



H_∞ 最优性能指标的连续性问题¹⁾

王广雄 何朕

(哈尔滨工业大学411教研室 哈尔滨 150001)

(E-mail: Gxwang@hope.hit.edu.cn)

摘要 对 Gahinet 提出的 H_∞ 最优性能指标的不连续性进行了分析,指出这不连续性是由于 H_∞ 控制器的存在条件不同和可能的零极点对消造成的. 还指出,方法不同并不能改变设计中存在的问题,对奇异 H_∞ 问题,还需要采用另外的措施才能解决.

关键词 H_∞ 最优性能指标,连续性,奇异 H_∞ 控制.

ON THE CONTINUITY PROPERTIES OF THE H_∞ OPTIMAL GAIN

WANG Guang-Xiong HE Zhen

(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

(E-mail: Gxwang@hope.hit.edu.cn)

Abstract The discontinuity of γ_{opt} as presented by Gahinet is analysed in this paper. It is pointed out that this phenomenon is caused by the different existing conditions for H_∞ controllers and/or the possibility of pole/zero cancellation in the design. It is also pointed out that the computing method itself can not change the essential difficulties in design. For singular H_∞ problem, a dedicated approach is still needed.

Key words H_∞ optimal gain, continuity property, singular H_∞ problem.

在 H_∞ 控制设计中,最近兴起了线性矩阵不等式(LMI)法,为了便于讨论,这里将基于 Riccati 方程的状态空间方法^[1],称之为 DGKF 法. DGKF 法要求对象满足一些“正常”的条件,即要求对象从控制输入 u 到性能输出 z 的传递函数 $P_{12}(s)$ 和从干扰输入 w 到测量输出 y 的传递函数 $P_{21}(s)$ 没有无穷远处和虚轴上的零点,不满足这些条件的 H_∞ 问题被称之为奇异 H_∞ 问题. LMI 法对对象没有这些要求,而且 Gahinet 指出 DGKF 在处理奇

1) 国家教委博士点基金项目.

异 H_∞ 问题时会出现最优 H_∞ 范数指标 γ_{opt} 的不连续问题和可能导致稳定性差的结果^[2]. Gahinet 将这一点分别视为这两方法的优点和缺点.

1 γ_{opt} 的不连续性问题

对奇异问题, 用 DGKF 法来处理时是给对象加一个摄动, 即以 $A + \epsilon I$ 代替原来的状态阵 A , 如果 $\epsilon < 0$, 这里称为从左侧逼近虚轴, 如果 $\epsilon > 0$, 称为从右侧逼近虚轴. Gahinet 指出, 从左侧逼近或从右侧逼近, 得到的 H_∞ 范数最优指标 γ_{opt} 可能是不连续的^[2].

本文仍采用 Gahinet 的例题, 不过这里用具体的数据来进行说明.

设对象的各参数为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}, & D_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & D_{12} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= [0 \quad 1], & D_{21} &= 1, & D_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

这个对象对应 $P_{21}(s)$ 有一个 $s=0$ 的零点, 或者说有一个 $s=0$ 的不可控极点, 所以这个对象是奇异的.

先从左侧逼近, 即以 $A + \epsilon I$ 来代替 A , $\epsilon < 0$. 取 $\epsilon = -0.0001$, 用 MATLAB Robust Toolbox 中的函数 hinfopt 求解此 H_∞ 控制问题, 得最优的 γ 值 $\gamma_{\text{opt}}^- = 0.89439$, 控制器为

$$K(s) = \frac{-2.4951(s + 0.0001)}{s^2 + 5.7449s + 9.9851}. \quad (2)$$

图1所示为对应的系统奇异值 Bode 图.

当从右侧逼近时, $\epsilon > 0$, 取 $\epsilon = 0.0001$, 仍用 hinfopt 求解, 得最小的 γ 值 $\gamma_{\text{opt}}^+ = 2.000057$, 对应的控制器

$$K(s) = -\frac{323689s + 283198}{s^2 + 161843s + 505740}. \quad (3)$$

这个算例表明从左侧逼近时最优性能指标 $\gamma_{\text{opt}}^- = 0.89439$, 右侧逼近时为 $\gamma_{\text{opt}}^+ = 2$, 这就是所谓的 γ_{opt} 不连续现象.

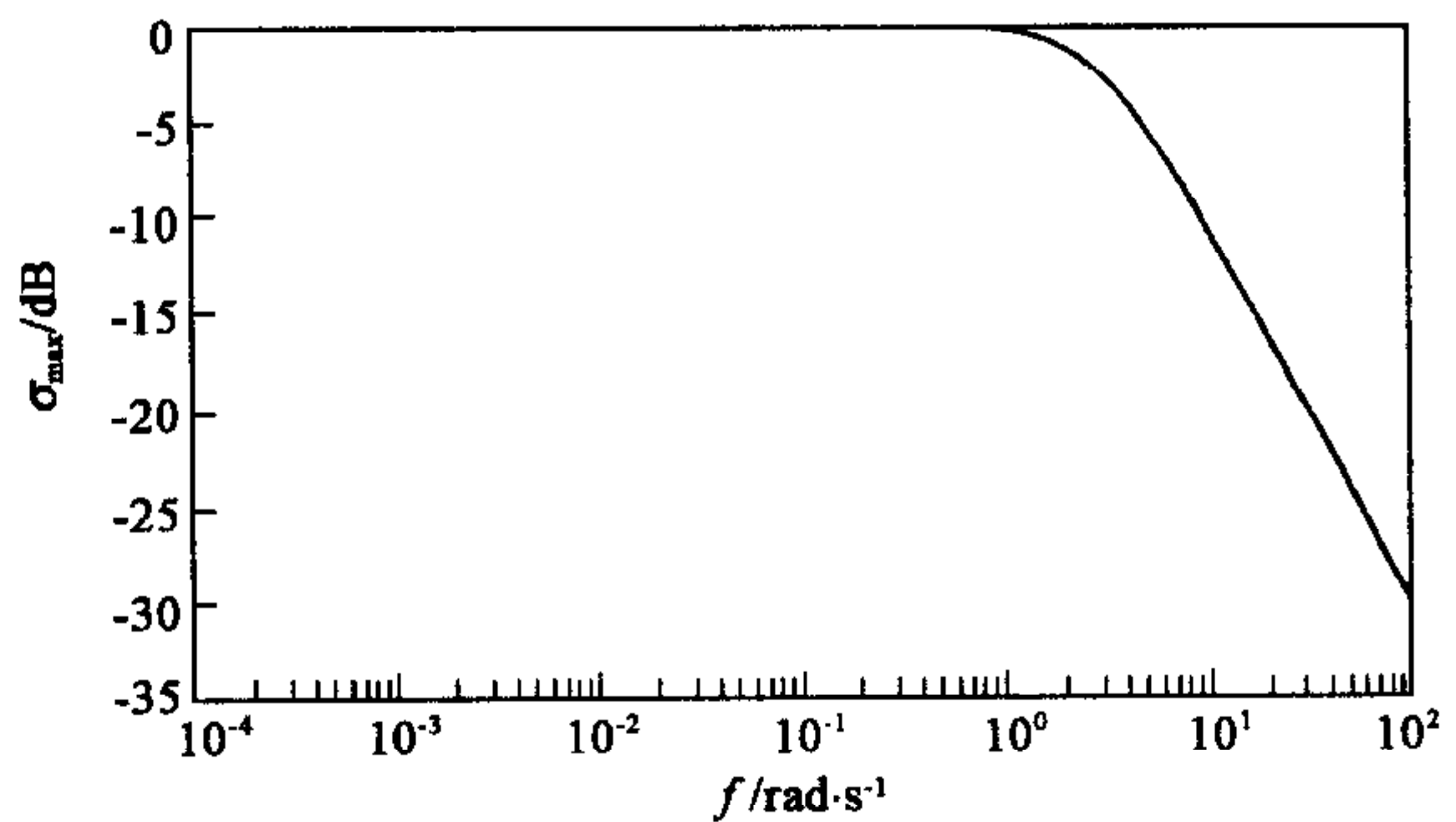


图1 左侧逼近的设计结果

从左侧逼近时, $P_{21}(s)$ 这个虚轴上的 $s=0$ 的零点成为 $s = -0.0001$. DGKF 理论说明控制器的零点要与稳定的不可控极点相对消^[3], 式(2)中的零点 -0.0001 就是这样一个与不可控极点相对消的零点. 由于是零极点相消的设计, 闭环系统中就存在一个很靠近虚轴的极点, 系统的相对稳定性很差.

这个算例说明 DGKF 法可得到两个不同的优化解, 而且设计结果的稳定性还可能很差, 故 Gahinet 认为对奇异问题应按右侧逼近来设计^[2].

由于 LMI 法对对象的条件没有限制, 所以这个奇异问题可用 LMI 法直接求解(即不

需对对象进行摄动). 用 LMI 法时, 本例的结果^[2]是 $\gamma_{\text{opt}} = 2$, 恰好是上面建议采用的 γ_{opt}^+ (具体计算结果见 § 4). 这样, LMI 法的优点似乎是很明显的了.

2 γ_{opt}^- 的分析

当从左侧逼近时, 本例中系统的状态阵 $A + \epsilon I$ 为

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 1 & -1 + \epsilon \end{bmatrix}, \quad \epsilon < 0.$$

考虑到 $\epsilon < -10^{-4}$, 所以为了简化解析分析, 下面取

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \epsilon < 0. \quad (4)$$

当用 DGKF 法求解时, 要求求解下列两个 Riccati 方程, 即求解

$$X_{\infty} = \text{Ric}(H_{\infty}), \quad (5)$$

$$Y_{\infty} = \text{Ric}(J_{\infty}), \quad (6)$$

式中 H_{∞} 和 J_{∞} 为 Hamilton 阵^[4]

$$H_{\infty} = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}D_1^T C_1 & -BR^{-1}B^T \\ -C_1^T C_1 + C_1^T D_1 R^{-1} D_1^T C_1 & -A^T + C_1^T D_1 R^{-1} B^T \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$J_{\infty} = \begin{bmatrix} A^T - C^T \tilde{R}^{-1} D_1 B_1^T & -C^T \tilde{R}^{-1} C \\ -B_1 B_1^T + B_1 D_1^T \tilde{R}^{-1} D_1 B_1^T & -A + B_1 D_1^T \tilde{R}^{-1} C \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式中各符号是根据式(1)得到的, 详见文[4].

将摄动后的 A 阵式(4)代入式(8), 得

$$A - B_1 D_1^T \tilde{R}^{-1} C = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 1 & -2 + \epsilon \end{bmatrix}, \quad \epsilon < 0,$$

即这个 Hamilton 阵 J_{∞} 的状态阵 $A - B_1 D_1^T \tilde{R}^{-1} C$ 是稳定的. 根据文[5], 可知与这个 J_{∞} 阵对应的 Riccati 方程的解 $Y_{\infty} = 0_n$. 由于 Y_{∞} 是 0 阵, 故这个 H_{∞} 控制问题只要求解式(5)这一个 Riccati 方程.

根据 DGKF 理论, 要求这个 Hamilton 阵满足稳定性和互补性条件. 将 A 阵代入式(7), 经过简单的运算可得本例中的稳定性条件为

$$(1 - \epsilon)^2 + 0.25 - (1 - \epsilon)^2 \gamma^{-2} > 0. \quad (9)$$

当式(9)的不等式成为等式时, H_{∞} 阵的稳定性条件遭到破坏, 根据文[1] § V-D, 这时的性能指标 γ 是 H_{∞} 最优解 γ_0 . 所以从式(9)得最优 γ_0 为

$$\gamma_0^2 = \frac{(1 - \epsilon)^2}{(1 - \epsilon)^2 + 0.25}$$

当 ϵ 从左侧逼近零时, 即 $\epsilon \rightarrow 0^-$ 时, 得 $\gamma_0 = 0.8944$. 这是以近似的式(4)代替 $A + \epsilon I$ 所得的解析结果, 与前面算例所得的 γ_{opt}^- 是一致的, 所以上面从左侧逼近的 γ_{opt}^- 是 H_{∞} 最优解.

3 γ_{opt}^+ 的分析

当从右侧逼近时 ($\epsilon > 0$), 极点 $s = 0$ 改用 $s = +0.0001$, 即这个不可控极点变为不稳定

的极点. 仍取式(4)作为扰动后的对象, 将系统的其它参数代入式(8)后可以知道, 当 $\gamma \rightarrow 2\sqrt{1-\epsilon}/2$ 时 J_∞ 阵的互补性条件遭到破坏, 这个 γ 值大于第一个 Hamilton 阵 H_∞ 阵稳定性条件遭到破坏时的 $\gamma=0.8944$. 所以当从右侧逼近时 ($\epsilon > 0$), 系统所能做到的最小 γ 值 $\gamma_{\text{opt}}^+ = 2$.

这个 $\gamma_{\text{opt}}^+ = 2$ 的物理意义可解释如下:

系统从输入 w 到输出 z 的传递函数 T_{zw} 为

$$T_{zw} = P_{11} + P_{12}(I - KP_{22})^{-1}KP_{21}. \quad (10)$$

将式(1), (3)代入式(10), 由于是从右侧逼近, 控制器 $K(s)$ 中不会有与对象极点相对消的零点, 经过简单的运算可知, 当 $s = j\omega, \omega \rightarrow 0$ 时

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} T_{zw}(j\omega) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

这说明系统的 H_∞ 范数 $\|T_{zw}\|_\infty$ 不可能小于 2, 即 $\gamma \geq 2$.

对 $\epsilon = +0.0001$ 时的设计结果(式(3))进行分析, 闭环系统没有非常靠近虚轴的极点, 或者说, 系统的相对稳定性较好.

一般情况下, 如果对象的不稳定极点位于系统的带宽以内, 闭环后就会有一极点接近于其相对于虚轴的镜像^[6]. 也就是说, 如果对象有 $+\epsilon$ 的极点, H_∞ 控制器闭合后就有一个闭环极点接近于 $-\epsilon$. 本例是一个特殊情况, $P_{12}(s)$ 与 $P_{22}(s)$ 都有一个相同的 $+\epsilon$ 极点, 所以没有出现上述的镜像的极点, 但这不是普遍现象. 所以就一般而言, 从右侧逼近会出现一个非常小的极点 $\approx -\epsilon$, 同样存在一个相对稳定性差的问题.

4 LMI 的 γ_{opt}

LMI 法的特点是事先给定控制器 $K(s)$ 的状态空间形式, 由于这不是零极点对消的设计, 因此也就得到了上述从右侧逼近时的同样结果(见式(11)). 所以本例中的 γ 最小值 γ_{opt} 也不能小于 2.

本例用 LMI Control Toolbox 中的 `hinflmi` 来求解, 得控制器 $K(s)$ 为

$$K(s) = -\frac{0.039048s + 0.000019}{s^2 + 3.259556s + 2.558028}, \quad (12)$$

对应的

$$\gamma_0 = 2.000099.$$

图2是设计所得的系统的奇异值 Bode 图.

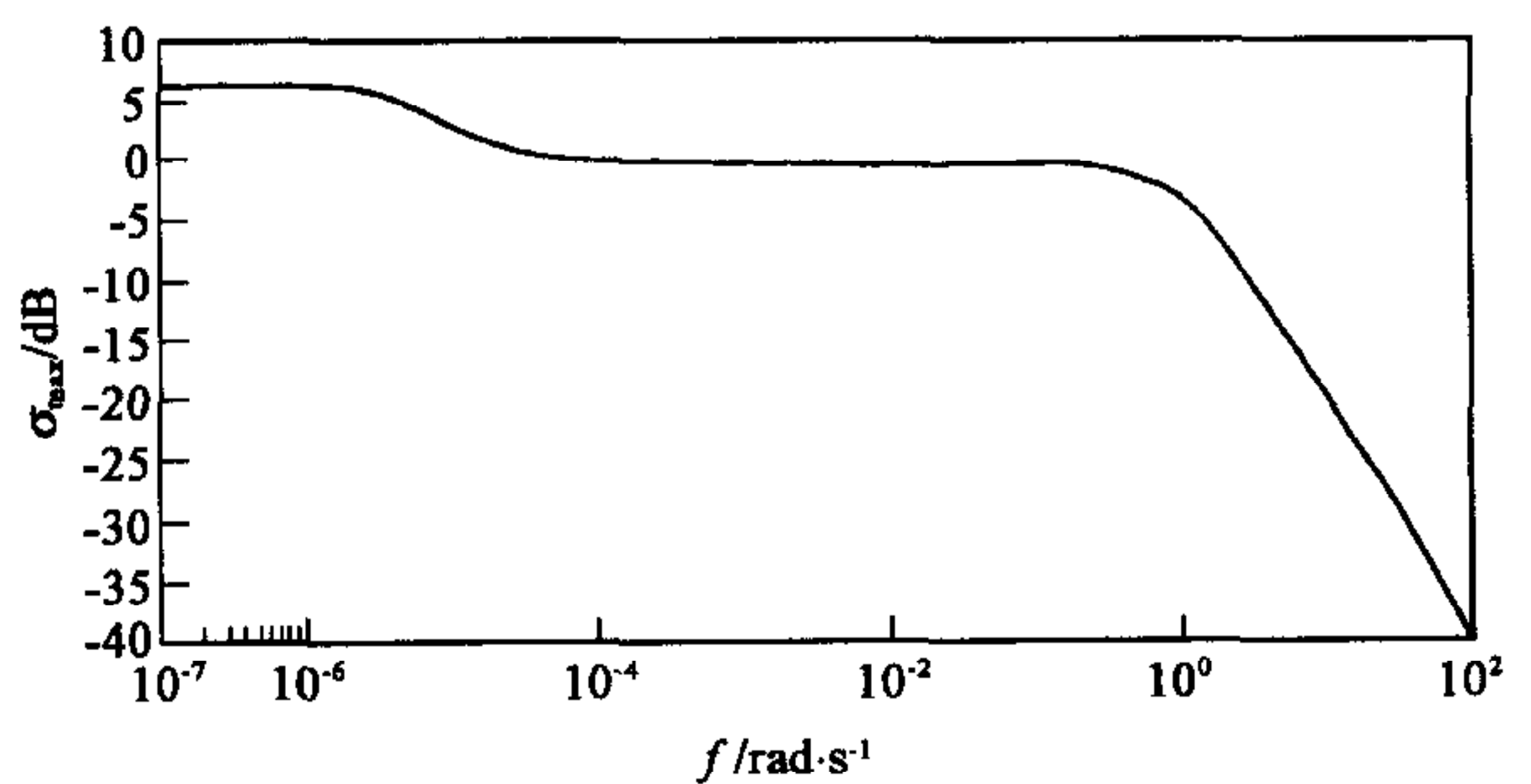


图2 LMI 的设计结果

对比图2与图1可以知道, 虽然 $\bar{\sigma}[T_{zw}(j\omega)]$ 在 $\omega \rightarrow 0$ 时等于 6 dB, 即 $\|T_{zw}\|_\infty = 2$, 但系统的整个特性已与 DGKF 法从左侧逼近时的结果相当.

从式(12)可以看到, LMI 法所得的控制器有一个很靠近虚轴的零点 $s = -0.00048$, 因此该闭环系统必然有一个极点位于 $s = 0$ (对象的极点) 和 -0.00048 之间, 同样也存在

一个相对稳定性差的问题,所以就 LMI 方法来说,只能说由于对对象没有假设条件的限制,可以直接求解 H_∞ 奇异问题. 但实际的设计结果与从左侧逼近的 DGKF 次优设计相似,存在的问题也一样.

5 结论

1) 当采用 DGKF 法时,由于从右侧逼近使对象多了不稳定极点,可能会使控制器存在的条件(Hamilton 阵 H_∞ 和 J_∞ 的条件)发生变化,所以从左侧逼近和从右侧逼近做到的最小 γ 值不一定相等,造成 γ_{opt} 的不连续.

但是不论是从左侧逼近或从右侧逼近,对求解奇异 H_∞ 问题来说都存在同样的相对稳定性差的问题. 因为从哪一侧逼近只是一个方法问题,不会是因为仅仅换了方法,设计问题就自然解决了. 对奇异 H_∞ 问题,用左侧逼近仍不失为一种好办法,这时为了防止相对稳定性差的问题,可以采用扩展 H_∞ 控制理论^[7]或采用四块问题来求解.

2) 对于 LMI 法来说,可以不受对象假设条件的限制,当 P_{12} 和 P_{21} 有无穷远处或 $j\omega$ 轴上的零点时可以照常设计,这是它的一个优点. 但奇异 H_∞ 设计中的问题依然存在,同样没有解决,如果采用 LMI 法,则还要另加极点配置的条件^[2,8].

致谢 作者感谢日本国东京工业大学忻欣博士对本文第一稿所提出的宝贵意见,使本文得以进一步完善.

参 考 文 献

- 1 Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, Francis B A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1989, **34**(8): 831~847
- 2 Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 1994, **4**: 421~448
- 3 Sefton J, Glover K. Pole/zero cancellations in the general H_∞ problem with reference to a two block design. *Systems & Control Letters*, 1990, **14**: 295~306
- 4 Glover K, Doyle J C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems & Control Letters*, 1988, **11**: 167~172
- 5 Hvostov H S. Simplifying H_∞ controller synthesis via classical feedback system structure. *Trans. Autom. Control*, 1990, **35**(4): 485~488
- 6 Chiang R Y, Safonov M G. H_∞ synthesis using a bilinear pole shifting transform. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 1992, **15**(5): 1111~1117
- 7 Mita T, Hirata M, Villas S. H_∞ servo-controller design for plants having poles on the $j\omega$ axis. In: Proceedings. 34th CDC, 1995: 2568~2573
- 8 Scherer C, Gahinet P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **42**: 896~911

王广雄 1933年生,现为哈尔滨工业大学教授、博士生导师. 研究方向为 H_∞ 控制理论及应用,高精度伺服系统的设计和实现.

何 朕 1972年生,2000年获哈尔滨工业大学博士学位. 1997年至1998年受日本国际教育学会资助,赴日本东京工业大学留学一年. 研究方向为奇异 H_∞ 控制,广义系统.