自 动 化 学 报
2000 年 6 月 ACTA AUTOMATICA SINICA 增刊 B

一种具有指定误差方差约束的鲁棒状态估计方法 [1)]

杨 然 许晓鸣 张卫东
（上海交通大学自动化系 上海 200030）

摘 要 本文研究具有时变参数不确定性系统的具有指定误差方差约束的鲁棒滤波问题. 针对目前的许多方法在进行滤波时经过一次求解 Riccati 方程只能估计出误差方差的上界, 而不能保证其满足给定的误差约束这一情况, 本文提出了一种能满足给定稳态误差方差约束的鲁棒滤波算法. 该方法通过求解两个代数 Riccati 方程可以一次性得到满足滤波误差限制的滤波器. 该算法不仅经过了严格的理论证明, 而且文中具体的仿真算例也说明了该算法的简单性和有效性.

关键词 鲁棒滤波器, 不确定性系统, 误差方差约束.

1 引言

由于在实际应用中存在广泛的系统模型和干扰的不确定性, 因此近年来鲁棒滤波成为研究的热点. 分析现今出现的鲁棒状态估计方法, 主要可以分为两类, 一种是以极小化最坏情况时从噪声输入到估计误差输出的传递函数的 H_∞ 范数为目标, 这称为鲁棒 H_∞ 滤波[1,2,3]; 另一种方法是考虑构造状态估计器以使估计误差的方差在一定范围内, 这称为鲁棒 H_2 滤波[4,5,6]. 在对绝对估计误差要求较高的情况（如跟踪问题）下, 显然用鲁棒 H_2 滤波方法较鲁棒 H_∞ 滤波更合适.

稳态鲁棒 H_2 滤波的解法通常是建立在二次稳定的基础之上，根据系统二次稳定的定义，推出满足条件的 Riccati 不等式，然后找出滤波器系数与 Riccati 不等式解之间的关系，通过求解 Riccati 不等式来求出滤波器。现有的鲁棒 H_2 滤波方法通常通过求解两个 Riccati 方程设计出鲁棒滤波器, 所得到的估计误差是有一定上界的[5], 并且能对该上界进行估计. 如果对误差方差的上界有约束要求[6], 则判断所设计的滤波器是否满足我们期望的误差要求, 如果不满足,再对其进行优化, 直至满足条件为止. 这种方法虽然有效,但是需要反复多次进行 Riccati 方程的求解，参数的优化和判断，才能设计满足约束条件的滤波器，过程较复杂, 运算速度较慢. 为此, 本文提出一种改进的方法, 只要一次求解一对 Riccati 方程就能得到满足估计误差要求的滤波器.

1) 本文得到国家自然科学基金（69804007）和上海市科技启明星计划（99QD14012）部分资助.

2 问题描述

本文考虑如下具有时变参数不确定性的随机线性连续时间系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=(A+\Delta A(t))\mathbf{x}(t)+\mathbf{w}(t),\qquad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0 \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t)=(C+\Delta C(t))\mathbf{x}(t)+\mathbf{v}(t) \tag{2}$$

其中：$\mathbf{x}(t)$ 是 n 维状态变量，$\mathbf{y}(t)$ 是 p 维测量输出变量，A 和 C 是具有相应维数的已知矩阵，$\mathbf{w}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 是不具相关性的零均值白噪声信号，其方差分别为 δW 和 δV（δ 表示脉冲函数）.

不妨假定式（1)、(2）中的不确定项可表示为

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t)\\ \Delta C(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix}F(t)N \tag{3}$$

其中：M_1,M_2,N 是已知的矩阵，$F(t)$ 是具有不确定性的时变矩阵，满足

$$F(t)F^T(t)\le I \tag{4}$$

现对系统进行鲁棒滤波，设计如下形式的滤波器

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)=G\hat{\mathbf{x}}(t)+K\mathbf{y}(t),\qquad \hat{\mathbf{x}}(t_0)=\hat{\mathbf{x}}_0 \tag{5}$$

使对于满足条件的不确定项（3），滤波过程二次稳定，且估计误差

$$\mathbf{e}(t)=\mathbf{x}(t)-\hat{\mathbf{x}}(t) \tag{6}$$

满足每个稳态估计误差的方差小于给定的要求，即

$$\mathrm{var}[e_i(t)]\le\sigma_i^2,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

3 滤波器设计

现在针对方差约束（7），设计滤波器. 由式（1)、(2)、(5)、(6）可得

$$\dot{\mathbf{e}}(t)=G\mathbf{e}(t)+[(A-G-KC)+\Delta A-K\Delta C]\mathbf{x}(t)+\mathbf{w}(t)-K\mathbf{v}(t) \tag{8}$$

由此得到增广系统

$$\dot{\mathbf{x}}_f(t)=(A_f+\Delta A_f)\mathbf{x}_f(t)+B_f\mathbf{w}_f(t) \tag{9}$$

其中：

$$\mathbf{x}_f=\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{e}(t)\end{bmatrix},A_f=\begin{bmatrix}A & 0\\ A-G-KC & G\end{bmatrix},M_f=\begin{bmatrix}M_1\\ M_1-KM_2\end{bmatrix},N_f=\begin{bmatrix}N & 0\end{bmatrix},$$

$$\Delta A_f=M_fFN_f,\mathbf{w}_f(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{w}(t)\\ \mathbf{v}(t)\end{bmatrix},B_f=\begin{bmatrix}W^{1/2} & 0\\ W^{1/2} & -KV^{1/2}\end{bmatrix}.$$

定理一 假定 $\delta>0$ 是一个充分小的常数，且系统（1）二次稳定. 期望的稳态误差

方差上界为$H = diag(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_n^2)$，如果存在正常数$\varepsilon > 0$，使下列两个 Riccati 方程具有对称正定解，分别记为P_1和P_2

$$AP_1 + P_1A^T + \varepsilon M_1M_1^T + \varepsilon^{-1}P_1N^TNP_1 + W + \delta I = 0 \tag{10}$$

$$[-H - \varepsilon M_1M_2^T(Q^+)^T]P_2 + P_2[-H - \varepsilon M_1M_2^T(Q^+)^T]^T + P_2[\varepsilon Q^+M_2M_2^T(Q^+)^T + Q^+V(Q^+)^T]P_2 + RH + HR^T + \varepsilon M_1M_1^T + W = 0 \tag{11}$$

其中：$R = A + (\varepsilon M_1M_1^T + W)P_1^{-1}, Q = C + \varepsilon M_2M_1^TP_1^{-1}$，$Q^+$表示矩阵$Q$的 M-P 逆. 则满足估计误差方差限制（7）的滤波器（5）的系数是

$$K = P_2Q^+ = P_2Q^T(QQ^T)^{-1},\ G = R - KQ.$$

证明 不妨令$P_f = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$，且$W_f = B_fB_f^T = \begin{bmatrix} W & W \\ W & W + KVK^T \end{bmatrix}$，由

$$[A_f + \Delta A_f(t)]P_f + P_f[A_f + \Delta A_f(t)]^T + W_f \le A_fP_f + P_fA_f^T + \varepsilon M_fM_f^T + \varepsilon^{-1}P_fN_f^TN_fP_f + W_f \tag{12}$$

令不等式（12）的右边$= \psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}$,将（12）展开，可得

$$\psi_{11} = AP_1 + P_1A^T + \varepsilon M_1M_1^T + \varepsilon^{-1}P_1N^TNP_1 + W$$
$$\psi_{12} = \psi_{21}^T = P_1(A - G - KC)^T + \varepsilon M_1(M_1 - KM_2)^T + W$$
$$\psi_{22} = GH + HG^T + \varepsilon(M_1 - KM_2)(M_1 - KM_2)^T + W + KVK^T$$

由式（10）可知 $\psi_{11} = -\delta I$，将$G = R - KQ$代入,可得$\psi_{12} = {\psi_{21}}^T = 0$，由于$K = P_2Q^+$，有

$$\psi_{22} = P_2(-Q^+QH - \varepsilon Q^+M_2M_1^T) + (-Q^+QH - \varepsilon Q^+M_2M_1^T)^TP_2 + P_2[\varepsilon Q^+M_2M_2^T(Q^+)^T + Q^+V(Q^+)^T + RH + HR^T + \varepsilon M_1M_1^T + W$$

比较上式和（11）式，发现 $\psi_{22} = 0$. 根据$\psi_{11} = -\delta I$，$\psi_{12} = 0, \psi_{22} = 0$，该增广系统二次稳定，即

$$(A_f + \Delta A_f(t))P_f + P_f(A_f + \Delta A_f(t))^T \le -W_f + \psi < 0. \tag{13}$$

定义$X(t) = \lim\limits_{t_0 \to -\infty} E[\mathbf{x}_f(t){\mathbf{x}_f}^T(t)], Z = P_f - X(t)$，由式（18）可得

$$\dot{X}(t) = (A_f + \Delta A_f(t))X(t) + X(t)(A_f + \Delta A_f(t))^T + W_f \tag{14}$$

$$\dot{Z}(t) = (A_f + \Delta A_f(t))Z(t) + Z(t)(A_f + \Delta A_f(t))^T - (A_f + \Delta A_f(t))P_f + P_f(A_f + \Delta A_f(t))^T$$

由式（9）可知

$$\dot{Z}(t) \ge (A_f + \Delta A_f(t))Z(t) + Z(t)(A_f + \Delta A_f(t))^T \tag{15}$$

令$E_f(t) = \lim\limits_{t_0 \to -\infty} E[\mathbf{e}(t)\mathbf{e}^T(t)]$,根据系统二次稳定,可知 $Z(t) \ge 0$,即

$$H - E_f = [0 \quad I_n][P_f - X(t)][0 \quad I_n]^T \ge 0$$

所以 $E_f(t) \le H$.　　　　证毕.

从定理一可知, 通过求解方程（10）、（11）可以求得滤波器（5）的系数, 而且由于 $E_f(t) \le H$, 可以知道稳态误差的方差满足条件（7）.

4　仿真研究

时间连续线性系统受到高斯白噪声干扰,且状态方程和输出方程都具有不确定性,其数学描述如式（1）~（7）,参数如下：

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0.5 & -3\end{bmatrix}, \Delta A(t)=M_1 f(t)N=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}\sin(t)\begin{bmatrix}1 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, \Delta C(t)=M_2 f(t)N=0.2\sin(t)\begin{bmatrix}1 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$W=\begin{bmatrix}0.01 & 0\\ 0 & 0.001\end{bmatrix}, V=0.1$$

现设计如式（4）描述的滤波器,要求估计稳态误差满足

$$\mathrm{var}[e_1(t)] \le 0.3,\ \mathrm{var}[e_2(t)] \le 0.01 .$$

运用本文所给出的算法求解, $\varepsilon=1, \delta=0.01$ 可得到

$$G=\begin{bmatrix}0.0142 & -2.7809\\ 0.1772 & 1.6365\end{bmatrix}, K=\begin{bmatrix}0.3142\\ 0.4469\end{bmatrix}$$

其稳态估计误差的方差为 $\mathrm{var}[e_1(t)] \le 0.2693,\ \mathrm{var}[e_2(t)] \le 0.0020$,满足原先对稳态误差的要求.

5　结语

本文提出了一种具有指定稳态误差方差约束的鲁棒状态估计方法, 该方法通过求解两个 Riccati 方程,可设计出满足所规定的估计误差方差上界约束的滤波器,并在理论上给出了严格的证明. 最后对一个具体系统进行了仿真研究, 从实验上验证了该算法的有效性和可行性.

参 考 文 献

1　M Fu, C.E. de Souza and L. Xie. H_∞ estimation for uncertain systems, *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 1992, 2(2): 87-105

2. Huaizhang Li and Minyue Fu. A Linear Maxtrix Inequality Approach to Robust H_∞ Filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, **45**(9): 2338-2350

3 Ming Zhang, Hongwei Xie, and Dinghan, Shi Robust H_∞ filtering for uncertain parameter system. In: *IFAC, 14^th^ Triennial World Congress*, Beijing, China, 1999, pp.489-494

4. Ian R. Petersen and Duncan C. McFarlane. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **39**(9):1971-1977

5. L. Xie and Y. C. Soh. Robust Kalman Filtering for Uncertain System. *Systems and Control Letters*, 1994, **22**(2): 123-130

6. Zidong Wang, Jihong Zhu and H. Unbehauen. Robust filter design with time-varying parameter uncertainty and error variance constraints. *International Journal of Control*, 1999,**72**(1): 30-38

杨 然 女，1975 年生.1999 年获上海交通大学应用数学硕士学位,现为上海交通大学自动化系博士生.主要研究方向为鲁棒滤波、小波变换在控制中的应用等.

许晓鸣 男，1957 年生.1987 年获上海交通大学自动化专业博士学位, 1988 至 1989 年担任联邦德国慕尼黑技术大学自动化研究所洪堡基金会客座研究员. 现为上海交通大学副校长, 博士生导师, 主要研究方向为预测控制、过程控制以及鲁棒控制理论及应用等.

张卫东 男, 1967 年生. 1996 年获浙江大学自动化专业博士学位, 后在上海交通大学从事博士后研究工作并于 1998 年出站, 现为上海交通大学教授. 主要从事流程工业自动化，鲁棒控制理论应用, 非线性系统控制和智能控制方面的研究.