]^{\mathrm{T}}P_1B_2\Pi^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P_1[A_1+B_1DC_c]+\alpha Q_1-P_1\leqslant 0,\\&\Pi=[(\alpha-1)I+B_2B_2^{\mathrm{T}}-\alpha B_2^{\mathrm{T}}P_1B_2],\\&\alpha[A_1+B_1DC_c]^{\mathrm{T}}P_1[-B_1DC_c]+\\&[A_1-A_c-B_cDC_c+B_1DC_c-B_cC]^{\mathrm{T}}P_1[A_c+B_cDC_c-B_1DC_c]=0,\end{aligned}\qquad(17)$$

$$[B_1DC_c]^{\mathrm{T}}P_1[B_1DC_c]+[A_c+B_cDC_c-B_1DC_c]^{\mathrm{T}}P_1[A_c+B_cDC_c-B_1DC_c]+\alpha Q_1-P_1<0.\qquad(18)$$

由等式(17)得到

$$\begin{cases}\alpha[A_1+B_1DC_c]=A_1-A_c-B_cDC_c+B_1DC_c-B_cC,\\ B_1DC_c=A_c+B_cDC_c-B_1DC_c.\end{cases}\qquad(19)$$

如果 $CC^{\mathrm{T}}=I$, $DD^{\mathrm{T}}=I$, $B_1B_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}$, 则有

$$B_c=-(\alpha-1)A_1C^{\mathrm{T}}-(\alpha+1)B_1DC_cC^{\mathrm{T}},\qquad(20)$$

$$A_c=2B_1DC_c+(\alpha-1)A_1C^{\mathrm{T}}DC_c+(\alpha+1)B_1DC_cC^{\mathrm{T}}DC_c.\qquad(21)$$

取 $C_c=D^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}P_1^{-1}V$, 则式(15)等价于下面的线性矩阵不等式(LMI)

$$\begin{bmatrix}M(P_1,V) & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}V & \\ & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}V\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix} & \\ & 0\end{bmatrix} & -[\alpha((\alpha-1)^2+1)]^{-1}\begin{bmatrix}P_1 & \\ & I\end{bmatrix}\end{bmatrix}<0,\qquad(22)$$

其中 $M(P_1,Q)$似前定义, 而且 $N(P,V)<0$ 为关于 P, V 的 LMI. 式(18)转化为

$$\begin{bmatrix}\alpha Q_1-P_1 & \begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}V\\ V\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix} & -0.5P_1\end{bmatrix}\leqslant 0,\qquad(23)$$

而且满足关系式

$$\begin{bmatrix}\gamma I & [E_1+E_2D^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}\quad -E_2D^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}]\\ [E_1+E_2D^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}\quad -E_2D^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} & P_1\end{bmatrix}\geqslant 0.\qquad(24)$$

定理 4. 对离散时滞系统(1),给定的衰减系数 $\gamma>0$,如果存在正定矩阵 P_2 及 V 满足上

面的 LMIs(22),(23)及关系式(24),则输出反馈 l_1-控制律为

$$\begin{aligned} x_c(k+1) = & \left\{2\begin{bmatrix} I & \\ & 0\end{bmatrix}P_1^{-1}V + (\alpha-1)A_1C^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} I & \\ & 0\end{bmatrix}P_1^{-1}V + \right. \\ & \left.(\alpha+1)\begin{bmatrix} I & \\ & 0\end{bmatrix}P_1^{-1}VC^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} I & \\ & 0\end{bmatrix}P^{-1}V\right\}x_c(k+1) + \\ & \left[(\alpha-1)A_1C^{\mathrm{T}} + (\alpha+1)\begin{bmatrix} I & \\ & 0\end{bmatrix}P_1^{-1}VC^{\mathrm{T}}\right]y(k), \end{aligned} \tag{25}$$

$$u(k) = D^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}P_1^{-1}Vx_c(k). \tag{26}$$

5 结论

本文研究了离散时滞系统的低阶 l_1-状态反馈及输出反馈控制问题,得到了系统可实现 l_1-反馈控制的充分条件. 最优 l_1-控制器是无穷维的. 采用逼近方法,得到的是次优控制器,但其维数仍然很高,分析与设计都很复杂. 本文通过优化 l_1-范数的上界,所得到的 l_1-控制器具有确定的结构,而且与系统同阶,降低了分析与设计的复杂性. 本文还将得到的条件转化为线性矩阵不等式组(LMIs)解的存在性,并据此给出了 l_1-反馈控制的设计形式.

参 考 文 献

1 Dahleh M A, Person J B. L_1-optimal compensation for feedback continuous time systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1987, **AC-32**(4):889～895

2 Dahleh M A, Person J B. l_1-optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1987, **AC-32**(2):314～322

3 Vidyasagar M. Optimal rejection of persistent bounded disturbances. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1986, **AC-31**(3):527～535

4 Salapaka M V, Dahleh M, Voulgaris P. Mixed objective control synthesis: Optimal H_2/l_1 control. *SIAM J. Control Optim.*, 1997, **35**(5):1672～1789

5 Sznaier M. A mixed l_∞/H_∞ optimization approach to robust controller design. *SIAM J. Control Optim.*, 1995, **33**(4):1086～1101

6 Wang Z Q. L_∞ optimal control of SISO continuous-time systems. *Automatica*, 1997, **33**(1):85～90

7 Nagpal K, Abedor J, Poolla K. An LMI approach to peak-to-peak gain minimization: Filtering and control. In: Proceedings of ACC, 1994. 741～746

8 Boyd S, Ghaoui L E, Feron E. Linear matrix inequalities in system and control theory. *SIAM*, 1994

9 Haddad W M, Chellaboina V S. Mixed-norm H_2/L_1 controller synthesis via fixed-order dynamics compensation: A Riccati equation approach. *Int. J. Control*, 1998, **71**(1):35～59

刘允刚　中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所博士后. 研究方向为鲁棒控制、随机控制等.

施颂椒　上海交通大学自动化系教授,博士生导师. 研究方向为鲁棒控制、自适应控制.

潘子刚　美国加洲大学圣巴巴拉分校博士后,现任美国辛辛那提大学电子和计算机工程及计算机科学系教授. 研究方向为鲁棒控制、自适应控制及随机控制等.