第27卷 第2期
2001年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 2
Mar., 2001

状态反馈中圆形极点与状态方差约束的相容性

王远钢 郭 治

(南京理工大学自动化系 南京 210094 E-mail: wyg@acl.dhs.org)

摘 要 对一类线性随机系统的状态反馈问题，研究了两类约束指标：状态方差与圆形区域极点的相容性，并对具有指定圆形极点及相容状态方差约束的控制问题给出了满意控制设计方法. 用线性矩阵不等式(LMIs)刻划了圆形极点约束下系统存在反馈控制律的充要条件；通过求解 LMIs 约束下矩阵迹的极值问题，给出了方差约束指标的较好容许范围；算例说明本成果简洁、有效.

关键词 圆形极点约束，方差约束，约束指标的相容性，LMI 方法，满意控制设计.

CONSISTENCY OF CIRCULAR POLE AND STATE VARIANCE CONSTRAINTS IN STATE-FEEDBACK CONTROL

WANG Yuan-Gang GUO Zhi

(Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

(E-mail: wyg@acl.dhs.org)

Abstract The consistency of constraint indices of state variance and circular pole is studied for a class of stochastic systems with state feedback control. Two necessary and sufficient conditions are given, in terms of linear matrix inequalities (LMIs), for the existence of state feedback control with circular pole constraints. Satisfactory control design methods are provided for state feedback control with constraints of circular pole and consistent state-variance. By finding the maximum and minimum of matrix trace subject to LMIs, a good range is presented for all steady state-variance which is consistent with the given regional pole. Finally, an example illustrates that obtained results in this paper are of simplicity and validity.

Key words Circular pole constraints, variance constraints, consistency of constraint indices, LMI approach, satisfactory control design.

1 引言

工程控制系统的性能要求通常不只是单项指标的最优或次优，而是多项性能指标下

收稿日期 1999-04-09 收修改稿日期 1999-09-08

的满意.但系统的多项性能指标之间是否相容,亦即是否存在一种控制使所有期望指标集同时得以满足,期望指标集相容时给出控制设计方法,这是多指标约束控制必须解决的问题.对于系统相容的指标集,我们称之为系统的满意指标集,相应的控制称为系统的满意控制.文献[1]对工程控制中"满意控制与估计"这一新概念作了详细的阐述.本文对一类线性随机系统的状态反馈控制,研究期望指标集:圆形区域极点约束与状态方差约束的相容性,并在期望指标相容时给出求取满意控制的方法.

文献[2~4]提出的协方差控制理论,对解决单纯协方差或方差约束的控制问题具有很好的效果,但直接选择其中刻划相应控制的自由参数,以期达到系统的其它性能指标具有很大的局限性,因为带自由度的控制集是相对某个固定的可配置矩阵给出的.文献[5]将极点约束融入协方差控制理论,对具有圆形区域极点及状态方差约束的控制问题作了有益的探讨;有关区域极点与方差约束的反馈控制问题也有了不少研究成果[6~10].但这些研究工作对约束指标:区域极点与方差的相容性均未作讨论,并且其中"可配置矩阵"所满足的线性矩阵不等式是从一个修正的 Lyapunov 方程导出的,而此方程有正定解同时隐含了圆形极点约束及状态方差上界约束,这就导致所有可配置矩阵往往具有较大的下界,从而基于这种可配置矩阵的控制设计具有较大的局限性.

本文将极点约束与方差约束分开、用不同的也是比较自然的方式表示,利用 Schur 补[11]将具有给定圆形区域极点约束的状态反馈控制的存在性问题转化成了两个矩阵变量(Q, S)的 LMIs 解的存在性问题;通过求解 LMIs 约束下 $\mathrm{tr}(Q)$的极值问题,对给定圆形区域极点约束下闭环系统所有稳态状态方差的取值范围给出了很好的描述,从而为工程应用中状态方差约束指标的合理设定及优化提供了依据;对同时具有指定圆形极点及状态方差上界约束或区间状态方差约束的控制问题给出了求取满意控制的设计方法.这些方法简便易行,只需解受 LMI 约束的线性规划问题.用例子说明了文中的结果,且例中区间状态方差约束的"右端"小于文[5]中所有可配置矩阵的下界.

2 问题的描述

考虑如下线性时不变连续随机系统($S1$)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + D\boldsymbol{w}(t), \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = G\boldsymbol{x}(t), \tag{1b}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^{n_x}$为状态;$\boldsymbol{u}(t)\in R^{n_u}$为控制输入;$\boldsymbol{w}(t)\in R^{n_w}$为零均值高斯白噪声过程,其强度为 $W>0$,初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$与 $\boldsymbol{w}(t)$不相关;A、B、D 是适维实常矩阵;G 是待求的定常反馈增益.

对系统(S1),作如下假设:

H_1). (A,B)可稳,(A,D)可扰.

众所周知,若系统(S1)存在反馈增益 G,则闭环系统(S2)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + BG)\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{w}(t) \tag{2}$$

渐近稳定时,其稳态状态协方差矩阵

$$X = \lim_{t\to\infty}X(t) = \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\},$$

必满足如下代数 Lyapunov 方程

$$(A + BG)X + X(A + BG)^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} = 0. \tag{3}$$

本文除常用标准符号外，用符号 $F(q, r)$ 表示复平面上中心在 $-q+j0$，半径为 r 的圆 $(0<r<q)$，eig(·)表示方阵的特征值组成的行向量，对于两个同维向量 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{M}\leqslant\boldsymbol{N}$ 表示各分量不等式同时成立，并用 diag(P)表示方阵 P 的对角元素组成的行向量.

定义1. 给定圆盘 $F(q, r)$ 及向量 $\sigma^2\geqslant0$，若系统(S1)存在定常状态反馈增益阵 G，使相应的闭环系统(S2)同时满足如下圆形极点与状态方差约束：

a) 闭环系统矩阵的极点集 $\Lambda(A+BG)\subset F(q, r)$；

b) 状态协方差矩阵 X 满足 $\mathrm{diag}(X)\leqslant\boldsymbol{\sigma}^2$(或 $\mathrm{diag}(X)\geqslant\boldsymbol{\sigma}^2$).

则称方差上界(或下界)指标 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 与圆形极点区域 $F(q, r)$ 相对于系统(S1)的定常状态反馈控制是相容的. 简称方差上界(或下界)指标 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 与极点区域 $F(q, r)$ 相容.

本文的目的是：研究系统(S1)的所有与区域 $F(q, r)$ 相容的约束方差指标 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 的取值范围. 并对同时具有圆形区域极点和方差约束的反馈问题给出一种有效的控制设计方法.

3　主要结论

将文献[5]中的一个引理改用不等式描述，利用 Schur 补得到了系统(S1)存在反馈增益 G 使约束 a)成立的、用 LMIs 描述的两个充要条件；通过求解 LMIs 约束的线性规划问题得到了与 $F(q, r)$ 相容的稳态状态方差的一种较好取值范围，并对同时具有极点约束 a)及方差上界约束 b)或区间方差约束的控制问题给出满意的控制设计方法.

引理1. 系统(S1)存在控制增益 G 使约束 a)成立的充分必要条件是(Q,G)的以下 Lyapunov 矩阵不等式有解且 $Q>0$

$$(A+BG+qI)Q(A+BG+qI)^{\mathrm{T}}-r^2Q+qDWD^{\mathrm{T}}<0. \tag{4}$$

证明. 由文献[5]的引理得系统(S1)存在控制增益 G 使约束 a)成立的充分必要条件是矩阵变量 Q 的修正 Lyapunov 方程

$$(A+BG+qI)Q(A+BG+qI)^{\mathrm{T}}-r^2Q+qDWD^{\mathrm{T}}=0 \tag{5}$$

有唯一正定解 Q_G；且若 G 使 a)成立，则上述方程的解 Q_G 与相应稳态状态方差阵 X 之间必满足关系 $Q_G>X$. 由此可得引理结论.

注1. 对使约束 a)成立的控制增益 G，若记 Φ_G 为不等式(4)的正定解集，则相应方程(5)的解 Q_G 是 Φ_G 的唯一下确界，也是 Φ_G 的闭集中达到 $\min\{\mathrm{tr}(Q)\}$ 的唯一正定矩阵. 于是将式(4)化为 LMI 形式可求得方程(5)的所有解(Q_G,G)集中的 $\min\{\mathrm{tr}(Q_G)\}$，以及相应极小阵(记为 Q_{1L}).

定理1. 系统(S1)存在控制增益 G 使约束 a)成立的充要条件是(Q, S)的以下 LMIs

$$\begin{bmatrix} -rQ & (A+qI)Q+BS \\ Q(A+qI)^{\mathrm{T}}+S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -rQ \end{bmatrix}<0, \tag{6}$$

$$AQ+QA^{\mathrm{T}}+BS+S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}<0 \tag{7}$$

有解；且若(Q, S)是上述不等式的解，则 $G=SQ^{-1}$ 必使约束 a)成立，而相应的稳态状态方差阵 X 与 Q 之间必满足关系 $Q>X$.

证明. 由引理1可得系统(S1)存在控制增益 G 使约束 a)成立的一个充要条件是(Q, G)的以下矩阵不等式组

$$(A+qI+BG)Q(A+qI+BG)^{\mathrm{T}}-r^2Q<0, \tag{8}$$

$$(A+BG)Q+Q(A+BG)^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}<0 \tag{9}$$

有解且 $Q>0$. 又若 (Q,G)是上述不等式组的解且 $Q>0$,则 G 作为控制增益阵必使约束 a)成立,且相应的稳态状态方差阵 X,Q 之间满足关系 $Q>X$. 事实上,上述充分性很容易由离散 Lyapunov 方程理论得到;而展开不等式(4)即可得上述必要性;比较方程(3)与不等式(9)即得 X 与 Q 之间的关系.

于是,记 $S=GQ$,并借助 Schur 补[11]即可得本定理结论.

记 $\Omega_1=\{(Q,S)\mid$使式(6),(7)成立$\}$,则可用 Lmi-lab[12]求出 Ω_1中的 $\min\{\mathrm{tr}(Q)\}$、相应极小阵 Q_L 及相应稳态状态方差阵 X_L. 当然 $Q_L\geqslant X_L$ 且 $\mathrm{diag}(Q_L)\geqslant\mathrm{diag}(X_L)$这样求出的 X_L 是约束 a)下闭环系统所有稳态状态方差阵中的较小者,因为对于使 a)成立的 G,式(8)对其正定解 Q 的任意正伸缩仍然成立,而式(9)的解集以式(3)的解为其下确界.

推论1. 对满足条件 H_1)的系统(S1),所有满足 $\boldsymbol{\sigma}^2>\mathrm{diag}(X_L)$的向量 $\boldsymbol{\sigma}^2$作为方差上界约束指标都与极点区域 $F(q,\ r)$相容.

定理2. 系统(S1)存在控制增益 G 使约束 a)和上界约束 b)同时成立的充分条件是变量(Q,S)的如下 LMIs

$$\begin{bmatrix} -rQ & (A+qI)Q+BS \\ Q(A+qI)^{\mathrm{T}}+S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -rQ \end{bmatrix}<0, \tag{10}$$

$$AQ+QA^{\mathrm{T}}+BS+S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}<0 \tag{11}$$

$$\mathrm{diag}(Q)\leqslant\boldsymbol{\sigma}^2 \tag{12a}$$

有解;且若(Q,S)是上述不等式组的解,则 $G=SQ^{-1}$就是一个期望的控制增益阵.

注2. 对给定的极点区域 $F(q,\ r)$,若方差上界指标 $\boldsymbol{\sigma}^2$满足 $\boldsymbol{\sigma}^2>\mathrm{diag}(Q_L)$,则上述不等式组必有解,且其可行解可通过求解$(Q,S)$的 LMIs:(10) ,(11)以及

$$Q<Q_1 \tag{12b}$$

得到,其中 Q_1满足:$Q_1>Q_L$,$\mathrm{diag}(Q_1)=\boldsymbol{\sigma}^2$,(这种 Q_1很容易找到). 而且,对使约束 a)成立的控制增益 G,若 Q 是式(8),(9)的正定解,则对任意正数 $\lambda>1$,λQ 仍是式(8),(9)的正定解,所以式(10),(11)的所有解(Q,S)中 Q 无上界,从而受不等式(10),(11),(12b)约束的极值问题 $\max\{\mathrm{tr}(Q)\}$相应的极大阵 Q 将尽可能地接近 Q_1,从而 $\mathrm{diag}(Q)$将尽可能地接近 $\boldsymbol{\sigma}^2$.

若系统(S1)还满足条件

H_2). $DWD^{\mathrm{T}}>0$. 则以下定理既刻划了系统(S1)存在控制增益 G 使约束 a)成立的另一充分必要条件,又可用来估计给定约束 a)后闭环系统所有稳态状态方差阵可达到的较大值.

定理3. 假设条件 H_1),H_2)成立,则系统(S1)存在控制增益 G 使约束 a)成立的充分必要条件是$(Q,\ S)$以下 LMIs

$$\begin{bmatrix} -rQ & (A+qI)Q+BS \\ Q(A+qI)^{\mathrm{T}}+S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -rQ \end{bmatrix}<0, \tag{13}$$

$$AQ+QA^{\mathrm{T}}+BS+S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}>0 \tag{14}$$

有解;又若$(Q,\ S)$是上述不等式组的解,则 $G=SQ^{-1}$必使约束 a)成立,且相应的 Q 与稳态状态方差阵 X 满足关系 $X>Q$.

证明. 与定理1 的证明类似. 只要注意到:若增益 G 使约束 a)成立,Q 是式(8)的一个

正定解,则由 $DWD^{\mathrm{T}}>0$,可得对充分小正数 λ 必有 $(Q_1,G)=(\lambda Q,\ G)$ 同时满足

$$(A+qI+BG)Q(A+qI+BG)^{\mathrm{T}}-r^2Q<0, \tag{15}$$

$$(A+BG)Q+Q(A+BG)^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}>0, \tag{16}$$

且 $Q_1>0$. 于是又有:系统(S1)存在控制增益 G 使约束 a)成立的一个充分必要条件是 (Q,G) 的以上矩阵不等式组(15),(16)有解,且 $Q>0$;而且若增益阵 G 使约束 a)成立,则上述不等式组的任意正定解 Q 与相应的稳态状态方差阵 X 之间满足关系 $X>Q$.

再记 $S=GQ$,利用 Schur 补即可得定理3的结论.

记 $\Omega_2=\{(Q,S)\mid$使(13),(14)成立$\}$,则可用 Lmi-lab 求出 Ω_2中的 $\max\{\mathrm{tr}(Q)\}$、相应的极大阵 Q_U 及相应的稳态状态方差阵 X_U. 当然 $X_U\geqslant Q_U$ 且 $\mathrm{diag}(X_U)\geqslant\mathrm{diag}(Q_U)$,而且 X_U 是约束 a)下闭环系统所有稳态状态方差阵中的较大者,因为对于使 a)成立的 G,不等式(15)对其正定解 Q 的任意正伸缩仍然成立,而不等式(16)的解集以式(3)的解为其上确界(这一点很容易得到).

推论2. 对满足条件 H_1),H_2)的系统(S1),所有满足 $\boldsymbol{\sigma}^2<\mathrm{diag}(X_U)$ 的向量 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 作为方差下界约束指标都与极点区域 $F(q\ ,r)$ 相容.

注3. 由定理1,3得,对于具有极点约束 a)和等式方差约束 $\mathrm{diag}(X)=\boldsymbol{\sigma}^2$ 的控制问题,为了确保系统存在期望的控制,一般要求方差指标 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 满足

$$\mathrm{diag}(X_L)\leqslant\boldsymbol{\sigma}^2\leqslant\mathrm{diag}(X_U),$$

而对于更有实际意义的 b)类方差约束:$\boldsymbol{\rho}^2\leqslant\mathrm{diag}(X)\leqslant\boldsymbol{\sigma}^2$,为了确保期望控制的存在,一般应要求方差指标 $\boldsymbol{\rho}^2,\boldsymbol{\sigma}^2$ 满足

$$\boldsymbol{\rho}^2\leqslant\mathrm{diag}(X_U),\boldsymbol{\sigma}^2\geqslant\mathrm{diag}(X_L).$$

注4. 以下基于定理2和注2的设计提供了一个较为有效的求取同时满足 a),b)的反馈控制的方法.

步骤1. 找一个正定阵 Q_1 使得 $\mathrm{diag}(Q)=\boldsymbol{\sigma}^2$,且 $Q_1>Q_L$;

步骤2. 用 LMI 方法求解受约束(6),(7)及 $Q<Q_1$ 的极值问题 $\max\{\mathrm{tr}(Q)\}$,并记 Q^* 是相应的极大阵.

步骤3. 再用 LMI 方法求解如下约束极小值问题

$$\min_{P,G}\{\mathrm{tr}(P)\}:$$

$$\begin{bmatrix}-r^2Q^* & A+qI+BG\\ (A+qI+BG)^{\mathrm{T}} & -(Q^*)^{-1}\end{bmatrix}<0, \tag{17}$$

$$-P<(A+BG)Q^*+Q^*(A+BG)^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}<0, \tag{18}$$

$$P>0, \tag{19}$$

其中不等式(17)是不等式(8)在 $Q=Q^*$ 时的等价形式.

若(P^*,G^*)是相应极小值的矩阵对,则有

$$-P^*\leqslant(A+BG^*)Q^*+Q^*(A+BG^*)^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}\leqslant 0, \tag{20}$$

从而对增益阵 G^* 相应的状态方差矩阵 X^*,有

$$-P^*\leqslant(A+BG^*)(Q^*-X^*)+(Q^*-X^*)(A+BG^*)^{\mathrm{T}}\leqslant 0. \tag{21}$$

第3步处理目的是为了降低 $\mathrm{diag}(X)$ 与 $\mathrm{diag}(Q^*)$ 的间隔.

注5. 若系统(S1)只满足条件 H_1),则通过选取分量较大的 $\boldsymbol{\sigma}^2$,并利用上述方法可估计

相应稳态状态方差阵中的较大者.

4 算例

取系统(S1)中的系数如下[5]:

$$A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0&0&1.2\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},W=I.$$

再假设极点约束区域为 $F(q,\ r)=F(3,\ 2)$. 则根据注1求得方程(5)的所有解(Q,G)中 $\min\{\mathrm{tr}(Q)\}=2.9446$,相应的极小阵为

$$Q_{1L}=\begin{bmatrix}1.4412&0&0\\0&0.7517&0\\0&0&0.7517\end{bmatrix}.$$

而根据定理1求得 Ω_1中 $\min\{\mathrm{tr}(Q)\}=0.5609$,相应的极小阵及状态方差阵分别为

$$Q_L=\begin{bmatrix}0.3603&0&0\\0&0.1003&0\\0&0&0.1003\end{bmatrix},X_L=\begin{bmatrix}0.36&0&0\\0&0.1001&0\\0&0&0.1001\end{bmatrix};$$

根据定理3解得 Ω_2中 $\max\{\mathrm{tr}(Q)\}=1.3795$,相应的极大阵及状态方差阵分别为

$$Q_U=\begin{bmatrix}0.3591&0&0\\0&0.4984&0\\0&0&0.4984\end{bmatrix},X_U=\begin{bmatrix}0.36&0&0\\0&0.4993&0\\0&0&0.4993\end{bmatrix}.$$

说明. 这里 Q_L 与 X_L 及 Q_U 与 X_U 均很接近. 分别作为 X_L,X_U 的近似值,Q_L,Q_U 不满足 $Q_L\leqslant Q_U$ 并不奇怪,因为上例中$(A,\ B)$可稳但不完全可控. 事实上状态分量 x_1不可控,其相应方差 X_{11}与控制增益无关,可由方程(4)经过分块处理求得($X_{11}=0.36$). 但一般地,当$(A,\ B)$完全可控时往往会有 $Q_L<Q_U$,这一点还有待理论证明.

假设 b)类约束中,$\boldsymbol{\rho}^2=[0.36,0.30,0.35]$,$\boldsymbol{\sigma}^2=[0.36,0.40,0.45]$. 由于这里上界指标 $\boldsymbol{\sigma}^2$不满足 $\boldsymbol{\sigma}^2>\mathrm{diag}(Q_L)$,所以不便直接利用注4,但因恒有 $X_{11}=0.36$,所以可将上界指标替换为 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^2=[0.361,0.40,0.45]$. 再利用注4所提方法求反馈控制. 取对角阵 Q_1: $\mathrm{diag}(Q_1)=\bar{\boldsymbol{\sigma}}^2$,求得

$$Q^*=\begin{bmatrix}0.3605&0&0\\0&0.3998&0\\0&0&0.4497\end{bmatrix},P^*=\begin{bmatrix}0.0020&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$X^*=\begin{bmatrix}0.36&0&0\\0&0.3998&0\\0&0&0.4497\end{bmatrix},G^*=\begin{bmatrix}0&-2.2506&-1.0000\\0&0&-2.1119\end{bmatrix},$$

$$\mathrm{eig}(A+BG^*)=[-1.1119,\ -1.2506,\ -2].$$

显然,即使将上述 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^2=[0.361,0.40,0.45]$作为方差上界约束,文献[5]所给的控制设计方法也会失效.

本文对一类线性时不变连续随机系统的状态反馈控制问题,研究了约束指标:状态方

差与圆形区域极点的相容性,给出了圆形极点约束下闭环系统所有稳态状态方差取值范围的较好描述,对同时具有圆形极点及方差约束的控制问题给出了控制设计方法.

参 考 文 献

1 郭治. 满意控制与估计概述. 见:1998年中国控制与决策学术年会论文集. 沈阳:东北大学出版社,1998. 1~6

2 Hotz A, Skelton R. E. A covariance control thorey. *Int J. Control*, 1987, **46**(1):13~32

3 Collins Jr E G,Skelton R E. A theory of state covariance assignment for discrete systems. *IEEE Trans. Autom. Control*,1987,**AC-32**(1):35~41

4 Skelton R E,Ikeda M. Covariance controllers for linear continuous-time systems. *Int. J. Control*,1989,**49**(5):1773~1785

5 Wang Zidong,Chen Xueming,Guo Zhi. Controller design with variance and circular pole constraints for continuous time systems,*Int. J. Syst. Sci.* ,1995,**26**(5):1249~1256

6 Wang Zidong,Guo Zhi. Circular pole and variance-constrained design for linear discrete systems. *Control Theory and Applications*,1997,**14**(1):105~111

7 王子栋,郭治. 区域极点及方差约束下的航天器拦截控制:静态输出反馈情形. 宇航学报,1997,**18**(1):13~17

8 王子栋,郭治. 配置区域极点的约束方差动态输出反馈控制. 自动化学报,1996,**22**(6):681~686

9 朱纪洪,郭治. 输出方差及圆形极点配置区约束下PI调节器设计. 南京理工大学学报,1995,**19**(6):529~532

10 孙翔,郭治. 带状区域极点配置及 H_∞ 指标下的约束方差综合控制. 火力与指挥控制,1998,**23**(增刊):20~24

11 Boyle S, Ghaoui L E,Feron E,Balakhrishnan V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. SIAM Series in Systems and Control, Philadelphia,1994

12 Gahinet P, Nemirovsky A, Laub A J, Hilali M. LMI Control Toolbox. Mathworks Inc. Mass. 1995

王远钢　1964年生. 讲师,博士生. 主要研究领域为控制系统期望指标集的相容性,随机系统的满意控制与估计.

郭　治　1937年生. 1961年毕业于哈尔滨军事工程学院,现为南京理工大学自动控制理论与工程专业教授、博士生导师、国务院学位委员会控制科学与工程学科评议组成员、中国兵工学会理事. 目前主要研究领域为随机系统的满意控制与估计.