



线性切换系统基于范数的系统 镇定条件及算法¹⁾

谢广明 郑大钟

(清华大学自动化系 北京 100084)

摘要 利用向量范数理论,讨论自治线性切换系统的镇定问题,给出了系统一种基于范数的可镇定的充分条件及镇定算法,当系统在满足一定条件的前提下,可以通过适当切换使系统渐进稳定.这种方法比一般的 Lyapunov 函数方法更容易应用.

关键词 混合动态系统,线性切换系统,镇定条件,镇定算法.

SYSTEM STABILIZATIONABLE CONDITION AND STABILIZATION ALGORITHM OF LINEAR SWITCHING SYSTEMS BASED ON VECTOR NORM THEORY

XIE Guang-Ming ZHENG Da-Zhong

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract Using the theory of vector norm, the stabilization problem of autonomic linear switching system is discussed. The stabilizationable condition and stabilization algorithm are presented. When it satisfies the condition, the system can be asymptotically stable under some fit switches. This method is more applicable than general Lyapunov function method.

Key words Hybrid dynamic system, linear switching system, stabilizationable condition, stabilization algorithm.

1 引言

混合动态系统(Hybrid Dynamic System, HDS)是同时包含连续时间变量和离散时间变量的复杂系统.切换系统(Switching System, SS)作为混合动态系统理论中一类有影响的重要模型,已日益受到国内外学者的广泛重视.目前关于切换系统的研究成果非常丰

1) 国家自然科学基金(60074012)、国家攀登计划(970211017)、“九七三”国家基础研究基金(G1998020305)和清华大学“九八五”基金基础研究基金资助项目.

收稿日期 1998-12-28 收修改稿日期 1999-06-26

富,为发展和完善混合动态系统理论作出了不小贡献.

自治线性切换系统的一般数学模型为

$$\dot{x}(t) = A(q(t))x(t),$$

其中 $q(t)$ 为系统的离散变量,假设取值于有限集 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$,

关于切换系统稳定性问题的研究结果^[1~3]一般都是基于 Lyapunov 函数的,一般只给出判断系统能够稳定的理论上的充分性条件,在实践上难以检验,同时也没有给出实现系统镇定的算法.这些结果停留在理论上的重要原因,是由于实际系统 Lyapunov 函数的寻找非常困难.然而向量范数,看成一种特定的 Lyapunov 函数,可以用来分析系统的稳定性及镇定问题.当然仅基于向量范数,有一定的局限性,但其避开了寻找 Lyapunov 函数这一难题,因此有较强的实际应用性,这是其最大的优点.本文首先引出矩阵的有限时间范数可下降方向集的概念,然后给出自治切换系统的镇定充分条件及镇定算法,给出例子验证结论,最后指出今后进一步的工作.

文中 $\|x\|$ 为一般的欧氏向量范数,即 $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,而对一般方阵 A ,其范数由向量范数导出,即 $\|A\| = \sup_{x \in R^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

2 有限时间范数可下降方向集

给定 n 维矩阵 A ,有限时间常数 $t > 0$,定义 R^n 中集合

$$D_t(A) = \{x \mid \|e^{At}x\| < \|x\|, x \in R^n\}.$$

易知该集合满足 $\forall x \in D_t(A), \forall \lambda \in R \Rightarrow \lambda x \in D_t(A)$,特别 $-x \in D_t(A)$.由此,可将 $D_t(A)$ 限制于单位超球面 $U(R^n) = \{x \mid \|x\| = 1, x \in R^n\}$ 上,即

$$D_t(A) = \{x \mid \|e^{At}x\| < 1, \|x\| = 1\}.$$

由于单位超球面上每一点均代表了空间中的一个方向,因此我们可称 $D_t(A)$ 为关于 A 的有限时间范数可下降方向集.根据 $D_t(A)$ 的定义,可知其满足以下性质.

性质1(特征向量).若 $\lambda = a + ib$ 为 A 的特征根(a, b 均为实数), x 为其相应单位特征向量,则 $a \geq 0 \Rightarrow x \notin D_t(A), \forall t > 0; a < 0 \Rightarrow x \in D_t(A), \forall t > 0$.

证明. $a \geq 0, \|e^{At}x\| = \|e^{(a+ib)t}x\| = e^{at} > 1; a < 0, \|e^{At}x\| = \|e^{(a+ib)t}x\| = e^{at} < 1, \forall t > 0$.

性质2(稳定矩阵). A 为稳定矩阵 $\Rightarrow \exists T > 0, \forall t > T, D_t(A) = U(R^n)$.

证明. A 为稳定矩阵 $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{At}\| = 0 \Rightarrow \exists T > 0, \forall t > T, \|e^{At}\| < 1 \Rightarrow \forall x \in U(R^n), \|e^{At}x\| < \|e^{At}\| \|x\| < 1 \Rightarrow D_t(A) = U(R^n)$.

性质3(完全不稳定矩阵). A 为完全不稳定矩阵 $\Rightarrow \exists T > 0, \forall t > T, D_t(A) = \phi$.

证明. A 为完全不稳定矩阵 $\Rightarrow -A$ 为稳定矩阵 $\Rightarrow \exists T > 0, \forall t > T, D_t(-A) = U(R^n)$

$$\Rightarrow \forall x \in U(R^n), \|e^{-At} \frac{e^{At}x}{\|e^{At}x\|}\| < 1 \Rightarrow \forall x \in U(R^n), \|e^{-At}e^{At}x\| < \|e^{At}x\|$$

$$\Rightarrow \forall x \in U(R^n), 1 < \|e^{At}x\| \Rightarrow D_t(A) = \phi.$$

例1.取完全不稳定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, t = 0.1$,如图1所示,横坐标为角度,纵坐标为

$\|e^{At}\mathbf{x}\|$ 的取值. 当 \mathbf{x} 的角度在范围 $[130, 160] \cup [310, 350]$ 之内时, $\|e^{At}\mathbf{x}\|$ 范数小于 1. 本例表明, 完全不稳定的子系统也是有可能对整个系统的镇定有积极作用的.

性质4(时间伸缩性). $\mathbf{x} \in D_t(A) \Leftrightarrow \forall h > 0, \mathbf{x} \in D_{t/h}(Ah)$.

证明. $\mathbf{x} \in D_t(A) \Leftrightarrow \|e^{At}\mathbf{x}\| < \|\mathbf{x}\| \Leftrightarrow \|e^{A\frac{t}{h}}\mathbf{x}\| < \|\mathbf{x}\| \Leftrightarrow \mathbf{x} \in D_{t/h}(Ah)$.

性质5(相对开集). $D_t(A)$ 为 $U(\mathbb{R}^n)$ 上的相对开集. 即 $\forall \mathbf{x} \in D_t(A), \exists \epsilon > 0,$

$\forall \mathbf{y} \in B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap U(\mathbb{R}^n)$, 其中 $B_\epsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{y}\| = 1, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \epsilon\}$, 有 $\mathbf{y} \in D_t(A)$.

证明. 设 $\mathbf{x} \in D_t(A)$, 则 $\|e^{At}\mathbf{x}\| < 1$. 不妨设 $\|e^{At}\mathbf{x}\| < \delta < 1$.

取 $\epsilon = 0.5(1 - \delta) / \|e^{At}\| > 0$, 则对 $\forall \mathbf{y} \in B_\epsilon(\mathbf{x})$, 令 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \|\Delta\mathbf{x}\| < \epsilon$, 有

$$\begin{aligned} \|e^{At}\mathbf{y}\| &= \|e^{At}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})\| \leq \|e^{At}\mathbf{x}\| + \|e^{At}\Delta\mathbf{x}\| \leq \delta + \|e^{At}\|\|\Delta\mathbf{x}\| \leq \\ &\delta + \|e^{At}\|\epsilon = \delta + \|e^{At}\|0.5(1 - \delta) / \|e^{At}\| = 0.5(1 + \delta) < 1. \end{aligned}$$

为了实际计算, 依据范数的定义, 有

$$\|e^{At}\mathbf{x}\| < 1 \Leftrightarrow \|e^{At}\mathbf{x}\|^2 < \|\mathbf{x}\|^2 \Leftrightarrow (e^{At}\mathbf{x})^T(e^{At}\mathbf{x}) < \mathbf{x}^T\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x}^T(e^{A^T t}e^{At} - I)\mathbf{x} < 0.$$

可将有限时间范数可下降方向集可等价定义为

$$D_t(A) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1, \mathbf{x}^T(e^{A^T t}e^{At} - I)\mathbf{x} < 0\},$$

其中 I 为 n 维单位矩阵. 这样, 将求解 $D_t(A)$ 的问题化为一个求解二次型不等式问题.

3 主要结果

本节基于 $D_t(A)$ 的定义, 分析系统稳定及渐近稳定的条件, 并给出系统可镇定条件及算法.

首先, 定义切换序列. 称 $S = \{\mathbf{x}_0; (q_0, t_0), (q_1, t_1), \dots, (q_n, t_n), \dots\}$ 为切换序列, 其中 \mathbf{x}_0 为系统初始状态, $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots \in Q = \{1, 2, \dots, N\}$ 为离散状态, $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ 为严格递增的时间序列. 一个切换序列完全表征了系统的演变轨迹: \mathbf{x}_0 为系统初始状态, (q_n, t_n) 表示在 $[t_n, t_{n+1})$ 内, 系统的演变方程为 $\dot{\mathbf{x}} = A_{q_n}\mathbf{x}$. 记由切换序列 S 确定的系统演变轨迹为 $\mathbf{x}_S(\cdot)$.

命题1. 若切换序列 S 满足 1) $\max_n |t_{n+1} - t_n| < \infty$; 2) $\mathbf{x}(t_n) \in D_{t_{n+1}-t_n}(A_{q_n}), \forall n$. 则由 S 切换序列确定的系统演变轨迹 $\mathbf{x}_S(t)$ 有界.

证明. 设 $T = \max_n |t_{n+1} - t_n| < \infty$, 则可知 $M = \max_{n=1, \dots, N} \max_{t \in [0, T]} \|e^{A_{q_n} t}\| < \infty. \forall t > 0$, 不妨设 $\exists n > 0$, 使得 $t \in [t_n, t_{n+1})$, 那么

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \left\| e^{A_{q_n}(t-t_n)}\mathbf{x}(t_n) \right\| \leq \left\| e^{A_{q_n}(t-t_n)} \right\| \|\mathbf{x}(t_n)\| \leq M\|\mathbf{x}(t_n)\|.$$

另外, 由条件 2) 可知 $\|\mathbf{x}(t_n)\| = \left\| e^{A_{q_n}(t_n-t_{n-1})}\mathbf{x}(t_{n-1}) \right\| < \|\mathbf{x}(t_{n-1})\| < \dots < \|\mathbf{x}(t_0)\|$, 则有 $\|\mathbf{x}(t)\| \leq M\|\mathbf{x}(t_0)\|$.

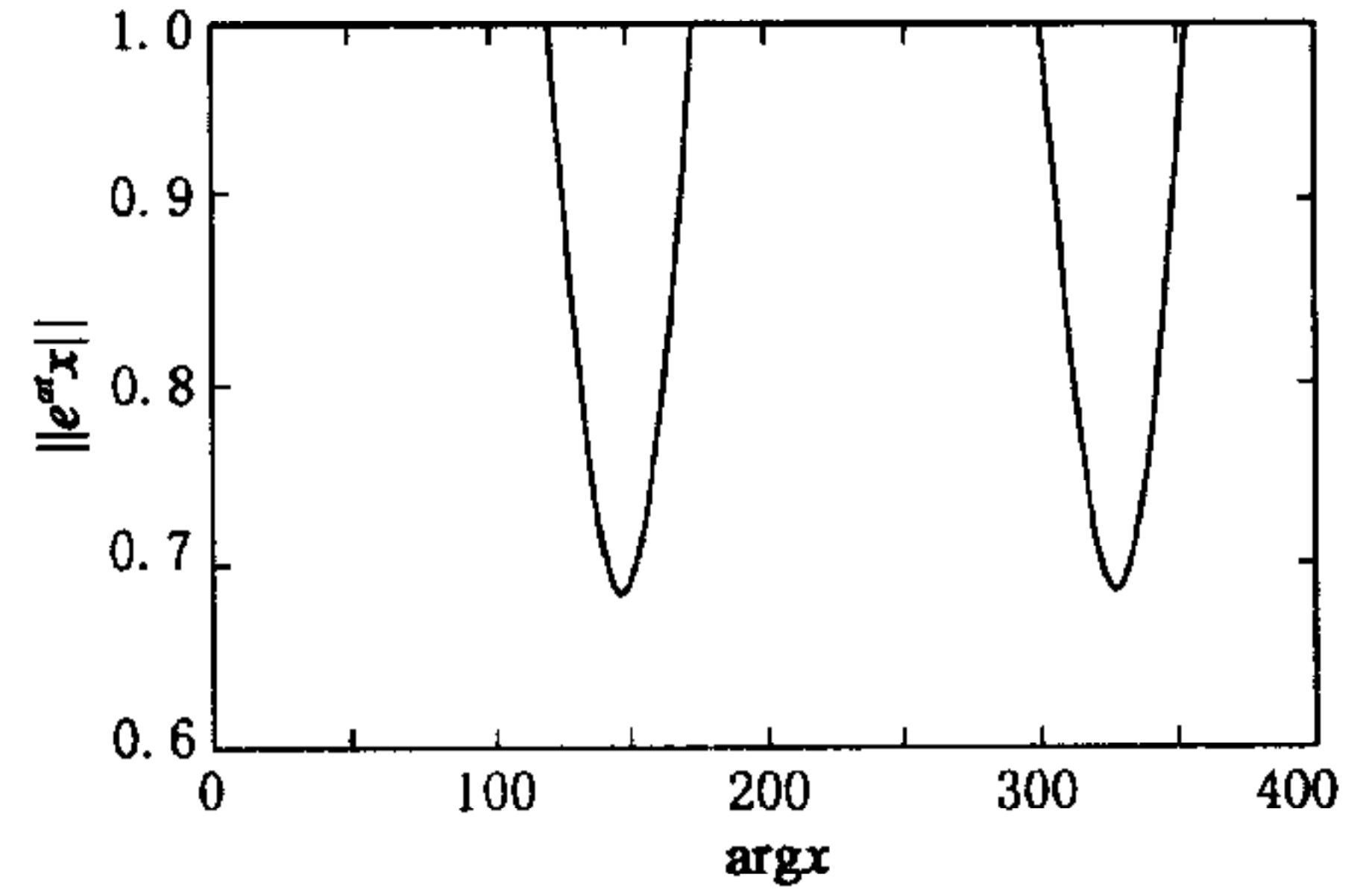


图1 范数下降示意图

命题2. 若切换序列 S 满足 1) $\max_n |t_{n+1} - t_n| < \infty$; 2) 集合 $\{x(t_n) | n=1, 2, 3, \dots\}$ 中满足 $x(t_n) \notin D_{t_{n+1}-t_n}(A_{q_n})$ 的元素个数有限. 则由 S 确定的系统演变轨迹 $x_S(t)$ 有界.

证明. 由条件 2) 可知, $\exists N_0, \forall n > N_0$, 满足 $x(t_n) \in D_{t_{n+1}-t_n}(A_{q_n})$.

取 $M_1 = \max_{t \in [0, t_{N_0}]} \|x(t)\|$, M 如命题 1 证明中所示, 则有 $\|x(t)\| \leq \max(M_1, M\|x(t_0)\|)$.

命题3. 若切换序列 S 满足 1) $\max_n |t_{n+1} - t_n| < \infty$; 2) 由满足 $x(t_n) \notin D_{t_{n+1}-t_n}(A_{q_n})$ 构成的子序列有界. 则由此确定的系统演变轨迹 $x_S(t)$ 是有界的.

证明. 设由条件 2) 所限定的子序列为 $\{x(t_{n_i}), i=1, 2, \dots\}$, 且 $\|x(t_{n_i})\| < C, i=1, 2, \dots$.

$\forall t > 0$, 不妨设 $\exists i$, 使得 $t \in [t_{n_i}, t_{n_{i+1}})$, 类似于命题 1 中的证明过程, 可得 $\|x(t)\| < M\|x(t_{n_i})\|$, 其中 M 的定义同命题 1, 则有 $\|x(t)\| < MC$.

定理1. 若系统满足 $\exists T > 0$, 使得 $\bigcup_i D_T(A_i) = U(R^n)$, 则按下述切换规则切换, 系统有界.

切换规则为系统每隔时间 T 判断一次, 当 $x(nT) \in D_T(A_i)$ 成立时, 就切换到子系统 $\dot{x} = A_i x$.

证明. 系统按如上规则切换, 其所得的切换序列必满足命题 1 的条件, 故系统有界.

若定义 $D'_i(A) = \{x | \|e^{At}x\| < e^{-rt}, \|x\| = 1\}$, 其中 $r > 0$. 并将命题 1~3 中的 $D_{t_{n+1}-t_n}(A_{q_n})$ 换成 $D'_{t_{n+1}-t_n}(A_{q_n})$, 那么所得结论将由有界变为 Lyapunov 渐近稳定. 同样, 对定理 1 也有类似的结论. 由于证明思路及过程相似, 所以仅给出命题 4 的证明, 其余只列出结论.

命题4. 若切换序列 S 满足 1) $\max_n |t_{n+1} - t_n| < \infty$; 2) $x(t_n) \in D'_{t_{n+1}-t_n}(A_{q_n}), \forall n$. 则由 S 确定的系统演变轨迹 $x_S(t)$ 是 Lyapunov 渐近稳定的.

证明. 设 $T = \max_n |t_{n+1} - t_n| < \infty$, 则可知 $M = \max_{n=1, \dots, N} \max_{t \in [0, T]} \|e^{A_{q_n} t}\| < \infty$. $\forall t > 0$, 不妨设 $\exists n > 0$, 使得 $t \in [t_n, t_{n+1})$, 那么

$$\|x(t)\| = \|e^{A_{q_n}(t-t_n)}x(t_n)\| \leq \|e^{A_{q_n}(t-t_n)}\| \|x(t_n)\| \leq M\|x(t_n)\|,$$

另外, 由条件 2) 可知

$$\|x(t_n)\| = \|e^{A_{q_n}(t_n-t_{n-1})}x(t_{n-1})\| < e^{-r(t_n-t_{n-1})}\|x(t_{n-1})\| < \dots < e^{-r(t_n-t_0)}\|x(t_0)\|, 则$$

有 $\|x(t)\| \leq e^{-r(t-t_0)}M\|x(t_0)\|$. 令 $t \rightarrow \infty$, 则 $t_n \rightarrow \infty$, 所以 $\|x(t)\| \rightarrow 0$.

命题5. 若切换序列 S 满足 1) $\max_n |t_{n+1} - t_n| < \infty$; 2) 集合 $\{x(t_n) | n=1, 2, 3, \dots\}$ 中满足 $x(t_n) \notin D'_{t_{n+1}-t_n}(A_{q_n})$ 的元素个数有限. 则由 S 确定的系统演变轨迹 $x_S(t)$ 是 Lyapunov 渐近稳定的.

命题6. 若切换序列 S 满足 1) $\max_n |t_{n+1} - t_n| < \infty$; 2) 由满足 $x(t_n) \notin D'_{t_{n+1}-t_n}(A_{q_n})$ 构成的子序列单调下降. 则由 S 确定的系统演变轨迹 $x_S(t)$ 是 Lyapunov 渐近稳定的.

定理2. 若系统满足 $\exists T > 0, r > 0$, 使得 $\bigcup_i D'_T(A_i) = U(R^n)$, 则按如下切换规则切换, 系统 Lyapunov 渐近稳定.

切换规则为系统每隔周期 T 判断一次, 当 $x(nT) \in D'_T(A_i)$ 时, 就切换到 $\dot{x} = A_i x$.

4 例子

例2. 设有5个子系统,系统矩阵分别如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -15 & 1 \end{bmatrix}.$$

取 $r=0.1, T=0.1$, 计算 $D_T(A_i)$. 用角度表示分别为 $[130, 170] \cup [310, 350]$, $[100, 130] \cup [280, 310]$, $[55, 100] \cup [235, 280]$, $[0, 25] \cup [170, 205] \cup [350, 360]$ 和 $[25, 55] \cup [205, 235]$. 可知其满足 $\bigcup_{i=1, \dots, 5} D_T(A_i) = \bigcup (R^2)$, 则系统将渐近稳定, 如图2所示.

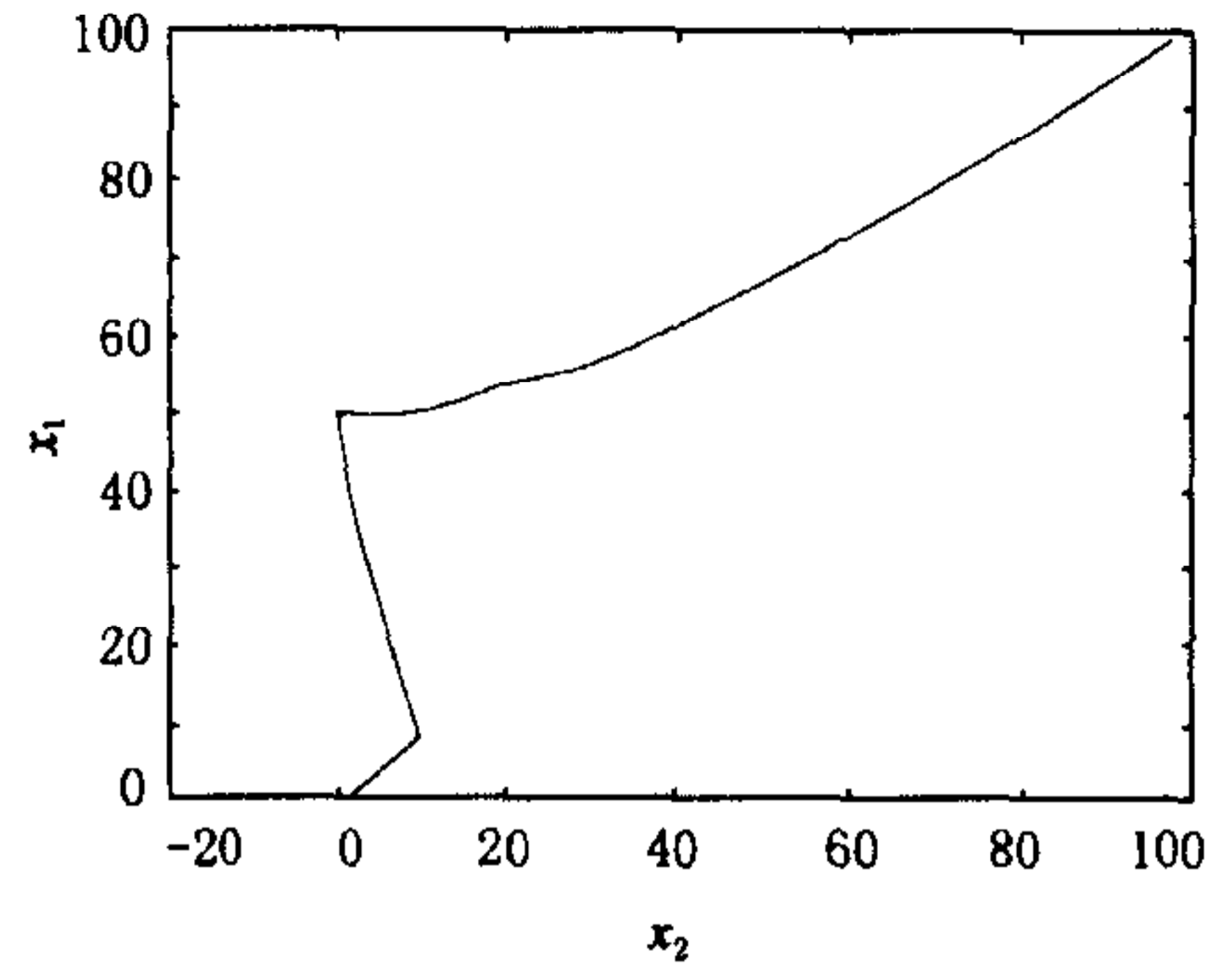


图2 切换系统状态仿真

5 小结

本文首先定义了矩阵的一个新的概念——有限时间范数可下降集合, 然后运用此概念分析了切换系统的镇定问题, 给出了可镇定条件及算法. 分析这些结果, 可得如下结论:

1) 向量范数分析工具可以用来分析切换系统的性能, 并且比 Lyapunov 函数方法更具有实际应用价值;

2) 上面所得的可镇定算法主要是对切换规则的限定, 并没有对系统的初始状态有任何限制, 即是全局可镇定的;

3) 由于是自治型切换系统, 镇定算法只包括了切换规则; 对于有输入的切换系统, 可镇定条件要相应变得复杂, 并且镇定算法应包括反馈算法和切换规则;

4) 由定义可以看出, 对于低维系统比较容易验证(如2维、3维), 对于高维系统可以通过计算机计算获得, 目前尚未找到比较简便的算法.

今后将针对非自治切换系统的可镇定条件及镇定算法展开进一步的工作.

参 考 文 献

- 1 Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**(4): 475~482
- 2 Wicks M A, Peleties P. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: *Proceedings of the 33rd CDC, Lake Buena, Vista, 1994.* 3492~3497
- 3 Peleties, DeCarlo R A. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions. In: *Proc. American Control Conf.*, Boston; 1991. 1679~1684

谢广明 1972年生. 1996年于清华大学获得应用数学专业和自动控制理论与应用专业双学士学位, 同年入自动化系直读博士学位. 主要研究方向为混合动态系统和切换系统的建模、分析与控制.

郑大钟 见本刊第23卷第4期.