自 动 化 学 报
2000 年 6 月　　ACTA　AUTOMATICA　SINICA　　增刊 B

不确定时滞系统可靠 H^{∞} 控制—LMI 方法

李志虎　邵惠鹤

(上海交通大学自动化系　上海　200030)

摘　要　研究了一类具有非线性不确定性的线性时滞系统的可靠 H^{∞} 控制问题，其非线性不确定性是增益有界的，而无需满足匹配条件．通过求解一个特定的线性矩阵不等式(LMI)，来设计在执行器失效情形下的可靠 H^{∞} 控制器，并用算例验证了该设计方法的有效性．

关键词　时滞系统，非线性不确定性，执行器失效，可靠 H^{∞} 控制，线性矩阵不等式．

1　引言

在实际控制系统中，时滞和不确定性是不可避免的，因此不确定时滞系统的 H^{∞} 控制引起国内外许多学者的极大关注，并获得了一些研究成果[1, 2]．但系统实际运行时，控制元件发生故障往往使系统不能得到满意的性能，甚至会破坏系统的稳定性，文献[3，4]将一般线性不确定系统的可靠 H^{∞} 控制[5]推广到时滞系统，利用代数 Riccati 方程方法考虑了具有状态滞后的线性不确定系统在执行器失效情形下的可靠 H^{∞} 控制．严格说来，实际对象均具有非线性特征，用非线性函数刻画模型的不确定性部分更接近于工程实际．为此我们将讨论一类非线性不确定动态时滞系统的可靠 H^{∞} 控制问题，利用线性矩阵不等式(LMI)构造出相应的可靠 H^{∞} 控制器．相对 Riccati 方程，LMI 方法使得问题的求解更行之有效．

2　问题描述

考虑如下的具有非线性不确定性的连续时滞系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+\Delta f(x(t),t)+A_1x(t-h)+\Delta f_1(x(t-h),t)+Bu(t)+Dw(t),\\ z(t)=Ex(t),\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 是状态变量，$u(t)\in R^m$ 是控制输入，$w(t)\in R^p$ 是干扰输入，且 $w(t)\in L_2[0,\infty)$，$z(t)\in R^q$ 是被控输出，A,A_1,B,D,E 是已知的常数矩阵，h 是时滞常数. $\Delta f,\Delta f_1$ 均连续可微，且可表示为

$$\begin{cases}\Delta f(x(t),t)=Hg(x(t),t),\\ \Delta f_1(x(t-h),t)=H_1g_1(x(t-h),t),\end{cases}\tag{2}$$

其中 H,H_1 是适当维数的常数矩阵，$g(\cdot,\cdot),g_1(\cdot,\cdot)$ 是满足增益有界条件

$$\begin{cases}\|g(x(t),t)\|\le\|Mx(t)\|,\\ \|g_1(x(t-h),t)\|\le\|Nx(t-h)\|,\end{cases}\quad \forall x\in R^n,\forall t\in R,\tag{3}$$

的未知非线性连续可微函数向量，其中 M,N 是加权常数矩阵，$\|\cdot\|$ 表示向量的 Euclid 范数或矩阵的谱范数.

对于系统(1)，执行器分为两类：一类是容易失效的，记为 $\Omega\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$，这类执行器对于系统的稳定性而言是冗余的，但它们可用来改善系统的性能；另一类记为 $\overline{\Omega}=\{1,2,\cdots,m\}-\Omega$，这类执行器不会失效，它们将用以镇定被控系统。将控制矩阵做如下分解

$$B=B_\Omega+B_{\overline{\Omega}},\tag{4}$$

其中 B_Ω 和 $B_{\overline{\Omega}}$ 是对应于集合 Ω 和 $\overline{\Omega}$ 分别把 B 中相应的列取为零而得. 我们记实际失效的执行器集合为 ω，显然它是集合 Ω 的子集($\omega\subseteq\Omega$)，这样可引入如下的分解形式

$$B=B_\omega+B_{\overline{\omega}},\tag{5}$$

其中 B_ω 和 $B_{\overline{\omega}}$ 类似于对 B 进行 B_Ω 和 $B_{\overline{\Omega}}$ 分解. 目的是设计状态反馈控制器

$$u(t)=Kx(t),\ K\in R^{m\times n},\tag{6}$$

对于 $\omega\subseteq\Omega$ 的执行器失效情形和满足(3)的任意非线性不确定性，使得闭环系统是渐近

稳定的，并且满足 H$^\infty$ 范数约束条件．若该状态反馈控制律存在，则称系统(1)在执行器失效情形下是可靠 H$^\infty$ 镇定的．

3 主要结果

定理1．给定正常数 $\gamma > 0$，假定存在正常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 和正定对称阵 $Q > 0$ 使得如下的LMI成立：

$$\begin{bmatrix} R & QE^T & QM^T & S \\ EQ & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ MQ & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ S^T & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

其中 $R = AQ + QA^T - B_{\overline{\Omega}} B_{\overline{\Omega}}^T + DD^T + B_\Omega B_\Omega^T + \varepsilon_1 HH^T + \varepsilon_2 (H_1 H_1^T + A_1 A_1^T)$,

$S = [Q \quad QN^T]$,

而反馈控制律采用 $\boldsymbol{u}(t) = -0.5 B^T Q^{-1} \boldsymbol{x}(t)$ 时，则系统(1)在任意的执行器失效 $\omega \subseteq \Omega$ 和容许的非线性不确定情形下是具有扰动衰减度 γ 可靠 H$^\infty$ 镇定的．

证明．令 $P = Q^{-1}$，从LMI(7)可得以下的Riccati不等式

$$\begin{aligned} & PA + A^T P - PB_{\overline{\Omega}} B_{\overline{\Omega}}^T P + P(DD^T + B_\Omega B_\Omega^T)P + \varepsilon_1 PHH^T P \\ & + \varepsilon_2 P(H_1 H_1^T + A_1 A_1^T)P + \varepsilon_1^{-1} M^T M + \varepsilon_2^{-1}(I + N^T N) + \gamma^{-2} E^T E < 0. \end{aligned} \tag{8}$$

现证明闭环系统的渐近稳定性．系统(1)在执行器失效 $\omega \subseteq \Omega$ 时相应的闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = & (A - 0.5 B_{\overline{\omega}} B_{\overline{\omega}}^T P)x(t) + \Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), t) + A_1 \boldsymbol{x}(t-h) + \Delta \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}(t-h), t) \\ & + [D \quad B_\omega] \overline{\boldsymbol{w}}(t), \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{w}}(t) = [\boldsymbol{w}^T(t) \quad \boldsymbol{u}_\omega^T(t)]^T$，而 $\boldsymbol{u}_\omega(t) \in R^m$ 是失效执行器部分所产生的干扰输入．选取如下的Lyapunov函数

$$V(x,t)=x^TPx+\varepsilon_1^{-1}\int_0^t(\|Mx(s)\|^2-\|g(x(s),s)\|^2)ds+\varepsilon_2^{-1}\int_0^t(\|Nx(s-h)\|^2-\|g_1(x(s-h),s)\|^2)ds+\varepsilon_2^{-1}\int_{t-h}^t x^T(s)(I+N^TN)x(s)ds, \tag{10}$$

那么无扰动输入(即 $\overline{w}(t)=0$)时，应用(4)，(5)和(8)，经整理得 V 沿系统(9)的导数

$$\dot{V}(x,t)<-x^T(PDD^TP+PB_\Omega B_\Omega^TP+\gamma^{-2}E^TE)x, \tag{11}$$

显然 $\dot{V}(x,t)<0$，所以闭环系统是鲁棒渐近稳定的．为了证明系统的 H^∞ 扰动衰减性能，引入 $J=\int_0^\infty(\gamma^{-2}z^Tz-\overline{w}^T\overline{w})dt$．在零初始条件下，对任意的 $\overline{w}\in L_2[0,\infty)$ 有

$$\begin{aligned}J&\le\int_0^\infty(\gamma^{-2}z^Tz-\overline{w}^T\overline{w}+\dot{V})dt\le\int_0^\infty\{\gamma^{-2}z^Tz-\overline{w}^T\overline{w}+\\&\quad 2x^TP[D\ B_\omega]\overline{w}-x^T(PDD^TP+PB_\Omega B_\Omega^TP+\gamma^{-2}E^TE)x\}dt\\&\le-\int_0^\infty(\overline{w}-[D\quad B_\omega]^TPx)^T(\overline{w}-[D\quad B_\omega]^TPx)dt\le 0,\end{aligned} \tag{12}$$

所以 $\|z\|_2\le\gamma\|\overline{w}\|_2,\forall\overline{w}\in L_2[0,\infty)$．因而系统(1)是具有扰动衰减度 γ 可靠 H^∞ 镇定的． 证毕．

4 算例

本节将给出一个设计算例来说明可靠 H^∞ 控制器的设计方法．考虑系统(1)，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&0&1\\0.7&0&-1\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0.2&0.4&0\\0&0.1&0.1\\0.3&0.2&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&0.6&1\\2&0.4&1\\1&1&3\end{bmatrix},$$

$$\Delta f=[0.2|\sin x_1\sin x_2|^{\frac{1}{2}}\quad 0.2|\sin x_2\sin x_3|^{\frac{1}{2}}\quad 0.2|\sin x_1\sin x_3|^{\frac{1}{2}}]^T,$$

$$\Delta f_1=[0.1\sin x_1(t-h)\quad 0.1\sin x_2(t-h)\quad 0.1\sin x_3(t-h)]^T,$$

$$D=[0.3\quad 0.4\quad 1]^T,\quad E=[1\quad 0.5\quad 0.5],\quad \Omega=\{2\}.$$

根据(2)，(3)可得，$H=0.2I$，$H_1=0.1I$，$M=N=I$．为不失一般性取 $\gamma=1$，应

用MATLAB软件包求得可靠 H^∞ 控制器

$$u(t)=-0.5B^TQ^{-1}x(t)=\begin{bmatrix}-2.8320 & -2.0762 & -0.4888\\ -1.0416 & -0.0404 & -0.8543\\ -0.4752 & -1.2902 & -2.8438\end{bmatrix}x(t).$$

5 结论

本文针对具有非线性不确定性的状态迟延系统，给出了可靠 H^∞ 控制器的设计方法. 只要解一LMI即可获得可靠状态反馈控制律，设计方法较为简单. 该控制器对容许的非线性不确定性和可能的执行器失效 $\omega\subseteq\Omega$ 情况，不仅能鲁棒可靠镇定闭环系统而且满足一定的 H^∞ 范数约束. 数值算例表明了其可靠 H^∞ 控制器的设计方法是有效的.

参 考 文 献

1 Choi H H, Chung M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls. *Automatica*, 1995, **31**: 1349-1351

2. Su H, Wang J, Yu L, Chu J. Robust H^∞ controller design for time-varying uncertain linear systems with time-varying state and control delays. *Int. J. System Science*, 1998, **29**: 863-872

3. Gu Y, Geng C, Qian J, Wang L. Robust reliable H^∞ control for uncertain time-delay systems. In: Proc. American Control Conference, 1998, 2145-2146

4. Wang Z. Robust H^∞ reliable control for linear state delayed systems with parameter uncertainty. In: Proc. American Control Conference, 1998, 2405-2409

5. Seo C J, Kim B K. Robust and reliable H^∞ control for linear systems with parameter uncertainty and actuator failure. *Automatica*, **32**: 465-467, 1996

李志虎 男，1962 年生. 1983 年毕业于安徽机电学院电子工程系，1991 年获湖南大学工业自动化专业硕士学位，现为上海交通大学自动控制理论及应用专业博士研究生. 主要研究方向为时滞系统的鲁棒控制等.

邵惠鹤 男，1936 年生. 现为上海交通大学自动化系教授、博士生导师. 目前研究兴趣是工业过程模型化及优化控制、智能控制等.