自 动 化 学 报
2000 年 6 月 ACTA AUTOMATICA SINICA 增刊 B

状态反馈预测控制系统的解耦问题

胡品慧 陈玲聪 袁璞
（石油大学（北京）自动化研究所 北京 102200）

摘 要 本文针对状态反馈预测控制系统的解耦性进行了分析，证明了动态解耦设计的充分必要条件，如果控制系统稳定，状态反馈预测控制系统对阶跃型给定值一定静态无偏差，对比一般的状态反馈动态解耦设计，状态反馈预测控制系统具有更高的实际应用价值.

关键词 模型预测控制，状态反馈，解耦问题.

1 引言

近年来，基于模型的预测控制技术（Model Predictive Control Technology），在理论上和应用上都取得了很大的进展，如动态矩阵控制 DMC[1]，广义预测控制 GPC[2, 3]和状态反馈预测控制 SPC[4, 5, 6]等算法，越来越受到广大科技工作者的重视[7, 8]，并在先进过程控制（Advanced Process Control）中取得了可喜的成果[9, 10, 11]．状态反馈预测控制，使用实测状态变量反馈，提高了控制系统抑制不可测干扰能力，改善了控制系统的鲁棒性[6]．本文讨论了状态反馈预测控制系统的解耦问题，证明了动态解耦设计的充分必要条件，给出了如果控制系统稳定，状态反馈预测控制系统对阶跃型给定值一定静态无偏差.

2 预备知识

假设被控过程模型由状态空间描述如下：

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k)+Bu(k)+Fv(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{1}$$

这里，$x\in R^n$，$y\in R^r$，$u\in R^r$，$v\in R^q$ 是系统的不可测干扰，假设矩阵 B，F 是列满秩的，矩阵 C 是行满秩的，$C=\begin{bmatrix}c_1{}^T & c_2{}^T & \cdots & c_r{}^T\end{bmatrix}^T$．使用模型预测被控变量 $y(k)$ 的未来值，对第 j 个输出在未来 p_j 采样时刻的预测值：

$$\hat{y}_j(k+p_j)=c_jA^{p_j}x(k)+\sum_{i=1}^{p_j}c_jA^{i-1}Bu(k+p_j-i) \tag{2}$$

$j=1,\ 2,\ \cdots\ r$，p_j 是对第 j 个输出 $y_j(k)$ 选取的预测时域．使用当前输出实测值 y 和对当前输出预测值 $\hat{y}$ 的偏差，对未来 p_j 时刻的预测输出进行反馈修正：

$$\hat{y}_{cj}(k+p_j)=\hat{y}_j(k+p_j)+y_j(k)-\hat{y}_j(k) \tag{3}$$

$$\hat{y}_j(k)=c_jA^{p_j}x(k-p_j)+\sum_{i=1}^{p_j}c_jA^{i-1}Bu(k-i) \tag{4}$$

应用状态反馈单值预测控制算法[4, 5, 6]，控制时域 L=1，即只在 k 时刻改变控制作用的大小，$u(k+i)=u(k), i>0$，使反馈修正后的输出预测值等于输出给定值，得：

$$y^s{}_j(k+p_j)=c_jA^{p_j}x(k)+y_j(k)-\hat{y}_j(k)+s_j(p_j)u(k) \tag{5}$$

$$u(k)=S^{-1}(P)[Y^s(k)-y(k)-Kx(k)+\hat{Y}(k)] \tag{6}$$

式（6）为最优控制律，其中，$Y^s(k)$ 是输出给定值，$\hat{Y}(k)$ 是输出预测值，

$$K=\begin{bmatrix}c_1A^{p_1}\\c_2A^{p_2}\\\vdots\\c_rA^{p_r}\end{bmatrix},\quad Y^s(k)=\begin{bmatrix}y^s{}_1(k)\\y^s{}_2(k)\\\vdots\\y^s{}_r(k)\end{bmatrix},\quad S(P)=\begin{bmatrix}s_1(p_1)\\s_2(p_2)\\\vdots\\s_r(p_r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{p_1}c_1A^{i-1}B\\\sum_{i=1}^{p_2}c_2A^{i-1}B\\\vdots\\\sum_{i=1}^{p_r}c_rA^{i-1}B\end{bmatrix} \tag{7}$$

这里，$P=[p_1\quad p_2\quad\cdots\quad p_r]^T$ 是选定的预测时域．假设模型准确，有 $y(k)=\hat{Y}(k)$，则

$$u(k)=S^{-1}(P)[Y^s(k)-Kx(k)] \tag{8}$$

将式（8）代入式（1），得状态反馈预测控制系统的闭环状态空间描述为：

$$\begin{aligned}x(k+1)&=A_cx(k)+B_cY^s(k)\\y(k)&=Cx(k)\end{aligned} \tag{9}$$

$$A_c = A - BS^{-1}(P)K, \quad B_c = BS^{-1}(P) \tag{10}$$

$$G_c(z) = C(zI - A_c)^{-1} B_c \tag{11}$$

式（11）为控制系统的闭环脉冲传递函数，系统稳定性由 A_c 的特征值决定.

3 主要结果

定理1 如果状态反馈预测控制系统稳定，它对阶跃型给定值静态无偏差.

引理 如果 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} I-A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + r \tag{12}$

其中，n是系统的维数，r是输出（和输入）的维数，下列矩阵逆存在

$$[C(I - A + BS^{-1}(P)K)^{-1}B]^{-1} \tag{13}$$

证明[12] $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} I-A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C(I-A+BS^{-1}(P)K)^{-1}B \end{bmatrix} \tag{14}$

$$\mathrm{rank}\, C(I - A + BS^{-1}(P)K)^{-1} B = r \tag{15}$$

上式表明 $C(I - A + BS^{-1}(P)K)^{-1} B$ 是满秩的，所以为非奇异，故有结论成立.

证明 以下证明下式成立，并应用矩阵逆运算公式

$$S(P) = C(I - A + BS^{-1}(P)K)^{-1} B \tag{16}$$

$$(D + CAB)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}C(BD^{-1}C + A^{-1})BD^{-1} \tag{17}$$

假设 $(I - A)^{-1}$ 存在，有

$$C(I - A + BS^{-1}(P)K)^{-1} B = C(I - A)^{-1} B[K(I - A)^{-1} B + S(P)]^{-1} S(P) \tag{18}$$

$$K(I - A)^{-1} B + S(P) = [K + \Sigma(I - A)](I - A)^{-1} B \tag{19}$$

$$K+\Sigma(I-A)=\begin{bmatrix} c_1A^{p_1} \\ c_2A^{p_2} \\ \vdots \\ c_rA^{p_r} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1(I+A+\cdots+A^{p_1-1}) \\ c_2(I+A+\cdots+A^{p_2-1}) \\ \vdots \\ c_r(I+A+\cdots+A^{p_r-1}) \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} c_1(A+A^2+\cdots+A^{p_1}) \\ c_2(A+A^2+\cdots+A^{p_2}) \\ \vdots \\ c_r(A+A^2+\cdots+A^{p_r}) \end{bmatrix}=C \quad (20)$$

$$\Sigma=\left[\left(\sum_{i=1}^{p_1}c_1A^{i-1}\right)^T \quad \left(\sum_{i=1}^{p_2}c_2A^{i-1}\right)^T \quad \cdots \quad \left(\sum_{i=1}^{p_r}c_rA^{i-1}\right)^T\right]^T \quad (21)$$

综合上述，有 $S^{-1}(P)=[C(I-A+BS^{-1}(P)K)^{-1}B]^{-1}$ 成立．所以，控制系统稳定时，静态无偏差，即实现了静态解耦．

定理2　如果选取预测控制时域 $p_j=\delta_j+1$，状态反馈预测控制系统稳定，则它是预测控制系统动态解耦的充分必要条件．这里，$C_jA^iB=0$，　当 $i<\delta_j$，$i=1,2,\cdots,n-1$，n是系统的维数，$C_jA^iB\neq 0$，　当 $i=\delta_j$，$j=1,2,\cdots r$，r是系统输出的维数．

证明　可将状态反馈预测控制系统用下面的等效方框图表示

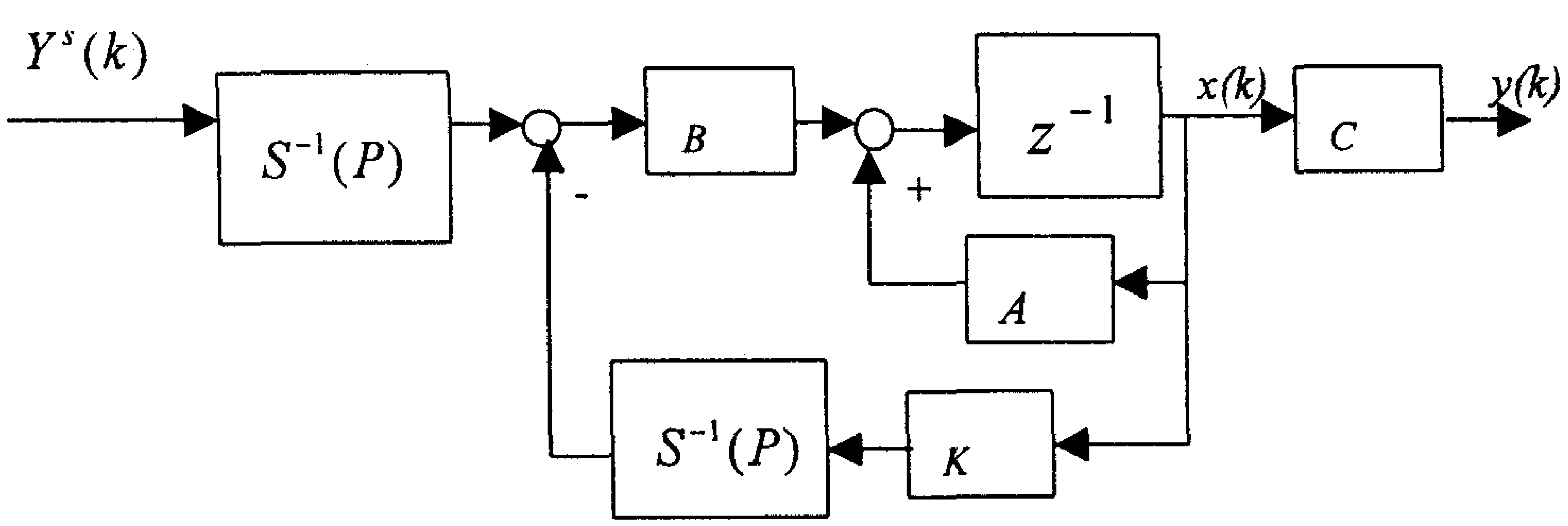

图1　状态反馈预测控制系统等效方框图

从图中可以看出，状态反馈预测控制系统可以等价为输入变换 $S^{-1}(P)$ 与状态反馈 $S^{-1}(P)K$ 控制结构．按定理条件选取预测时域 $p_j=\delta_j+1$，是逆矩阵 $S^{-1}(P)$ 存在的必要条件，定理的以下证明与状态反馈动态解耦设计相同[12]，证明略．

推论1　如果选取预测时域$p=1$，预测控制系统稳定，它一定是动态解耦的．

推论2　如果对某个输出 $y_j(k)$ 选取预测时域 $p_j=\delta_j+1$，预测控制系统是稳定

的，则除了对给定$Y^s{}_j(k)$以外，其它的给定$Y^s{}_i(k)$，$i \neq j$，$i = 1,2,\cdots,r$，对$y_j(k)$无影响，即实现了部分解耦.

4 结论

动态解耦在实际应用中会受到很大的限制，首先要保证控制系统稳定，既动态解耦是否一定能够实现；其次控制作用不能过大，需要满足生产过程安全运行与平稳操作等方面的要求；最后控制模型很难准确，被控过程随时间变化或操作条件变化等因素的影响，存在着非线性、时变性、不确定性等因素. 但是，状态反馈预测控制系统，使用实测状态变量反馈，按照使偏差最小的在线滚动优化控制指标设计，虽然没有实现动态解耦，但其动态控制过程满足优化控制条件，具有在线反馈校正，从而提高了控制系统的抗干扰能力及鲁棒性，并具有静态无偏差特性，所以，它更具有实际应用价值.

参 考 文 献

1 Culter,C.R. and Ramaker, B.L. Dynamic Matrix Control -A computer control algorithm. *JACC, 1980, San Francisco.*

2. Clarke, D W et.al Generalized Predictive Control *Automatica* 1987, **23**(2) 137-148

3 Clarke, D.W. and Mohtadi, C. Properties of Generalized Predictive Control. *Automatica* 1989, **25**(6): 859-875

4. 袁璞，单值预估控制，石油大学学报（自然科学），1992, **16**(5) : 100-109.

5. 袁璞等，状态反馈预估控制，自动化学报，1993, **19**(5) :569-577.

6. 胡品慧，多变量状态反馈预测控制及应用，北京：石油大学（北京）博士学位论文，1999

7. Froisy, J. B, Model predictive control: past, preset and future. *ISA Transaction*, 1994, 33:235-343.

8. 金以慧，生产过程的先进控制，化工自动化及仪表，1997，**24**（5）：59-66

9 Culter, C R, Eakens R W, et.al. A single multivariable controller to an FCC unit. *NPRA 1993 Annual Meeting* (San Antonio 3/21-23/93) Paper N.AM-93-48 16P.

10. 袁璞，炼油过程先进控制技术的发展与应用，石油炼制与化工，1994(10) :28-33.

11. 舒迪前编著，预测控制系统及其应用，北京：机械工业出版社，1998

12. 郑大钟，线性系统理论，北京：清华大学出版社，1990.

13. 袁璞，生产过程动态数学模型及其在线应用，北京：中国石化出版社，1994.

14. 金以慧等，过程控制，北京· 清华大学出版社，1993

15. 蒋蔚孙等，多变量控制系统分析与设计，北京：中国石化出版社，1997 4.

胡品慧 男，1959年生，1999年获石油大学工学博士学位，现为石油大学（北京）机电工程学院副教授，主要研究方向为控制理论与应用、预测控制、先进过程控制.