第27卷 第2期
2001年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 2
Mar., 2001

短文

不满足匹配条件的非确定性系统的鲁棒滑模控制

李 辉 谢剑英

(上海交通大学自动化研究所 上海 200030)

(E-mail: lihui@controlnet. dhs. org)

摘 要 针对一类非确定性时变系统实施滑模控制,该系统在状态矩阵和控制输入矩阵中都包含不满足匹配条件的不确定项.给出了能使系统鲁棒镇定的切换面设计方法和相应的控制律的形式.同时,也给出了系统渐近稳定的充分条件.设计过程中的代数黎卡提方程和线性矩阵不等式形式简单,易于求解.仿真结果证明了理论的正确性.

关键词 滑模控制,匹配条件,黎卡提方程.

ROBUST SMC OF UNCERTAIN TIME-VARYING SYSTEMS DISSATISFYING MATCHING CONDITION

LI Hui XIE Jian-Ying

(*Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

(E-mail: lihui@controlnet. dhs. org)

Abstract In this paper, the SMC approach is applied to the system in order to establish robust stability against uncertainties both in the system matrix and input matrix. The method of switching surface designing and the control law are given. Sufficient conditions under which the sliding mode system is quadratically stable are also deduced. The relative algebraic Riccati equation and linear matrix inequality are quite simple, thus can be solved without much difficulty. Simulation results confirm the validity of the scheme.

Key words Sliding mode control, matching condition, riccati equation.

1 引言

在滑模控制系统中,系统从初始状态出发于有限时间内到达切换面,在高速切换的控制作用下沿着切换面继续运动,直至稳定.滑模控制的优点在于它的强鲁棒性.当不确定

收稿日期 1999-03-25 收修改稿日期 1999-12-01

项满足匹配条件且上界已知时,只需在控制上作相应的调整,系统的滑动模态将不受任何影响.当不满足匹配条件时,不变性不再存在.与此相关的文献已有不少,如文献[1]等,但是这些文章所讨论的对象多是仅在状态矩阵中含有不确定项.本文在现有方法的基础上,进一步针对状态矩阵和输入矩阵中都有不满足匹配条件的不确定项,讨论它们的切换面设计和控制律设计问题.

2　系统描述和切换面的设计

考虑满足广义匹配条件的非确定性线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A+DF(t)E_a]\boldsymbol{x}(t)+[B+DF(t)E_b]\boldsymbol{u}(t),\qquad F(t)^{\mathrm{T}}F(t)\leqslant I,\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态向量,$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是输入向量,$A\in R^{n\times n}$,$B\in R^{n\times m}$,$D\in R^{n\times p}$,$E_a\in R^{q\times n}$,$E_b\in R^{q\times m}$是常阵,$F(t)\in R^{p\times q}$是带有不确定参数的时变矩阵.不失一般性,假设 B 满秩,设计切换面为

$$\boldsymbol{S}=C\boldsymbol{x}=0,\tag{2}$$

其中 $C\in R^{m\times n}$,且对于任何 $F(t)$均满足

$$\det[CB+CDF(t)E_b]\neq 0.\tag{3}$$

在满足条件(3)的前提下,可得系统在切换面上的滑动运动方程

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=[A+DF(t)E_a]\boldsymbol{x}(t)+[B+DF(t)E_b]\cdot\{-[CB+CDF(t)E_b]^{-1}\\&\quad C[A+DF(t)E_a]\boldsymbol{x}(t)\}=\{I-[B+DF(t)E_b]\\&\quad [CB+CDF(t)E_b]^{-1}C\}[A+DF(t)E_a]\cdot\boldsymbol{x}(t).\end{aligned}\tag{4}$$

为了便于分析,现将状态空间在切换面及其正交子空间上进行分解[2]

$$\boldsymbol{x}(t)=[C^{\mathrm{T}}\quad K]\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix},\tag{5}$$

此处 $K\in R^{n\times(n-m)}$是满足条件 $\det[C^{\mathrm{T}}\quad K]\neq 0$,$CK=0$的常阵.

将(5)式代入(4)式,于是系统方程可转化为$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}$,切换函数可转化为 $\boldsymbol{S}(t)=[CC^{\mathrm{T}}\quad 0]\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}$.当 $\boldsymbol{S}(t)=0$时,显然 $\boldsymbol{x}_1=0$.也就是说,当系统在切换面上运动时,系统的动态特性完全取决于下列降阶子系统的动态特性:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)=A_{22}\boldsymbol{x}_2(t).\tag{6}$$

为了便于推导 A_{22}的具体表达式,取 C,K 的 MP 逆(Moore-Penrose Inverse)C^+,K^+如下:

$$C^+=C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1},\qquad K^+=(K^{\mathrm{T}}K)^{-1}K^{\mathrm{T}}.$$

由于$\begin{bmatrix}(C^+)^{\mathrm{T}}\\ K^+\end{bmatrix}[C^{\mathrm{T}}\quad K]=I$,降阶子系统可以化为

$$A_{22}=K^+\{I-[B+DF(t)E_b][CB+CDF(t)E_b]^{-1}C\}[A+DF(t)E_a]K.$$

引理1. (和式逆定理)若 A^{-1},$(I+CA^{-1}B)^{-1}$存在,则下式成立:

$$(A+BC)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}.$$

证明略.

引理2. 对于任意 $F(t)$，下面的等式恒成立：

$$\{I-[B+DF(t)E_b][CB+CDF(t)E_b]^{-1}C\}[A+DF(t)E_a]=$$
$$[I-B(CB)^{-1}C]A+[B(CB)^{-1}CD-D]F(t)\times$$
$$[I+E_b(CB)^{-1}CDF(t)]^{-1}[E_b(CB)^{-1}CA-E_a].$$

证明. 可利用引理1加以证明，这里限于篇幅略去具体证明过程.

引理3[3]. 给定矩阵 U,V,H，对于任意满足 $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta\leqslant I$ 的 Δ，不等式

$$U\Delta(I-H\Delta)^{-1}V+V^{\mathrm{T}}(I-H\Delta)^{-\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}\leqslant V^{\mathrm{T}}V+$$
$$(U+V^{\mathrm{T}}H)(I-H^{\mathrm{T}}H)^{-1}(U^{\mathrm{T}}+H^{\mathrm{T}}V)$$

恒成立.

证明. 见文献[3].

在引理2的基础上，(6)式可以简化为 $\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)=K^{t}[\hat{A}+\hat{B}F(t)(I-\hat{D}F(t))^{-1}\hat{C}]K\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)$，其中 $\hat{A}=[I-B(CB)^{-1}C]A$, $\hat{B}=[I-B(CB)^{-1}C]D$, $\hat{C}=E_a-E_b(CB)^{-1}CA$, $\hat{D}=-E_b(CB)^{-1}CD$. 另外，由 MP 逆的性质有 $[C^{\mathrm{T}}\quad K]\cdot\begin{bmatrix}(C^{+})^{\mathrm{T}}\\K^{+}\end{bmatrix}=I$ 于是 $KK^{+}=I-C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}C$, $KK^{+}\hat{A}=[I-C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}C]\cdot[I-B(CB)^{-1}C]A=[I-B(CB)^{-1}C]A=\hat{A}$. 同理, $KK^{+}\hat{B}=\hat{B}$.

以下针对变量 $\boldsymbol{x}_2$ 定义李亚普洛夫函数：$V(\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}PK\boldsymbol{x}_2$（$P$ 为正定阵），则

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}_2)=&\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}PK\dot{\boldsymbol{x}}_2+\dot{\boldsymbol{x}}_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}PK\boldsymbol{x}_2=\\&\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}PKK^{+}\{\hat{A}+\hat{B}F(t)[I-\hat{D}F(t)]^{-1}\hat{C}\}K\boldsymbol{x}_2(t)+\\&\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\{\hat{A}+\hat{B}F(t)[I-\hat{D}F(t)]^{-1}\hat{C}\}^{\mathrm{T}}KK^{\mathrm{T}}PK\boldsymbol{x}_2=\\&\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}\{P\hat{A}+P\hat{B}F(t)[I-\hat{D}F(t)]^{-1}\hat{C}+\hat{A}P^{\mathrm{T}}+\\&\hat{C}^{\mathrm{T}}\{[I-\hat{D}F(t)]^{-1}\}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)\hat{B}^{\mathrm{T}}P\}K\boldsymbol{x}_2.\end{aligned}$$

在引理3中，令 $U=P\hat{B}$, $V=\hat{C}$, $H=\hat{D}$，可得

$$\dot{V}(x_2)\leqslant\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}[P\hat{A}+\hat{A}P^{\mathrm{T}}+\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C}+(\hat{P}\hat{B}+\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{D})(I-\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{D})^{-1}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P+\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{C})]K\boldsymbol{x}_2,\tag{7}$$

于是，可以得到降阶子系统稳定的充分条件

定理1. 若 $K^{\mathrm{T}}[P\hat{A}+\hat{A}P^{\mathrm{T}}+\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C}+(\hat{P}\hat{B}+\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{D})(I-\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{D})^{-1}(\hat{B}^{\mathrm{T}}P+\hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{C})]K<0$，则由(6)式确定的子系统渐近稳定.

进一步，为了便于实际求解，我们推导出下面的定理：

定理2. 若对于给定的正定阵 $Q\in R^{n\times n}$，存在一个对称正定阵 $P\in R^{n\times n}$，满足代数黎卡提方程

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+PDD^{\mathrm{T}}P+E_a^{\mathrm{T}}E_a+Q=0,\tag{8}$$

并且 P 满足

$$\det(B^{\mathrm{T}}PB+E_b^{\mathrm{T}}E_aB)\neq 0,\tag{9}$$

$$\mathrm{LMI}:\begin{bmatrix}-Q & A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}+PDD^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\\MA+MDD^{\mathrm{T}}P & -I+MDD^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}<0,\tag{10}$$

其中

$$M = E_b(B^{\mathrm{T}}PB + E_b^{\mathrm{T}}E_aB)^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + E_b^{\mathrm{T}}E_a). \tag{11}$$

选取切换函数系数为

$$C = -(B^{\mathrm{T}}P + E_b^{\mathrm{T}}E_a), \tag{12}$$

那么降价子系统(6)渐近稳定.

证明. 由(9)式得 $\det CB=\det[-(B^{\mathrm{T}}P+E_b^{\mathrm{T}}E_a)B]=-\det(B^{\mathrm{T}}PB+E_b^{\mathrm{T}}E_aB)\neq 0$. 条件(3)等价于 $\det[I+(CB)^{-1}CDF(t)E_b]\neq 0$,于是也等价于 $\det\{I-E_b(CB)^{-1}CDD^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}[(CB)^{-1}]^{\mathrm{T}}E_b^{\mathrm{T}}\}\neq 0$. 由式(10),式(11)可得 $\det\{I-E_b(CB)^{-1}CDD^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}[(CB)^{-1}]^{\mathrm{T}}E_b^{\mathrm{T}}\}=\det(I-MD^{\mathrm{T}}DM^{\mathrm{T}})\neq 0$. 根据 Schur 余量等价性,条件(7)等价于

$$\begin{bmatrix} K^{\mathrm{T}}(\hat{A}^{\mathrm{T}}P + P\hat{A} + \hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C})K & K^{\mathrm{T}}(P\hat{B} + \hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{D}) \\ (\hat{B}^{\mathrm{T}}P + \hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{C})K & -I + \hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{D} \end{bmatrix} < 0. \tag{13}$$

根据附录 A,(13)式又等价于

$$\begin{bmatrix} K^{\mathrm{T}}(-PDD^{\mathrm{T}}P - Q + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MA)K & K^{\mathrm{T}}(PD + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MD) \\ (D^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MA)K & -I + D^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MD \end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

进一步由附录 B 还可以证明式(14)等价于式(10). 于是,命题得证.　　证毕.

基于以上的定理,已经可以设计出能够使系统在降阶子空间中稳定的切换面.

3　控制律的设计

为了使系统从任何初始状态都能到达切换面,根据下面的定理3设计控制律.

定理3. 若根据定理2设计出的 C 满足条件

$$1 - \|CD\|\cdot\|E_b(CB)^{-1}\| > 0, \tag{15}$$

选择参数 $K_d>0$,使得

$$(1 - \|CD\|\cdot\|E_b(CB)^{-1}\|)\cdot K_d > \|CD\|\cdot\|E_a - E_b(CB)^{-1}CA\|, \tag{16}$$

构造变结构控制

$$\boldsymbol{u}(t) = -(CB)^{-1}\left[CA\boldsymbol{x}(t) + K_d\frac{\|\boldsymbol{x}(t)\|}{\|\boldsymbol{S}(t)\|}\boldsymbol{S}(t)\right], \tag{17}$$

可使系统从任何初始状态到达切换面.

证明. 定义李亚普洛夫函数:$V(t)=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}(t)$,则

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = {} & 2\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\boldsymbol{S}}(t) = \\ & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(t)\{C[A + DF(t)E_a]\boldsymbol{x}(t) + C[B + DF(t)E_b]\boldsymbol{u}(t)\} = \\ & \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(t)\Big\{CDF(t)[E_a - E_b(CB)^{-1}CA]\boldsymbol{x}(t) + \\ & [-I - CDF(t)E_b(CB)^{-1}]K_d\frac{\|\boldsymbol{x}(t)\|}{\|\boldsymbol{S}(t)\|}\boldsymbol{S}(t)\Big\} \leqslant \\ & \|CD\|\cdot\|E_a - E_b(CB)^{-1}CA\|\cdot\|\boldsymbol{S}(t)\|\cdot\|\boldsymbol{x}(t)\| + \\ & K_d[-1 + \|CD\|\cdot\|E_b(CB)^{-1}\|]\cdot\|\boldsymbol{S}(t)\|\cdot\|\boldsymbol{x}(t)\|,\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{S}(t)\neq 0$ 时,$\dot{V}(t)<0$,命题得证.　　证毕.

4 仿真实例

对于系统(1),设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$,$D=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.3\end{bmatrix}$,$E_a=[0.3 \quad 0.3]$,$E_b=0.2$,$F(t)=\cos t$. 取 $Q=0.1\times I$,通过(8)式,可解得 $P=\begin{bmatrix}0.257 & 0.092\\ 0.092 & 0.059\end{bmatrix}$;根据式(12),求出 $C=[-1.6830 \quad -1.6175]$;(9)式中,$\det(B^{\mathrm{T}}PB+E_b^{\mathrm{T}}E_aB)=0.3551\neq 0$;式(10)中,左边矩阵的特征值分别为 -0.1000,-1.0227,-0.0722,都小于零;式(15)中,$1-\|CD\|\cdot\|E_b(CB)^{-1}\|=0.9388>0$;要满足(16)式中的不等式,必需 $K_d>0.6725$,仿真中取 $K_d=2$. 仿真结果见图1和图2.(初始状态 $x_0=[5 \quad 4]^{\mathrm{T}}$)

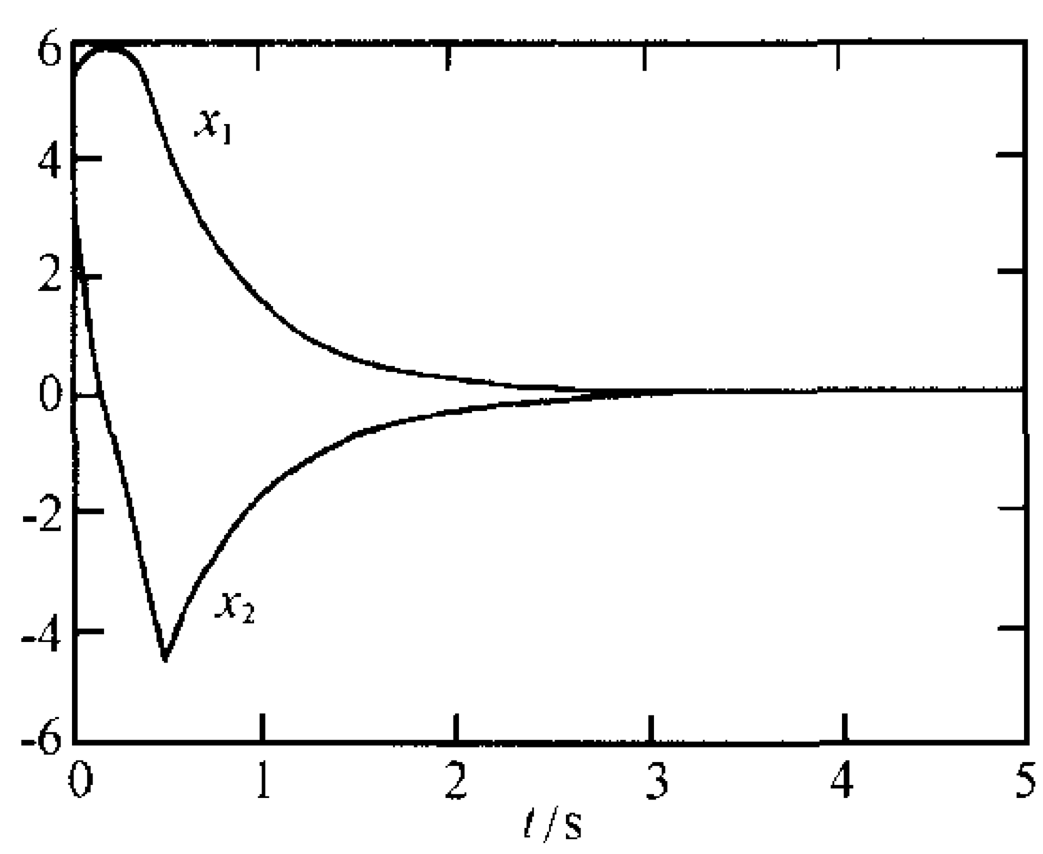

图1 系统状态 x_1 和 x_2 随时间的变化曲线

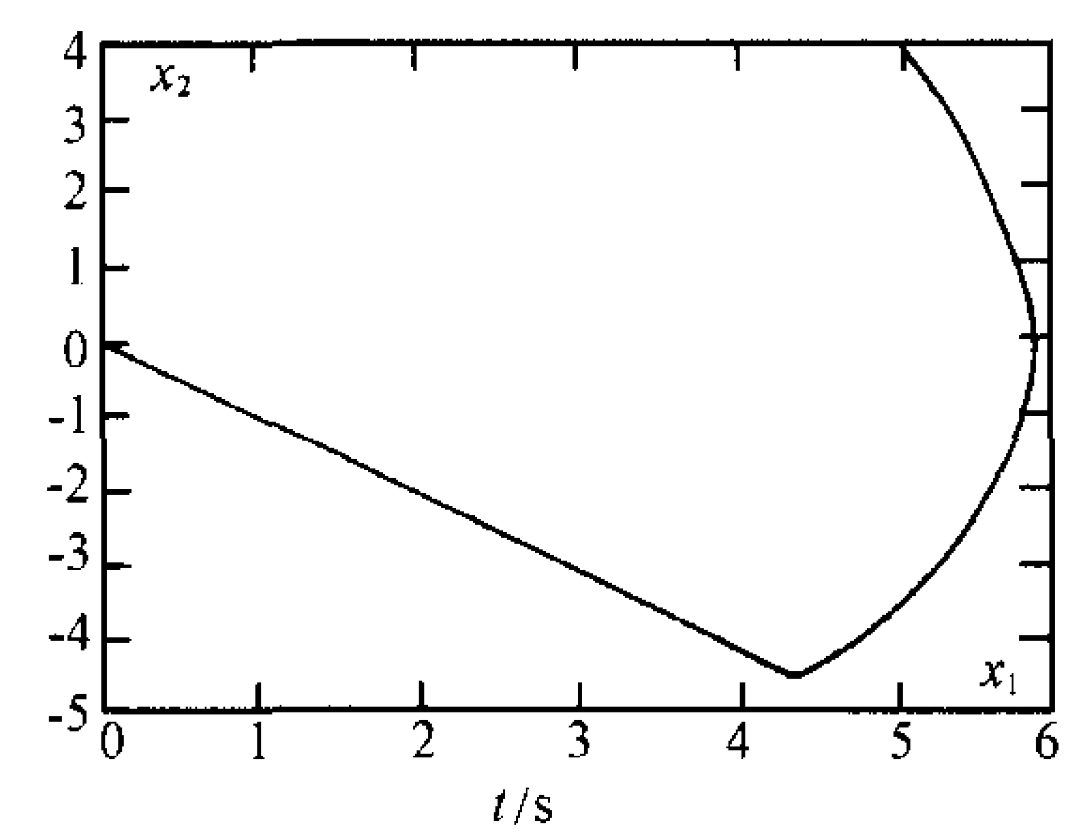

图2 相平面图

本文针对在状态矩阵项和输入矩阵项中都包含不满足匹配条件的时变不确定项的系统设计滑模控制,通过求解代数黎卡提方程和线性矩阵不等式,并选取适当的参数来确定线性切换面,辅以适当的变结构控制律,可实现系统的鲁棒镇定. 仿真结果证明了方法的正确性.

参 考 文 献

1 Kwan C M. Sliding mode control of linear systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, 1995, **31**: 303～307

2 Fujisaki Y, Yasuda K. Sliding Mode Control of Uncertain System. In: Proc. IMACS/SICE International Symposium on Robotics, Mechatronics and Manufacturing System'92, Kobe, 9. Japan: 1992. 16～20

3 Yamamoto S, Kimura H. Quadratic stabilization control via H^{∞} controller and tuning up by time-varying gain. *Trans. Soc. Ins. Contr. Eng.*, 1996, **32**: 486～494

附录 A

证明式(13),(14)的等价关系.

证明之前,先给出将用到的等式

$$E_b(CB)^{-1}C=E_b(B^{\mathrm{T}}PB+E_b^{\mathrm{T}}E_aB)^{-1}(B^{\mathrm{T}}P+E_b^{\mathrm{T}}E_a)=M,$$

$$K^{\mathrm{T}}PB=-K^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}+E_a^{\mathrm{T}}E_b)=-K^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}-K^{\mathrm{T}}E_a^{\mathrm{T}}E_b=-K^{\mathrm{T}}E_a^{\mathrm{T}}E_b.$$

在式(13)中

$$K^{\mathrm{T}}(\hat{A}^{\mathrm{T}}P+P\hat{A}+\hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{C})K=$$

$$K^{\mathrm{T}}\{A^{\mathrm{T}}[I-B(CB)^{-1}C]^{\mathrm{T}}P+P[I-B(CB)^{-1}C]A+[E_a-MA]^{\mathrm{T}}[E_a-MA]\}K=$$

$$K^{\mathrm{T}}\{A^{\mathrm{T}}P + A^{\mathrm{T}}[(CB)^{-1}C]^{\mathrm{T}}E_b^{\mathrm{T}}E_a + PA + E_a^{\mathrm{T}}E_b[(CB)^{-1}C]A + [E_a - MA]^{\mathrm{T}}[E_a - MA]\}K =$$
$$K^{\mathrm{T}}\{A^{\mathrm{T}}P + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}E_a + PA + E_a^{\mathrm{T}}MA + E_a^{\mathrm{T}}E_a - E_a^{\mathrm{T}}MA - (MA)^{\mathrm{T}}E_a + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MA]\}K =$$
$$K^{\mathrm{T}}\{A^{\mathrm{T}}P + PA + E_a^{\mathrm{T}}E_a + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MA]\}K =$$
$$K^{\mathrm{T}}\{- PDD^{\mathrm{T}}P - Q + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MA]\}K, \tag{A1}$$
$$K^{\mathrm{T}}[P\hat{B} + \hat{C}^{\mathrm{T}}\hat{D}] =$$
$$K^{\mathrm{T}}\{P[I - B(CB)^{-1}C]D - [E_a - E_b(CB)^{-1}CA]^{\mathrm{T}}[E_b(CB)^{-1}CD]\} =$$
$$K^{\mathrm{T}}[PD + (C^{\mathrm{T}} + E_a^{\mathrm{T}}E_b)(CB)^{-1}CD - E_a^{\mathrm{T}}MD + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MD] =$$
$$K^{\mathrm{T}}[PD + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MD] + (CK)^{\mathrm{T}}(CB)^{-1}CD =$$
$$K^{\mathrm{T}}(PD + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MD). \tag{A2}$$

经转置可得

$$(\hat{B}^{\mathrm{T}}P + \hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{C})K = (D^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MA)K, \tag{A3}$$
$$- I + \hat{D}^{\mathrm{T}}\hat{D} = - I + D^{\mathrm{T}}[E_b(CB)^{-1}C]^{\mathrm{T}}[E_b(CB)^{-1}C]D = - I + D^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MD. \tag{A4}$$

综合式(A1)～(A4),于是式(13)与式(14)等价.

附录 B

证明式(14),(10)的等价关系.

利用 Schur 余量的等价关系,式(14)等价于

$$W1 = K^{\mathrm{T}}\{(- PDD^{\mathrm{T}}P - Q + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MA) - (PD + A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MD)(- I + D^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MD)^{-1}(D^{\mathrm{T}}P + D^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}MA)\}K < 0,$$

式(10)等价于

$$W2 = K^{\mathrm{T}}\{(- Q) - (A^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} + PDD^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}})(- I + MDD^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(MA + MDD^{\mathrm{T}}P)\}K < 0.$$

设 $PD=X,MD=Y,MA=Z$,则

$$\begin{aligned}W1 - W2 = &\\ &K^{\mathrm{T}}[- XX^{\mathrm{T}} - Q + Z^{\mathrm{T}}Z - (X + Z^{\mathrm{T}}Y)(- I + Y^{\mathrm{T}}Y)^{-1}(X^{\mathrm{T}} + Y^{\mathrm{T}}Z)]K - \\ &K^{\mathrm{T}}[- Q - (Z^{\mathrm{T}} + XY^{\mathrm{T}})(- I + YY^{\mathrm{T}})^{-1}(Z + YX^{\mathrm{T}})]K = \\ &K^{\mathrm{T}}\{- XX^{\mathrm{T}} - XY^{\mathrm{T}}Z - Z^{\mathrm{T}}YX^{\mathrm{T}} - XY^{\mathrm{T}}YX^{\mathrm{T}} + \\ &[- X(- I + Y^{\mathrm{T}}Y)^{-1}Y^{\mathrm{T}}Z + XY^{\mathrm{T}}Y(- I + Y^{\mathrm{T}}Y)^{-1}Y^{\mathrm{T}}Z] + \\ &[- Z^{\mathrm{T}}Y(- I + Y^{\mathrm{T}}Y)^{-1}X^{\mathrm{T}} + Z^{\mathrm{T}}Y(- I + Y^{\mathrm{T}}Y)^{-1}Y^{\mathrm{T}}YX^{\mathrm{T}}] + \\ &[- X(- I + Y^{\mathrm{T}}Y)^{-1}X^{\mathrm{T}} + XY^{\mathrm{T}}Y(- I + Y^{\mathrm{T}}Y)^{-1}Y^{\mathrm{T}}YX^{\mathrm{T}}]\}K = \\ &K^{\mathrm{T}}\{- XX^{\mathrm{T}} - XY^{\mathrm{T}}YX^{\mathrm{T}} + XX^{\mathrm{T}} + XY^{\mathrm{T}}YX^{\mathrm{T}}\}K = 0.\end{aligned}$$

所以 $W1=W2$,即式(14)与式(10)等价.

李　辉　1975年生.1994年毕业于西安交通大学电气系获学士学位,1997年毕业于上海交通大学信控系获硕士学位,现已获上海交通大学控制理论与控制工程专业博士学位.主要研究方向为变结构控制、智能控制、计算机网络.

谢剑英　1940年生.1964年毕业于上海交通大学自动化系,现为上海交通大学教授、博士生导师.研究领域为复杂工业过程建模、控制与优化、网络工程与信息系统集成.