第 27 卷 第 5 期
2001 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 5
Sept., 2001

随机非线性系统鲁棒自适应反馈控制器的积分反推方法设计[1)]

刘允刚 施颂椒 潘子刚
(上海交通大学自动化系 上海 200030)
(E-mail: lygfr@263.net)

摘 要 考虑了一类随机非线性系统的鲁棒自适应控制问题.采用 Itô 随机微分方程描述系统,进而在概率意义下研究系统的鲁棒稳定性.应用积分反推(backstepping)方法,系统地给出了设计状态反馈及输出反馈鲁棒自适应控制器的方法.同时构造出了适当形式的四次型的自适应控制 Lyapunov 函数(CLF).

关键词 随机非线性系统,鲁棒自适应反馈控制,积分反推方法,概率意义下有界稳定.

BACKSTEPPING ROBUST ADAPTIVE FEEDBACK CONTROL DESIGN FOR STOCHASTIC NONLINEAR SYSTEMS

LIU Yun-Gang SHI Song-Jiao PAN Zi-Gang
(*Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)
(E-mail: lygfr@263.net)

Abstract In this paper, the backstepping robust adaptive feedback control design for a class of nonlinear stochastic systems with stochastic disturbance is studied. The systems are depicted by Itô stochastic differential equations, and the performances such as robust stability are studied in probability. By using backstepping method, the designing procedure of state-feedback and dynamic output-feedback robust adaptive controllers are given. The main contribution of the paper is the quartic control Lyapunov function which is different from the deterministic case.

Key words Stochastic nonlinear systems, robust adaptive feedback control, integrator backstepping methodology, bounded stability in probability.

1 引言

非线性系统全局稳定控制器的设计是当前重要的研究课题.控制 Lyapunov 函数方法

1) 国家自然科学基金资助(60004005).
收稿日期 1999-07-12 收修改稿日期 2000-07-19

是设计全局稳定控制器的重要工具. 对于具有严格反馈形式和可以反馈等价成这类形式的非线性系统,积分反推方法[1~7]提供了一通用的设计控制器的迭代构造工具. 积分反推方法的设计过程具有很大的灵活性,这反映在每一次的迭代构造步骤中镇定控制律和附加 Lyapunov 函数的选择上. 文献[6]是积分反推方法的新近发展:就确定性系统而言,应用积分反推设计方法设计控制器,可以使得系统达到局部最优和全局逆优性能. 这一结论标志着积分反推方法的成熟与完善.

Florchinfer 在文献[8]中引入随机控制 Lyapunov 函数概念,并系统地讨论了 Lyapunov 函数在研究随机系统稳定方面的应用. Pan 在文献[4]中首先应用积分反推技术研究了随机系统风险灵敏度(Risk-Sensitive)指标最优控制问题. Deng 和 Krstic[9]研究了随机系统的输出反馈镇定问题. 作者与 Pan 解决了输出反馈风险灵敏度最优控制积分反推方法设计问题. 本文则是研究非线性随机不确定系统的鲁棒自适应控制问题. 解决了状态反馈及输出反馈自适应控制的积分反推方法设计问题.

2 系统与问题描述

2.1 不确定随机非线性系统

考虑严格反馈形式的不确定随机非线性系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_i = x_{i+1}\mathrm{d}t + \theta^{\mathrm{T}}\varphi_i(\bar{x}_i)\mathrm{d}t + \sigma_i(\bar{x}_i)\mathrm{d}t + \phi_i(\bar{x}_i)\mathrm{d}w, \quad i = 1,\cdots,n-1, \\ \mathrm{d}x_n = \varphi_0(\bar{x}_n)\mathrm{d}t + \theta^{\mathrm{T}}\varphi_n(\bar{x}_n)\mathrm{d}t + g(\bar{x}_n)u\mathrm{d}t + \sigma_n(\bar{x}_n)\mathrm{d}t + \phi_n(\bar{x}_n)\mathrm{d}w, \\ y = x_1, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_i\in R$ 为系统状态,记:$\bar{x}_i=[x_1,\cdots,x_i]^{\mathrm{T}}$; u,y 分别为系统的输入和输出; $\theta\in R^q$ 是未知系统参数; w 为定义在概率空间(Ω,F,P)上的 m 维相互独立的标准维纳过程向量,其中 Ω 为样本空间,F 为参考簇,P 为概率测度. 系统(1)还满足下面的假设条件.

假设 1. $\varphi_0,\varphi_i,\phi_i$, $1\leqslant i\leqslant n$ 为已知的具有相应维数的光滑非线性函数向量;对$\forall x\in R^n$, $g(x)\neq 0$; φ_i,ϕ_i, $1\leqslant i\leqslant n$ 在原点处消逝,即

$$\varphi_i(x_i\cdots x_i)|_{x=0} = 0, \quad \phi_i(x_1\cdots x_i)|_{x=0} = 0, \quad i = 1,\cdots,n.$$

假设 2[7]. 对每一个 $\sigma_i(\bar{x}_i)$, $i=1,\cdots,n$,存在已知的 K 类函数 $\rho_i(\|\bar{x}_i\|)$(称其为 K 函数,如果它是连续的,并且有 $\|\bar{x}\|\to\infty$,则 $\rho_i(\|\bar{x}_i\|)\to\infty$),使得: $|\sigma_i(\bar{x}_i)|\leqslant k_i|\rho_i(\|\bar{x}_i\|)|$, $1\leqslant i\leqslant n$.

假设 3. 设系统参数真值属于一有界闭集 C_θ,即有

$$\|\theta\|^2 \leqslant M_\theta, \quad \forall\,\theta\in C_\theta, \quad M_\theta > 0 \text{ 为正常数}.$$

2.2 概率意义下自适应镇定

定义 1[4,8~10]. 随机微分系统(1)在平衡点 $x=0$ 处是概率意义下渐近稳定的,如果存在原点的一邻域 $D\in R^n$,使得

1) 对任意 $x\in D$,闭环系统解 $x^{s,x}$(起始时刻为 $s\geqslant 0$,起始状态为 x)一致有定义;

2) 对$\forall s\geqslant 0$, $\forall\varepsilon\geqslant 0$,有$\lim\limits_{x\to 0}P(\sup\limits_{s\leqslant t}\|x^{s,x}\|>\varepsilon)=0$,且 $P(\lim\limits_{t\to\infty}\|x^{s,x}\|=0)=1$,对$\forall x\in D$ 都成立. 如果 $D\in R^n$ 为任意的原点邻域,则为全局性结论.

定义 2. 随机微分系统(1)在域 D 内概率意义下有界稳定的,如果对任意 $x\in R^n$,有

1) 对任意 $x\in D$,闭环系统解 $x^{s,x}$(起始时刻为 $s\geqslant 0$,起始状态为 x)一致有定义;

2) 对 $\forall s\geqslant 0,\forall \varepsilon>0$,有 $\lim\limits_{x\to\partial D}P(\sup\limits_{s\leqslant t}d(x^{s,x},D)>\varepsilon)=0$,且 $P(\lim\limits_{t\to\infty}d(x^{s,x},D)=0)=1$,其中 $d(x,D):=\sup\limits_{y\in D}\|x-y\|$.

定义 3[8]. 如下随机微分系统

$$dx=f(x,u)dt+g(x)dw,$$

则函数 $V(x)$的无穷小算子(infinitesimal generator)L 定义为

$$LV(x)=\sum_{i=1}^{n}f^i(x,u(x))\frac{\partial V}{\partial x_i}(x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_j\partial x_j}(x),$$

其中 $V\in C^2(R^n;R)$; $a_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{m}g_k^ig_k^j$, $1\leqslant i,j\leqslant n$.

定理 1[8]. 对随机微分系统(1),假设存在一 Lyapunov 函数 $V:R^n\to R\in C^2$,并且是正定和径向无界的,使得对$\forall x\in D$,有 $LV(x)\leqslant -W(x)\leqslant 0$ 成立,那么系统为概率意义下渐近稳定. 其中 $W(x)$是非负的连续函数.

定理 2. 假设存在一 Lyapunov 函数 $V:R^n\to R\in C^2$,并且是正定和径向无界的,使得

$$LV(x)\leqslant -\lambda V(x)+K_0,\ \lambda>0,\ K_0\geqslant 0$$

为常数,对$\forall x\in R^n$ 成立. 那么系统为概率意义下全局有界稳定. 如果 $K_0=0$,那么系统称之为概率意义下指数渐近稳定的.

3 状态反馈鲁棒自适应控制

应用积分反推技术给出自适应状态反馈镇定控制器的设计方法,设计过程保证闭环系统概率意义下的鲁棒稳定性. 设计过程如下(在每一步都引入一个虚拟控制函数 α_i 及参数自适应律$\hat\theta_i$,并且简记:$\varphi_i(x_1,\cdots,x_i)=\varphi_i$,其余类推).

令 $z_1=x_1$, $z_2=x_2-\alpha_1(x_1)$,则 $dz_1=(z_2+\alpha_1)dt+\theta^{T}\varphi_1dt+\sigma_1dt+\phi_1dw$.

记:$\tilde\theta_1=\theta-\hat\theta_1$为估计误差,其中 $\hat\theta_1$为 θ 的第一次估计. 定义 Lyapunov 函数为 $V_1=\frac{z_1^4}{4}+\frac{\tilde\theta_1^{T}\tilde\theta_1}{2}$,则 V_1 的微分为 $LV_1=z_1^3(z_2+\alpha_1+\theta^{T}\varphi_1+\sigma_1)-\tilde\theta_1^{T}\dot{\hat\theta}_1+3z_1^2\phi_1^{T}\phi_1/2$. 由于 $3z_1^2\phi_1^{T}\phi_1/2\leqslant\frac{3\varepsilon_{11}}{4}+\frac{3z_1^4}{4\varepsilon_{11}}|\phi_1|^4$, $z_1^3z_2\leqslant\frac{3}{4}z_1^4+\frac{1}{4}z_2^4$. 取如下的一个虚拟控制

$$\alpha_1=-c_1z_1-\frac{3z_1}{4}-\hat\theta_1^{T}\varphi_1-\frac{3z_1}{4\varepsilon_{11}}|\phi_1|^4-K_1z_1^3\rho_1^2,\quad K_1>0,$$

并且注意应用下面的不等式引理:

引理 1. 常数 $a,b>0$,对任意的 x,

$$ax-bx^2=b\left(-x^2+\frac{a}{b}x-\frac{a^2}{4b^2}\right)+\frac{a^2}{4b}=-b(x-a/2b)^2+\frac{a^2}{4b}\leqslant\frac{a^2}{4b},$$

当 $x=a/2b$ 时等号成立. 则

$$LV_1\leqslant -c_1z_1^4+z_1^3z_2-K_1z_1^6\rho_1^2+k_1|z_1^3||\rho_1|-\tilde\theta_1^{T}(\dot{\hat\theta}_1-z_1^3\varphi_1)+3\varepsilon_{11}/4-3z_1^4/4\leqslant$$

$$-c_1z_1^4+z_1^3z_2+k_1^2/4K_1-\tilde\theta_1^{T}(\dot{\hat\theta}_1-z_1^3\varphi_1)+3\varepsilon_{11}/4-3z_1^4/4;$$

令参数调节律为 $\dot{\hat{\theta}}_1 = z_1^3\varphi_1 - l\hat{\theta}_1$，$l>0$ 为待定正常数,则

$$LV_1 \leqslant -c_1z_1^4 + z_1^3z_2 + k_1^2/4K_1 + l\tilde{\theta}_1^{\mathrm{T}}\hat{\theta}_1 - 3z_1^4/4 + 3\varepsilon_{11}/4 \leqslant$$
$$-c_1z_1^4 - (l/2)\|\tilde{\theta}_1\|^2 + (l/2)\|\theta\|^2 + z_1^3z_2 + k_1^2/4K_1 - 3z_1^4/4 + 3\varepsilon_{11}/4.$$

类推地得到虚拟控制($2\leqslant i\leqslant n-1$)

$$\alpha_i = -c_iz_i - z_{i-1} - \hat{\theta}_i^{\mathrm{T}}\left(\varphi_i - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\varphi_j\right) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}x_{j+1} + \frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j\right) - K_{ix}z_i^3\rho_i^2 +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_j^2}\phi_j^{\mathrm{T}}\phi_j - \frac{3z_i}{4\varepsilon_{1i}}\left|\phi_1 - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\phi_1\right|^4 - z_i^3\sum_{j=1}^{i-1}K_j\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\rho_j\right)^2,\ K_i>0,$$

及控制律

$$u = \frac{1}{g}\left[-c_nz_n - \frac{1}{4}z_n - \varphi_0 - \hat{\theta}_n^{\mathrm{T}}\left(\varphi_n - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}\varphi_j\right) + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}x_{j+1} + \frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j\right)\right] -$$
$$\frac{K_nz_n\rho_n^2}{g} + \frac{1}{2g}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2\alpha_{n-1}}{\partial x_j^2}\phi_j^{\mathrm{T}}\phi_j - \frac{3z_n}{4g}\left|\phi_n - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}\phi_j\right|^4 - \frac{z_n}{g}\sum_{j=1}^{n-1}K_j\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}\phi_j\right)^2, \tag{2}$$

参数自适应律为 $$\dot{\hat{\theta}}_i = z_i\left(\varphi_i - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\varphi_j\right) - l\hat{\theta}_i,$$

其中 $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{4}z_i^4 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\theta}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_i$，$2\leqslant i\leqslant n-1$；$z_i = z_i - \alpha_{i-1}$，$2\leqslant i\leqslant n$. 则

$$LV_n(x) \leqslant -\sum_{j=1}^{n}c_jz_j^4 - \frac{l}{2}\sum_{j=1}^{n}\|\tilde{\theta}_j\|^2 + \frac{nl}{2}\|\theta\|^2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{k_j^2}{4K_j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{3\varepsilon_{1i}}{4} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-j-1)k_j^2}{4K_{jx}}.$$

取 $\lambda = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{4c_i, l\}$，并记：$M := \frac{nl}{2}M_\theta + \sum_{j=1}^{n}\frac{k_j^2}{4K_j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{3\varepsilon_{1i}}{4} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n-j-1)k_j^2}{4K_{jx}}$，则 $LV_n(x) \leqslant -\lambda V_n + M$. 由定理 2 知控制律(2)为闭环系统的鲁棒自适应镇定控制器.

4 输出反馈自适应控制

讨论了状态反馈随机自适应控制器的积分反推设计及鲁棒稳定性问题. 然而并不是所有系统状态都可以直接测量的. 输出可观测反馈控制问题更具挑战性和实际意义.

假设 4. 设系统(1)的非线性成分只依赖于系统可测输出信号 y,而且不确定性因素也可仅由 y 的函数描述,即有以下假设

1) $\varphi_0(x_1,\cdots,x_n) = \varphi_0(y)$，$\varphi_i(x_1,\cdots,x_i) = \varphi_i(y)$，$i=1,\cdots,n$. 而且，$\varphi_0(y) = y\psi_0(y)$，$\varphi_i(y) = y\psi_i(y)$，$i=1,\cdots,n$；

2) $\phi_i(x_1,\cdots,x_i) = \phi_i(y)$，并且，$\phi_i(y) = y\omega_i(y)$，$i=1,\cdots,n$.

3) $\sigma_i(x_1,\cdots,x_i) = \sigma_i(y)$，$i=1,\cdots,n$，还满足 $|\sigma_i(y)| \leqslant |y\vartheta_i(y)|$，$i=1,\cdots,n$，其中 $\vartheta_i(y)$，$i=1,\cdots,n$ 为已知函数；

4) $g(x_1,\cdots,x_n) = g(y)$，而且 $g(y)\neq 0$，$\forall y\in R^m$.

设计如下形式的状态观测器

$$\dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} + k^i(y - \hat{x}_1),\ i = 1,\cdots,n,\quad \hat{x}_{n+1} = g(y)u.$$

其中 k^i，$i=1,\cdots,n$ 为待定常数. 记 $x = [x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，$\hat{x} = [\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n]^{\mathrm{T}}$，$\tilde{x} = x - \hat{x}$. 则

$$\mathrm{d}\tilde{x}=\begin{bmatrix}-k^1 & & \\ \vdots & I & \\ -k^n & 0 \ \cdots & 0\end{bmatrix}\tilde{x}\mathrm{d}t+\theta^{\mathrm{T}}\varphi(y)\mathrm{d}t+\sigma(y)\mathrm{d}t+\phi(y)\mathrm{d}w=:$$

$$A\tilde{x}\mathrm{d}t+\bar{\theta}^{\mathrm{T}}\varphi(y)\mathrm{d}t+\sigma(y)\mathrm{d}t+\varphi_0(y)B\mathrm{d}t+\phi(y)\mathrm{d}w,$$

其中 $\bar{\theta}^{\mathrm{T}}\varphi(y)=\begin{bmatrix}\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1(y)\\ \vdots\\ \theta^{\mathrm{T}}\varphi_n(y)\end{bmatrix}$, $\phi(y)=\begin{bmatrix}\phi_1(y)\\ \vdots\\ \phi_n(y)\end{bmatrix}$, $\sigma(y)=\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \vdots\\ \sigma_n\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.

可以通过适当选择 k^i,使得 A 为稳定矩阵. 如果 A 适当,则存在正定矩阵 P,满足

$$A^{\mathrm{T}}P+PA=-I.$$

上述线性矩阵方程当 A 为稳定矩阵时存在解,例如:$A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -4.5 & 0\end{bmatrix}$, 则 $P=\begin{bmatrix}\frac{11}{12} & \frac{-1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{29}{54}\end{bmatrix}$.

应用积分反推方法设计输出反馈自适应控制器,先引入如下误差变量

$$z_1=y,\quad z_i=\hat{x}_i-\alpha_{i-1}(\hat{x}_1,\bar{z}_{i-1}),\quad 2\leqslant i\leqslant n,\quad z_{n+1}=\alpha_n(\hat{x}_1,\bar{z}_{i-1})=g(y)u,$$

那么

$$\mathrm{d}\tilde{x}=A\tilde{x}\mathrm{d}t+\bar{\theta}^{\mathrm{T}}\varphi(y)\mathrm{d}t+\sigma(y)\mathrm{d}t+\varphi_0(y)B\mathrm{d}t+\phi(y)\mathrm{d}w,$$

$$\mathrm{d}\hat{x}_1=[z_2+\alpha_1+k^1(y-\hat{x}_1)]\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}y=(\tilde{x}_2+z_2+\alpha_1)\mathrm{d}t+\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1(y)\mathrm{d}t+\sigma_1(y)\mathrm{d}t+\phi_1(y)\mathrm{d}w,$$

$$\mathrm{d}z_2=[z_3+\alpha_2+k^2(y-\hat{x}_1)]\mathrm{d}t-\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}(\tilde{x}_2+z_2+\alpha_1+\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1(y)+\sigma_1(y))\mathrm{d}t-$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial y^2}\phi_1\phi_1^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}t-\frac{\partial\alpha_1}{\partial\hat{x}_1}(z_2+\alpha_1+k^1(y-\hat{x}_1))\mathrm{d}t-\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\phi_1(y)\mathrm{d}w,$$

$$\mathrm{d}z_i=[z_{i+1}+\alpha_i+k^i(y-\hat{x}_1)]\mathrm{d}t-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{x}_j}[z_{j+1}+\alpha_j+k^j(y-\hat{x}_1)]\mathrm{d}t-$$

$$\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}(z_2+\alpha_1+\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1(y)+\sigma_1(y)+\tilde{x}_2)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial y^2}\phi_1(y)\phi_1^{\mathrm{T}}(y)\right]\mathrm{d}t-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\phi_1(y)\mathrm{d}w,$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{d}z_n=[g(y)u+k^n(y-\hat{x}_1)]\mathrm{d}t-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat{x}_j}[z_{j+1}+\alpha_j+k^j(y-\hat{x}_1)]\mathrm{d}t-$$

$$\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y}(z_2+\alpha_1+\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1(y)+\sigma_1(y)+\tilde{x}_2)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial^2\alpha_{n-1}}{\partial y^2}\phi_1(y)\phi_j^{\mathrm{T}}(y)\right]\mathrm{d}t-\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y}\phi_1(y)\mathrm{d}w.$$

定义上述系统的控制 Lyapunov 函数

$$V=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}z_i^4+\frac{1}{4}(\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x})^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\theta}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_i,$$

其中 $\tilde{\theta}_i=\theta-\hat{\theta}_i$, $\hat{\theta}_i$ 为 θ 的第 i 次估计值.

记:

$$F_1(y)=0,$$

$$F_i=k^i(y-\hat{x}_1)-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}(z_2+\alpha_1)-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial y^2}\phi_1\phi_1^{\mathrm{T}}\right]-$$

$$\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{x}_j}(z_{j+1}+\alpha_j+k^j(y-\hat{x}_1)),\quad 2\leqslant i\leqslant n.$$

从而有

$$LV=z_1^3(\tilde{x}_2+z_2+\alpha_1+\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1(y)+\sigma_1(y))+\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}\tilde{x}^{\mathrm{T}}P(\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\varphi+\sigma(y)+\varphi_0(y)B)+$$
$$\mathrm{Tr}\{\phi(y)(2P\tilde{x}\tilde{x}^{\mathrm{T}}P+\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}P)\phi^{\mathrm{T}}(y)\}+\sum_{i=2}^{n}z_i^3\left(z_{i+1}+\alpha_i+F_i+\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}(\tilde{x}_2+\sigma_1+\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1)\right)+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{\theta}_i^{\mathrm{T}}\dot{\theta}_i-\frac{1}{2}\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}\|\tilde{x}\|^2+\frac{3z_1^2}{2}\phi_1\phi_1^{\mathrm{T}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{3z_i^2}{2}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2\phi_1\phi_1^{\mathrm{T}}.$$

对上式各项的处理注意应用下面的 Young's 不等式引理.

引理 2. 对任意的 $x,y\in R^n$，有 $x^{\mathrm{T}}y\leqslant\frac{a^p}{p}\|x\|^p+\frac{1}{qa^q}\|y\|^q$，此处 $a>0,p>1,q>1$，且 $(p-1)(q-1)=1$. 从而有

$$z_1^3\tilde{x}_2\leqslant\frac{3}{4\varepsilon_1^{\frac{4}{3}}}z_1^4+\frac{\varepsilon_1^4}{4}\|\tilde{x}\|^4,\quad \frac{3z_1^2}{2}\phi_1\phi_1^{\mathrm{T}}=\frac{3z_1^4}{2}\omega_1\omega_1^{\mathrm{T}},\quad z_i^3z_{i+1}\leqslant\frac{3}{4}z_i^4+\frac{1}{4}z_{i+1}^4,\quad 1\leqslant i\leqslant n-1;$$

$$z_1^3\sigma_1\leqslant\frac{3}{4}z_1^4+\frac{1}{4}y^4\vartheta_1^4,\quad \sum_{i=2}^{n-1}z_i^3\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\tilde{x}_2\leqslant\sum_{i=2}^{n-1}\left[\frac{3}{4\varepsilon_{1i}^{\frac{4}{3}}}z_i^4\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^{\frac{4}{3}}+\frac{\varepsilon_{1i}^4}{4}\|\tilde{x}\|^4\right];$$

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\sigma(y)\leqslant\|P\|^2\|\tilde{x}\|^3\left(\sum_{i=1}^{n}|y\vartheta_i(y)|\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|P\|^2\left(\frac{3\varepsilon_2^{\frac{4}{3}}}{4}\|\tilde{x}\|^4+\frac{y^4}{4\varepsilon_2^4}|\vartheta_1(y)|^4\right);$$

$$\sum_{i=2}^{n}z_i^3\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\sigma_1\leqslant\sum_{i=2}^{n-1}|z_i|^3\left|\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right||y\vartheta_1(y)|\leqslant\sum_{i=2}^{n-1}\left(\left|\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right|^{\frac{4}{3}}\frac{3z_i^4}{4}+\frac{y^4}{4}|\vartheta_1(y)|^4\right);$$

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\,\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\varphi(y)\leqslant M_\theta\|P\|^2\|\tilde{x}\|^3\|\varphi\|\leqslant M_\theta\|P\|^2\left(\frac{3\varepsilon_3^{\frac{4}{3}}}{4}\|\tilde{x}\|^4+\frac{1}{4\varepsilon_3^4}y^4|\psi(y)|^4\right);$$

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\varphi_0(y)B\leqslant\|P\|^2\|\tilde{x}\|^3\|B\|\,|y\|\psi_0(y)|\leqslant\|P\|^2\left(\frac{3\varepsilon_4^{\frac{4}{3}}}{4}\|\tilde{x}\|^4+\frac{1}{4\varepsilon_4^4}y^4|\psi_0(y)|^4\right);$$

$$\mathrm{Tr}\{\phi(y)(2P\tilde{x}\tilde{x}^{\mathrm{T}}P+\tilde{x}^{\mathrm{T}}P\tilde{x}P)\phi^{\mathrm{T}}(y)\}\leqslant\frac{3n\sqrt{n}\|P\|^2}{2}\left(\varepsilon_5^2\|\tilde{x}\|^4+\frac{1}{\varepsilon_5^2}y^4\|\omega(y)\|^4\right);$$

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{3z_i^2}{2}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2\phi_1\phi_1^{\mathrm{T}}=\sum_{i=2}^{n}\frac{3z_i^2}{2}\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^2y^2\omega_1\omega_1^{\mathrm{T}}\leqslant\frac{3}{4}\sum_{i=2}^{n}\left[z_i^4\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^4+y^4\|\omega_1\|^4\right];$$

则
$$LV\leqslant z_1^3\left(\alpha_1+\frac{3}{2}z_1+\frac{1}{4}z_1\vartheta_1^4+\frac{3}{4}\varepsilon_1^{-\frac{4}{3}}z_1+\frac{3}{2}z_1\omega_1\omega_1^{\mathrm{T}}+\frac{3(n-1)}{4}z_1\|\omega_1\|^4+\right.$$
$$\frac{\varepsilon_2^{-4}}{4}\sum_{i=1}^{n}z_1\vartheta_i^4+\frac{1}{4}\varepsilon_3^{-4}M_\theta\|P\|^2z_1\|\psi(y)\|^4+\frac{1}{4}\varepsilon_4^{-4}\|P\|^2z_1\psi_0^4+$$
$$\left.\frac{3n\sqrt{n}}{2}\varepsilon_5^{-2}\|P\|^2z_1\|\omega\|^4\right)+\sum_{i=2}^{n-1}z_i^3\left(\alpha_i+z_i+F_i+\frac{3}{4}\left(\varepsilon_{1i}^{-\frac{4}{3}}+1\right)z_i\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^{\frac{4}{3}}\right)+$$
$$z_n^3\left(g(y)u+\frac{1}{4}z_n+F_n+\frac{3}{4}\left(\varepsilon_{1n}^{-\frac{4}{3}}+1\right)z_n\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y}\right)^{\frac{4}{3}}\right)-$$
$$\left(\frac{1}{2}\lambda_{\min}(P)-\frac{\varepsilon_1^4}{4}-\sum_{i=2}^{n}\frac{\varepsilon_{1i}^4}{4}-n\|P\|^2\frac{3\varepsilon_2^{\frac{4}{3}}}{4}-\|P\|^2\frac{3\varepsilon_4^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{3n\sqrt{n}\|P\|^2}{2}\varepsilon_5^2\right)\|\tilde{x}\|^4+$$
$$z_1^3\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1(y)+\tilde{\theta}_1^{\mathrm{T}}\dot{\theta}_1+\sum_{i=2}^{n}\left(z_i^3\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\theta^{\mathrm{T}}\varphi_1+\tilde{\theta}_i^{\mathrm{T}}\dot{\theta}_i\right).$$

设计如下的虚拟控制以及控制律

$$\alpha_1=-c_1z_1-\frac{3}{2}z_1-\frac{1}{4}z_1\vartheta_1^4-\frac{3}{4}\varepsilon_1^{-\frac{4}{3}}z_1-\frac{3}{2}z_1\omega_1\omega_1^{\mathrm T}-\frac{3(n-1)}{4}z_1\|\omega_1\|^4-\frac{\varepsilon_2^{-4}}{4}\sum_{i=1}^{n}z_1\vartheta_i^4-$$
$$\frac{1}{4}\varepsilon_3^{-4}M_\theta\|P\|^2z_1\|\psi(y)\|^4-\frac{1}{4}\varepsilon_4^{-4}\|P\|^2z_1\psi_0^4-\frac{3n\sqrt{n}}{2}\varepsilon_5^{-2}\|P\|^2z_1\|\omega\|^4),$$
$$\alpha_i=-c_iz_i-z_i-F_i-\frac{3}{4}\left(\varepsilon_{1i}^{-\frac{4}{3}}+1\right)z_i\left(\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\right)^{\frac{4}{3}},\quad 2\leqslant i\leqslant n-1,$$
$$u=-g^{-1}(y)\left(\frac{1}{4}z_n+F_n+\frac{3}{4}\left(\varepsilon_{1n}^{-\frac{4}{3}}+1\right)z_n\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y}\right)\right).$$

系统未知参数满足如下的自适应律

$$\dot{\hat\theta}_1=z_1^3\varphi_1-l\hat\theta_1,\quad \dot{\hat\theta}_i=z_i^3\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial y}\varphi_1-l\hat\theta_i,\quad 2\leqslant i\leqslant n.$$

并记 $k_c=\left\{\frac{1}{2}\lambda_{\min}(P)-\frac{\varepsilon_1^4}{4}-\sum_{i=2}^{n}\frac{\varepsilon_{1i}^4}{4}-n\|P\|^2\frac{3\varepsilon_2^{\frac{4}{3}}}{4}-\|P\|^2\frac{3\varepsilon_2^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{3n\sqrt{n}\|P\|^2}{2}\varepsilon_5^2\right\}$,

从而有 $LV\leqslant-\sum_{j=1}^{n}c_jz_j^4-(l/2)\sum_{j-1}^{n}\|\tilde\theta_j\|^2+ln/2\|\theta\|^2-k_c\|\tilde x\|^4$. 如果 l 充分小，使得 $ln/2M_\theta\leqslant M$，M 为正常数. 记 $\lambda=\min\{4c_i，1\leqslant i\leqslant n；l；k_c\lambda_{\max}^{-2}(P)\}$. 从而有 $LV_n\leqslant-\lambda V_n+M$. 即闭环系统为概率意义下自适应有界稳定的. 如果 $l=0$，系统为概率意义下指数渐近稳定.

5　设计举例

本节仅举例状态反馈自适应控制问题. 如下二阶系统

$$\mathrm{d}x_1=(x_2+\theta x_1+\sin(x_1)x_1)\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}x_2=u\mathrm{d}t+x_2\mathrm{d}t+x_1^2\mathrm{d}w,\quad y=x_1.$$

其中 θ 为系统未知的可估计参数，假设其真实值为 $\theta=0.3\sin t$，而 $\hat\theta$ 为其估计值，相应的估计误差记为 $\tilde\theta=\theta-\hat\theta$；系统未知不确定性因素满足 $|\sin(x_1)x_1|\leqslant|x_1|$.

设计如下的虚拟控制律与系统自适应控制律

$$\alpha_1=-c_1z_1-\frac{3}{4}z_1-\hat\theta z_1-K_1z_1^5,\quad u=-c_2z_2-\frac{1}{4}z_2+z_1^5-lz_1\hat\theta,$$

此处 $z_1=x_1$，$z_2=x_2-\alpha_1(x_1)$. 其中 $\dot{\hat\theta}=z_1^4-l\hat\theta$. 取 $c_1=c_2=1$，$K_1=1$，$l=0.5$. 系统初值设为 $x_1(0)=0$，$x_2(0)=4$，$\hat\theta(0)=0$. 则闭环系统的状态、参数估计及控制效果如图 1～3 所示.

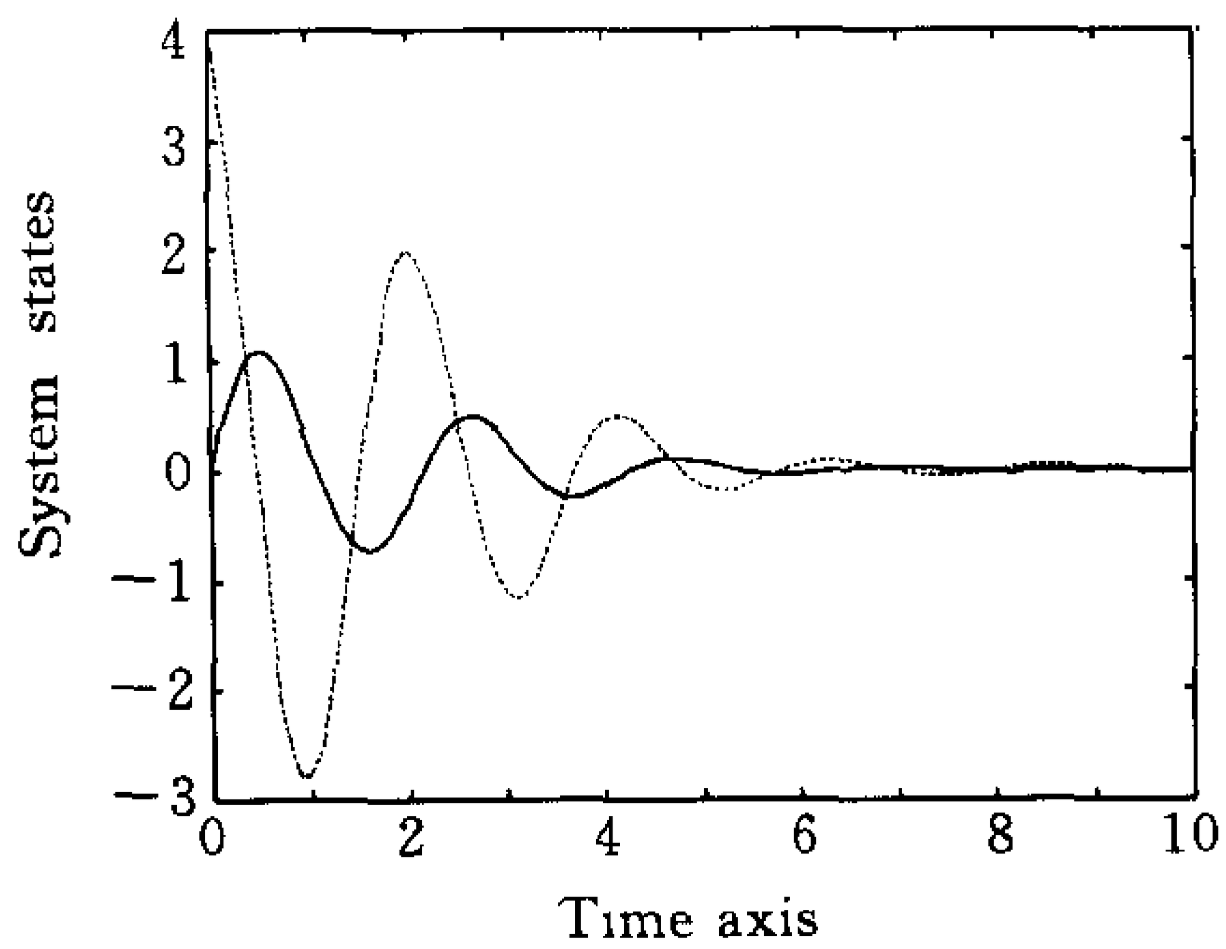

图 1　闭环系统状态(实线为 x_1，虚线为 x_2)

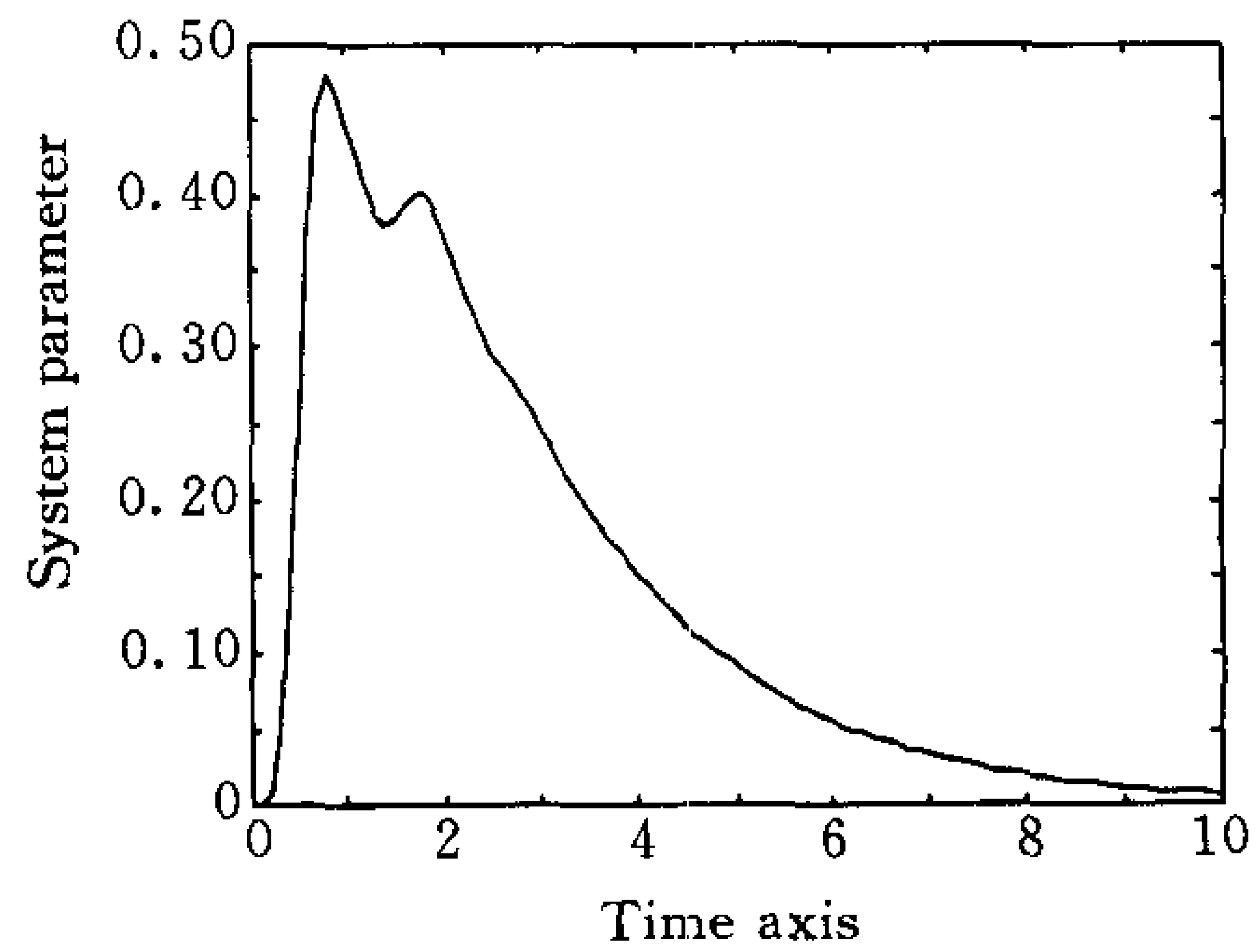

图 2　闭环系统参数的估计 $\hat\theta$

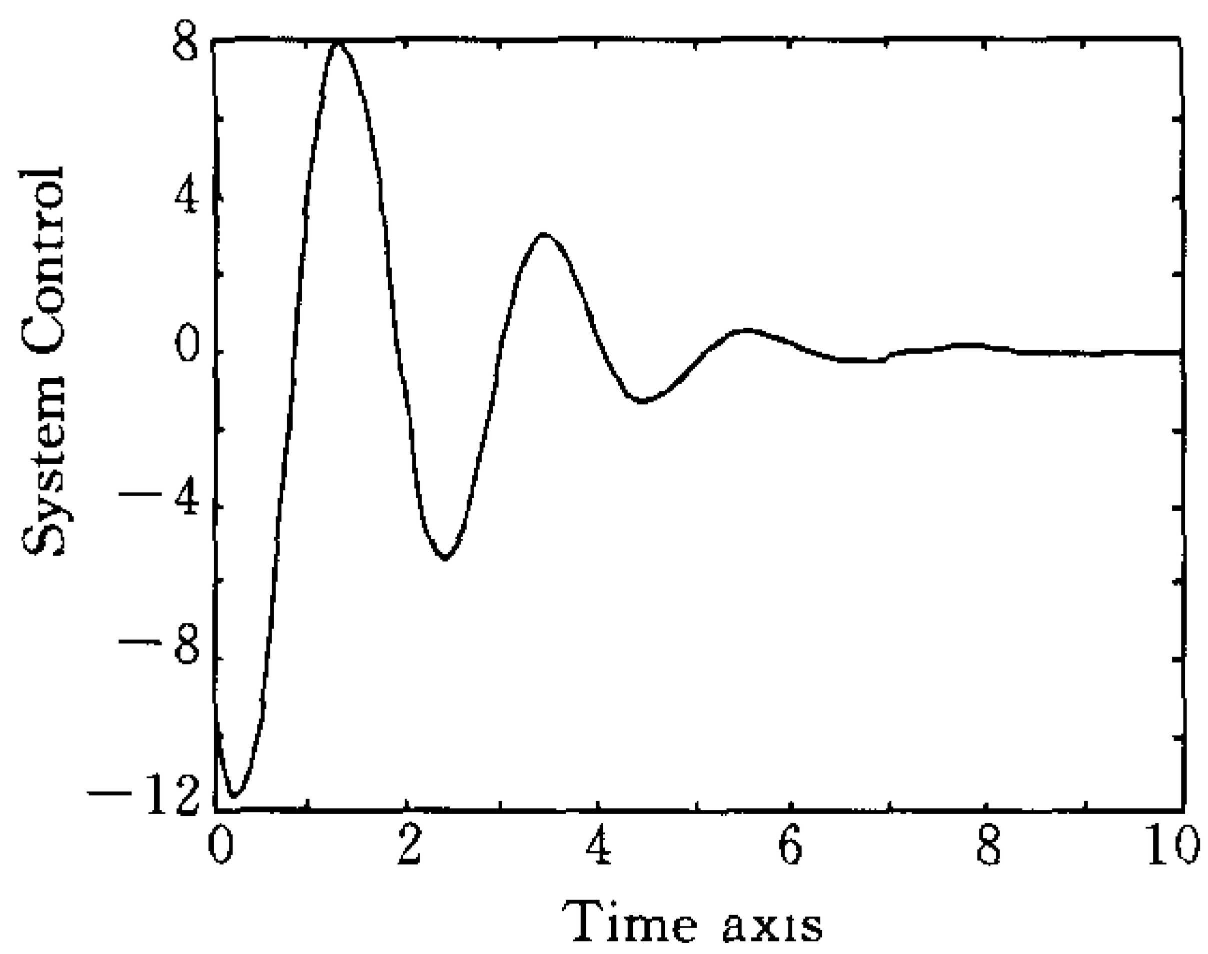

图 3　闭环系统的控制效果

6　结束语

本文研究了非线性随机微分系统的鲁棒自适应控制问题. 应用积分反推技术，系统地给出了状态反馈及输出反馈鲁棒自适应控制的设计方法，讨论了控制器存在的条件和闭环系统的概率意义下稳定性.

一个有意义的研究方向是随机非线性系统自适应跟踪控制问题. 确定性等价原则是设计自适应控制器的重要原则，其设计过程是将测辨器得到的系统参数直接用于控制器的设计，但是其缺点使分析过程十分繁琐. 应用确定性等价原则设计还不能得到对整个系统性能的最优控制. 基于最优化原则并应用随机微分对策理论可更全面地研究随机系统自适应跟踪控制问题. 这一问题正在研究之中.

参　考　文　献

1　Freeman R A, Kokotovic P V. Design of softer robust nonlinear control laws. *Automatica*, 1993, **29**(6):1425～1437

2　Kellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A S,. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1991, **36**(11):1241～1253

3　Kristic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: Wiley, 1995

4　Pan Z G, Basar T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risk-sensitive cost criterion. *SIMA J. Control & Optim.*, 1999, **37**(3):957～995

5　Pan Z G, Basar T. Adaptive controller design for tracking and disturbance attenuation in parametric-strict-feedback nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **44**(8):1066～1083

6　Ezal K, Pan Zigang, Kokotovic P. Locally optimal and robust backstepping design. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2000, **45**(1): 260～271

7　陈卫田，施颂椒，张钟俊. 不确定非线性系统的鲁棒自适应控制. 上海交通大学学报, 1998, **32**(6):88～93

8　Florchinfer P. Lyapunov-like techniques for stochastic stability. *SIAM J. Control & Optim.*, 1995, **33**(4):1151～1169

9　Deng H, Krstic M. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1999, **44**(3):328～333

10　Florchinfer P. Feedback stabilization of affine in the control stochastic differential systems by the control Lyapunov function methods. *SIAM J. Control & Optim.*, 1997, **35**(2):500～511

刘允刚　上海交通大学博士. 主要研究兴趣为随机非线性系统的镇定与优化控制设计、鲁棒控制.

施颂椒　上海交通大学教授，博士生导师. 主要研究方向为自适应控制及鲁棒控制.

潘子刚　美国伊利诺斯州大学俄巴那香槟分校博士，加州大学圣巴巴那大学博士后. 主要研究领域为鲁棒控制、自适应控制等.