第 27 卷 第 5 期
2001 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 5
Sept., 2001

闭环系统的 Riesz 基生成问题[1)]

王耀庭[1] 李胜家[1] 李 录[2]

[1](山西大学数学系 太原 030006)

[2](山西大学物理系 太原 030006)

(E-mail: sjli@mail.sxu.edu.cn)

摘 要 研究无穷维线性系统的本征值分布以及系统广义本征元的 Riesz 基生成问题. 对于输入、输出空间均是无限维空间和输入、输出算子均是无界算子的闭环系统，采用基扰动的方法，给出了系统广义本征元生成 Riesz 基的充分条件；并以实例说明了结论的应用.

关键词 闭环系统，输入(出)空间，Riesz 基.

A PROBLEM ON RIESZ BASIS FORMED BY A CLOSED-LOOP SYSTEM

WANG Yao-Ting[1] LI Sheng-Jia[1] LI Lu[2]

[1](*Department of Mathematics, Shanxi University, Taiyuan* 030006)

[2](*Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan* 030006)

(E-mail: sjli@mail.sxu.edu.cn)

Abstract In this paper, we deal with the spectrum and Riesz basis of infinite dimensional linear systems with infinite dimensional input-output state spaces and unbounded input-output operators. Using perturbation theory for basis, we give a sufficient condition which ensures all the generalized eigenvectors of the system to form a Riesz basis. A typical example is presented to illustrate the application of our result.

Key words Closed-loop system, output-input spaces, Riesz basis.

1 引言

本文使用无条件基扰动的方法研究无穷维线性系统的本征值及广义本征元的 Riesz 基生成问题. 众所周知，Riesz 基生成问题在分布参数控制系统的研究中有着重要的应用. 以前的结果大多对输入、输出算子是有界的情形进行讨论，所得结果可用于带分布阻尼的梁振动方程等问题的研究. 然而边界控制问题是分布参数系统理论研究中一类更有意义的控制问题，无界算子的无条件基扰动理论可为解决这一问题提供一条途径. 目前国内外对这一问题的研究还限于有限秩算子. 本文对无限秩算子扰动给出了一个 Riesz 基生成的充分条件，拓

1) 国家自然科学基金(69674011)、山西省自然科学基金和山西省留学归国基金资助.

收稿日期 1999-01-05 收修改稿日期 2000-08-25

宽了基扰动理论的应用范围.

设$(X,\|\cdot\|)$是可析 Hilbert 空间；线性算子 A 是 X 上 C_0-半群$\{S(t);t\geqslant 0\}$的无穷小母元；输入(输出)空间$(U,\|\cdot\|_U)$是可析 Hilbert 空间. 考察闭环系统

$$X(t)=AX(t)+Bu(t),\quad u(t)=CX(t),\tag{1}$$

这里 $X(t)\in X$，$u(t)\in L^2_{\mathrm{loc}}[(0,+\infty),U]$，输入、输出算子 B,C 是线性算子. 本文设算子 A 的豫解算子紧，本征对(λ_n,ϕ_n)是简单的且$\{\phi_n,n\in N\}$生成 X 的 Riesz 基. 由于可以建立等价的内积使$\{\phi_n,n\in N\}$正交，不妨设$\{\phi_n,n\in N\}$是 X 的标准正交基.

设 $\lambda_0\in\rho(A)$，用$(X_{-1},\|\cdot\|_{-1})$表示 X 按范数 $\|\cdot\|_{-1}=\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\cdot\|$ 的完备化 Hilbert 空间；$(X_1,\|\cdot\|_1)$表示 $D(A)$依范数 $\|\cdot\|_1=\|(\lambda_0-A)\cdot\|$ 所成的 Hilbert 空间，则 $X_1\subset X\subset X_{-1}$. 算子 A 在 X_{-1}上的延拓以及在 X_1 上的限制仍用符号 A 表示，则有 $A\in L(X_1,X)\cap L(X_1,X_{-1})$[1]. 当 $U=R^1$ 时系统(1)的生成算子 $A_K=A+BC$ 的本征元 Riesz 基生成问题已被广泛研究，其深刻结果可以应用在无穷维分布参数系统的标量控制上，如文献[2～6]. 本文将把上述研究推广到一般 Hilbert 空间 U 以及无界输入、输出算子 B,C.

设 $B\in L(U,X_{-1})$，$C\in L(X_1,U)$. 算子 C 的 Lebesque 延拓[7] C_L 以及算子 A_K 定义如下：

$$C_L x=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}S(t)x\mathrm{d}t,\quad D(C_L)=\left\{x\in X;\ \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}S(t)x\mathrm{d}t\text{ 存在}\right\};\tag{2}$$

$$A_K=A+BC_L,\qquad D(A_K)=\{x\in X;\ Ax+BC_Lx\in X\}.\tag{3}$$

记 $b_n(v)=\langle Bv,\phi_n\rangle_{X_{-1}\times X_1}(v\in U,n\in N)$，易知 $b_n\in U^*$(U 的共轭空间). 仍用符号 b_n 表示它在 U^* 中的范数，且记 $c_n=\|C\phi_n\|_U,n\in N$. 下面是本文的主要结论.

定理. 设 $A\in L(X_1,X)\cap L(X,X_{-1})$，$B\in L(U,X_{-1})$，$C\in L(X_1,X)$，$C_L$ 以及 A_k 如式(2)，(3)定义，如果 b_n,c_n,λ_n 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_k^2c_n^2}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1,n\neq k}^{\infty}\frac{b_k^2c_n^2}{|\lambda_k-\lambda_n|^2}<+\infty,\tag{4}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_kc_k}{|\lambda_n-\lambda_k|}\leqslant\frac{1}{13},\tag{5}$$

则算子 A_K 的广义本征元生成空间 X 的 Riesz 基.

2　引理及定理的证明

以下总假定定理的条件成立.

引理 1. i) $(\lambda I-A)^{-1}BU\subset D(C_L)$，$(\lambda\in\rho(A))$；ii) $L(U)$-值函数 $H(\lambda)=C_L(\lambda I-A)^{-1}B$ 在 $\rho(A)$上解析.

引理 1 的证明见附录 A. 直接验算可得

引理 2. 若 $\lambda\in\rho(A)$满足 $1\notin\sigma(H(\lambda))$，则 $\lambda\in\rho(A_K)$且

$$(\lambda I-A_k)^{-1}=(\lambda I-A)^{-1}+(\lambda I-A)^{-1}B(I-H(\lambda))^{-1}C_L(\lambda I-A)^{-1}.\tag{6}$$

由式(5)直接计算可得

引理 3. 记 $d_n=\min\limits_{k\neq n}|\lambda_n-\lambda_k|$，$(n\in N)$，则存在自然数 N_1，使当 $n>N_1$ 时，有

$$12b_nc_n\leqslant d_n,\quad n>N_1. \tag{7}$$

引理 4. 记 $r_n=6b_nc_n(b_nc_n\neq 0)$，或 $r_n=\frac{1}{3}d_n(b_nc_n=0)$，$\Omega_n=\{\lambda;|\lambda-\lambda_n|\leqslant r_n\}$，$\Gamma_n=\partial\Omega_n$，则存在 $N_2>N_1$，使当 $n>N_2$ 时，$\max\limits_{\lambda\in\Gamma_n}\|H(\lambda)\|\leqslant\frac{1}{3}$；且 $\lambda\in\bar{\Omega}\backslash\{\lambda_n\}$时，$H(\lambda)$是 U 上紧算子.

引理 4 的证明见附录 B.

引理 5. A_k 有紧的豫解算子.

引理 6. 存在 $N_3\geqslant N_2$，使当 $n>N_3$ 时，A_K 在 Ω_n 内有唯一的简单本征元 μ_n.

引理 6 的证明见附录 C. 以下是本文主要定理的证明.

证明将分两步. I) 取 $n\geqslant N_3$. 当 $\mu_n\neq\lambda_n$ 时，由引理 2，引理 4 及引理 6 可知：存在 $v_n\in U$，$\|v_n\|_U=1$，使 $H(\mu_n)v_n=v_n$. 易知 $(\mu_nI-A)^{-1}Bv_n$ 是 A_K 相应与 μ_n 的本征元. 由式(A2)，注意到 $1=\|v_n\|_U=\|H(\mu_n)v_n\|_U$，因此有

$$1=\|H(\mu_n)v_n\|_U\leqslant\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_kc_k}{|\mu_n-\lambda_k|}+\frac{|b_n(v_n)|}{|\mu_n-\lambda_n|}c_n\leqslant 2\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_kc_k}{|\lambda_n-\lambda_k|}+\frac{|b_n(v_n)c_n|}{|\mu_n-\lambda_n|}.$$

因此当 $n>N_3$ 时，注意到式(5)，有 $b_n(v_n)\neq 0$ 且 $|\mu_n-\lambda_n|\leqslant\frac{6}{5}|b_n(v_n)|c_n$. 从而 A_K 有本征元 $\Psi_n=\frac{\mu_n-\lambda_n}{b_n(v_n)}(\mu_n-A)^{-1}Bv_n=\phi_n+\frac{\mu_n-\lambda_n}{b_n(v_n)}\sum\limits_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_k(v_n)}{\mu_n-\lambda_n}\phi_k$. 注意到 $\mu_n\in\Omega_n$，因此有

$$\|\psi_n-\phi_n\|^2=\left|\frac{\mu_n-\lambda_n}{b_n(v_n)}\right|^2\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{|b_n(v_n)|^2}{|\mu_n-\lambda_k|^2}\leqslant\left(\frac{6}{5}\right)^2\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_n^2c_n^2}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}. \tag{8}$$

当 $\mu_n=\lambda_n$ 时，记 $\psi=\sum\alpha_k\phi_k(\in X)$是 A_K 相应的本征元. 记$v=C_L\psi$，且不妨设 $\|v\|_U=1$(当$v=0$时，易知 ϕ_n 是相应的本征元)，$Bv=BC_L\psi=\sum b_k(v)\phi_k(\in X_{-1})$. 由 $A_K\psi=A\psi+BC_L\psi=\mu_n\psi$ 可以得到$(\lambda_n-\lambda_k)\alpha_k=b_k(v)(k=1,2,\cdots)$. 因此有 $b_n(v)=0$，$\alpha_k=\frac{b_k(v)}{\lambda_n-\lambda_k}(k\neq n)$. 另一方面，取 $\lambda\in\Omega_n\backslash\{\lambda_n\}$，由式(A2)并注意到 $b_n(v)=0$ 知 $H(\lambda)$ 在 Ω_n 中解析. 记 $H(\lambda_n)v=\sum\limits_{k=1,k\neq n}\frac{b_k(v)C\phi_k}{\lambda_n-\lambda_k}$，由引理 3 可以得到 $\|H(\lambda_n)v\|_U\leqslant\frac{1}{3}$，从而 $\|v-H(\lambda_n)v\|_U\geqslant\frac{2}{3}$. 其次，由于 $\psi=\alpha_n\phi_n+\sum\limits_{k=1,k\neq n}\frac{b_k(v)}{\lambda_n-\lambda_k}\phi_k$，因此 $C_L\psi=v=\alpha_nC\phi_n+\sum\limits_{k=1,k\neq n}\frac{b_k(v)C\phi_k}{\lambda_n-\lambda_k}=\alpha_nC\phi_n+H(\lambda_n)v$，即：$\alpha_nC\phi_n=(v-H(\lambda_n)v)$. 从而有 $|\alpha_n|c_n\geqslant\frac{2}{3}$. 记 $\psi_n=\phi_n+\frac{1}{\alpha_n}\sum\limits_{k=1,k\neq n}\frac{b_k(v)}{\lambda_n-\lambda_k}\phi_k$，则 ψ_k 是 A_K 相应于 λ_n 的本征元，且 $\|\psi_n-\phi_n\|=\frac{1}{|\alpha_n|^2}\sum\limits_{k=1,k\neq n}\frac{b_k^2}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^2\sum\limits_{k=1,k\neq n}\frac{b_k^2c_n^2}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}$. 结合式(8)知存在 $M>0$，使得

$$\sum_{n>N_3}^{\infty}\|\psi_n-\phi_n\|^2=M\sum_{n>N_3}^{\infty}\sum_{k=1,k\neq n}\frac{b_n^2c_n^2}{|\lambda_n-\lambda_n|^2}<\infty. \tag{9}$$

II) 记 $\sigma_\infty(A_K^*)=\{f\in X;(\lambda I-A_K^*)^{-1}f$ 是整函数$\}$，注意到 A_K^* 的预解算子紧，由文献[8,p2295]知：$\dim\sigma_\infty(A_K^*)=0$ 或∞，记 span A_K 为 A_K 的广义本征元张成的线性子空间，则$(\mathrm{span}\,A_K)^\perp=\sigma_\infty(A_K^*)$[8,p2355]. 若$(\mathrm{span}\,A_K)^\perp\neq\{0\}$，取$(\mathrm{span}\,A_K)^\perp$中的向量 $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2,\cdots,\tilde{\varphi}_{N_3}$线

性无关,易知$\{\widetilde{\varphi}_n;\ n=1,2,\cdots,N_3\}\cup\{\psi_n;n>N_3\}$是 ω-线性无关的. 由式(9)可以得到 $\sum\limits_{n=1}^{N_3}\|\widetilde{\varphi}_n-\phi_n\|^2+\sum\limits_{n>N_3}^{\infty}\|\psi_n-\phi_n\|^2<+\infty$. 根据 Bair 定理[9]可知,$\{\widetilde{\varphi}_n;n\leqslant N_3\}\cup\{\psi_n;n>N_3\}$是 X 的 Riesz 基. 从而 $\dim\sigma_\infty(A_K^*)=\dim(\mathrm{span}\,A_K)^\perp=N_3$ 矛盾. 因此$\mathrm{span}\,A_{\overline{K}}=X$. 同样由式(9)及 Bair 定理可知 A_K 的广义本征元生成空间 X 的 Riesz 基.

3 实例

设 $X=\{(u,v)^{\mathrm{T}}\in H^2(0,1)\times L^2(0,1);\ u(0)=u'(1)=0\}$. 则 X 按内积

$$((u_1,v_1)^{\mathrm{T}},(u_2,v_2)^{\mathrm{T}})=\int_0^1[u_1''\overline{u_2''}+v_1\bar{v}_2]\mathrm{d}x$$

成为 Hilbert 空间. 考察算子

$$A_K=\begin{pmatrix}0 & I\\ -\dfrac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} & 0\end{pmatrix},\tag{10a}$$

$$\begin{aligned}D(A_K)=\{&(u,v)^{\mathrm{T}}\in H^4(0,1)\times H^2(0,1);\\ &u(0)=u'(1)=u''(0)=u'''(1)=0,\ u'''(s^+)-u'''(s^-)=-Kv(s)\},\end{aligned}\tag{10b}$$

其中 $K>0,s\in(0,1)$, $u'''(s^\pm)=\lim\limits_{x\to s\pm}u'''(x)$. 算子 A_K 与两根梁在接点 s 处的反馈控制系统有关. 文献[10]利用频域方法已经证明了算子 A_K 生成的半群 $S_K(t)$是指数稳定的. 但数学和工程人员感兴趣的有关 Riesz 基的生成和增长价的确定问题并没有解决,而应用本文的定理可以解决这一问题.

设算子 A 由矩阵(10a)定义,其定义域为

$$D(A)=\{(u,v)^{\mathrm{T}}\in H^4(0,1)\times H^2(0,1);\ u(0)=u'(1)=u''(0)=u'''(1)=0\}.$$

易知算子 A 是反自伴的(即 $A=-A^*$)且有紧的预解算子. 记 $\lambda_{\pm k}=\pm i\left(|k|-\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2$; $\phi_{\pm k}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\lambda_{\pm k}}\sin\left(|k|-\dfrac{1}{2}\right)\pi x,\ \sin\left(|k|-\dfrac{1}{2}\right)\pi x\right)^{\mathrm{T}}$,$(k=1,2,\cdots)$,则 $\phi_{\pm k}$是 A 相应于 $\lambda_{\pm k}$的简单本征元且它们生成空间 X 的一组标准正交基. 设 $C(u,v)^{\mathrm{T}}=v(s)$, $B(x)=(0,\delta(x-s))^{\mathrm{T}}$. 则 $C\in L(X_1,R^1)$, $B\in L(R^1,X_{-1})$(即$(0,\delta(\cdot-s))^{\mathrm{T}}\in(D(A))'$),且 $A_K=A-KBC_L$[10], 注意到 $C\phi_{\pm k}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(|k|-\dfrac{1}{2}\right)\pi s=\langle B,\varphi_{\pm k}\rangle_{X_{-1}\times X_1}$, 因此有 $c_{\pm k}=b_{\pm k}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 由于 $\dfrac{1}{\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2}=\dfrac{1}{(2n-1)^2}\left(\dfrac{1}{n-k}+\dfrac{1}{n+k-1}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{(2n-1)^2}\dfrac{2}{(n-k)^2}$, 记 $I=\{\cdots,-n,\cdots,-1,1,\cdots,n,\cdots\}$,则有

$$\sum_{n\in I}\sum_{k\in I,k\neq n}\frac{b_k^2c_n^2}{|\lambda_n-\lambda_k|}\leqslant$$

$$\frac{1}{2\pi^4}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{1}{\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2}\right]<+\infty.$$

即式(4)成立. 另一方面由于

$$\left|\sum_{k\in I,k\neq n}\frac{b_kc_k}{\lambda_n-\lambda_k}\right|\leqslant\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{1}{(n-k)(n+k+1)}\leqslant\left(\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{1}{(n-k)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

可以证明式(5)成立. 由定理可知算子 A_K 的广义本征元生成空间 X 的一组 Riesz 基,从而也证明了算子 A_K 生成的半群 $S_K(t)$ 满足谱确定增长价的性质. 顺便说一句,由于 C 是无界反馈,作者无法直接应用文献[2]的结论解决上述问题.

致谢 作者曾与罗跃虎教授进行过有益的讨论,在此表示感谢.

参 考 文 献

1 Weiss G. Transfer function of regular linear systems Part I: Characterization of regularity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1994, **342**(2):827～855

2 Xu C Z, Sallet G. On spectrum and Riesz basis assignment of infinite dimension linear systems by bounded linear feedbacks. *SIAM J. Control Optimal*, 1996, **34**(2):521～541

3 Sun S H. On spectrum distribution of completely controllable linear systems. *SIAM J. Control Optimal*, 1981, **19**(1):79～82

4 刘嘉荃. 一类线性算子的一秩扰动和极点配置问题. 系统科学与数学, 1982, **2**(2):81～94

5 Rebarber R. Spectral assignability for distributed parameter systems with unbounded scalar control. *SIAM J. Control Optimal*, 1989, **27**(1):148～169

6 罗跃虎. (D)类线性算子的扰动问题. 系统科学与数学, 1993, **13**(2):83～89

7 Kato T. Perturbation theory for linear operators. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer-Verlag, 1984

8 Dunford N, Shwartz J T. Linear Operators III. New York: Wiley Interscience, 1971

9 Singer I. Bases in Banach Space I. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1970

10 Rebarber R. Exponential stability of coupled beams with dissipative joints: A frequency domain approach. *SIAM J. Control Optimal*, 1995, **33**(1):1～28

附 录 A

引理 1 的证明.

记 $d_n=\min\limits_{k\neq n}|\lambda_n-\lambda_k|\,(n\in N)$,取 $\lambda_0\in\rho(A)$ 使 $|\lambda_n-\lambda_0|\leqslant\frac{d_n}{2}$,注意到 $\left|\frac{\lambda_0-\lambda_k}{\lambda_n-\lambda_k}\right|\geqslant1-\left|\frac{\lambda_0-\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_k}\right|\geqslant\frac{1}{2}$,因此 $\left|\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_0-\lambda_k}\right|\leqslant2\,(k\neq n)$. 由条件(5)有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_kc_k}{|\lambda_0-\lambda_k|}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_kc_k}{|\lambda_n-\lambda_k|}\left|\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_0-\lambda_k}\right|+\frac{b_nc_n}{|\lambda_0-\lambda_k|}<+\infty. \tag{A1}$$

另一方面,$\forall v\in U$,记 $x=(\lambda_0I-A)^{-1}Bv=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(v)}{\lambda_0-\lambda_k}\phi_k$,则 $x\in X$. 从而有 $C\int_0^{\tau}S(t)x\mathrm{d}t=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(e^{\lambda_k\tau}-1)b_k(v)}{\lambda_k(\lambda_0-\lambda_k)}C\phi_k$,因此,注意到(A1)可以得到

$$H(\lambda_0)v=C_L(\lambda_0I-A)^{-1}Bv=\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e^{\lambda_k\tau}-1)b_k(v)}{\lambda_k(\lambda_0-\lambda_k)}C\phi_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(v)C\phi_k}{(\lambda_0-\lambda_k)}, \tag{A2}$$

即 $(\lambda_0I-A)^{-1}Bv\in D(C_L)$,由文献[1]中的定理 5.6 知 i),ii)成立.

附 录 B

引理 4 的证明.

当 $\lambda\in\bar{\Omega}_n\setminus\{\lambda_n\}$ 时,由于 $\left|\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_0-\lambda_k}\right|\leqslant2\,(n\neq k)$,任取 $v\in U$, $\|v\|=1$,注意到式(A2)和引理 3 有

$$\| H(\lambda)v \|_U \leqslant 2\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_k c_k}{|\lambda_n-\lambda_k|}+\frac{1}{6}\leqslant\frac{1}{3}(\lambda\in\Gamma_n,\ n>N_1).$$

因此存在 $N_2\geqslant N_1$，当 $n>N_2$ 时，有 $\max_{\lambda\in\Gamma_n}\| H(\lambda)\|\leqslant\frac{1}{3}$. 另一方面，记 $H_m(\lambda)v=\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k(v)}{\lambda-\lambda_k}C\phi_k(v\in U,\ m\in N,\ \lambda\in\bar{\Omega}_n\backslash\{\lambda_n\})$，知 $H_m(\lambda)$ 是 U 上的有限秩算子，且 $m>n$ 时，注意到式(A2)，(5)有

$$\| H(\lambda)-H_m(\lambda)\| \leqslant\sum_{k>m}\frac{b_k c_k}{|\lambda-\lambda_k|}\leqslant 2\sum_{k>m}\frac{b_k c_k}{|\lambda_m-\lambda_k|}\to 0(m\to\infty),$$

因此 $H(\lambda)$ 是 U 上的紧算子($\lambda\in\bar{\Omega}_n\backslash\{\lambda_n\}$).

附　录 C

引理 6 的证明.

记 $E_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}(\lambda I-A_K)^{-1}\mathrm{d}\lambda,\ P_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}(\lambda I-A)^{-1}\mathrm{d}\lambda$，则 E_n，P_n 为投影算子，只需证 $\dim E_nX=\dim P_nX=\dim\mathrm{span}\{\phi_n\}=1$. 事实上，由于 $\| H(\lambda)\|\leqslant\frac{1}{3}(n>N_2,\lambda\in\Gamma_n)$，因此有

$$\| (I-H(\lambda))^{-1}\| \leqslant\frac{3}{2}(\lambda\in\Gamma_n). \tag{C1}$$

取 $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\phi_k\in X,\ \| x\| =1$，当 $\lambda\in\Gamma_n$ 时，利用 Hölder 不等式，有

$$\| C_L(\lambda I-A)^{-1}x\|_U^2=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|c_k}{|\lambda-\lambda_k|}\right)^2\leqslant 4\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{c_k^2}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}+\frac{c_n^2}{r_n^2}. \tag{C2}$$

记 $V(\lambda)=(I-H(\lambda))^{-1}C_L(I-A)^{-1}\in L(X,U)$，那么

$$(I-A)^{-1}B(I-H(\lambda))^{-1}C_L(I-A)^{-1}x=(I-A)^{-1}BV(\lambda)x=\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k(V(\lambda)x)}{\lambda-\lambda_k}\phi_k.$$

利用式(C1)，(C2)并注意到 $r_n=6b_nc_n$，由上式可知，当 $\lambda\in\Gamma_n$ 时

$$\| (I-A)^{-1}B(I-H(\lambda))^{-1}C_L(I-A)^{-1}x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{b_k(V(\lambda)x)}{\lambda-\lambda_k}\right|^2\leqslant$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k^2}{|\lambda-\lambda_k|^2}\| C_L(\lambda I-A)^{-1}x\|_U^2\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(4\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_k^2}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}+\frac{b_n^2}{r_n^2}\right)\left(4\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{c_k^2}{|\lambda-\lambda_k|^2}+\frac{c_n^2}{r_n^2}\right)=$$

$$\frac{1}{r_n^2}\left[\frac{1}{16}+9\left(\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_n^2c_k^2}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}+\frac{b_k^2c_n^2}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}\right)+36^2\left(\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_k^2c_n^2}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}\right)\left(\sum_{k=1,k\neq n}^{\infty}\frac{b_n^2c_k^2}{|\lambda_n-\lambda_k|^2}\right)\right].$$

由式(4)知存在自然数 N_3，使 $n>N_3$ 时有

$$\| (I-A)^{-1}B(I-H(\lambda))^{-1}C_L(I-A)^{-1}\| <\frac{1}{r_n}. \tag{C3}$$

利用式(6)，(C3)，有

$$\| E_n-P_n\| \leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n}\| (\lambda I-A_K)^{-1}-(\lambda I-A)^{-1}\|\mathrm{d}\lambda=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n}\| (\lambda I-A)^{-1}B(\lambda I-H(u))^{-1}C_L(\lambda I-A)^{-1}\|\mathrm{d}\lambda<\frac{1}{2\pi r_n}\int_{\Gamma_n}\mathrm{d}\lambda=1,$$

即 $\| E_n-P_n\| <1$. 因此 $\dim E_nX=\dim P_nX=\dim\mathrm{span}\{\phi_n\}=1$[7,p33].

王耀庭　男，1958 年生，太原市人，山西大学数学系副教授. 主要从事分布参数系统理论的研究.

李胜家　男，1956 年生，运城市人，山西大学数学系教授. 主要从事分布参数系统理论的研究.

李　录　男，1960 年生，大同市人，山西大学物理系副教授. 主要从事偏微分方程理论的研究.