

# 计算机控制力学持久机炉温的数学模型\*

王家声 郑毓蕃

(上海师范学院) (上海师范大学)

## 摘 要

本文讨论利用现代控制理论的一个实际例子。被控制的对象是一个带有两个独立绕组的电炉，采用两个热电偶来测量两个不同点上的炉温。炉子上、下部分的温度控制精度优于 $\pm 2^\circ\text{C}$ 。将被控对象处理为具有两个变量的LQG系统。数学模型由动态数学模型，卡尔曼(Kalman)滤波器，最佳状态反馈及自适应设置点跟踪组成。

此系统已对70多台同类型炉子实现了群控。

## 一、问题的提出

本课题控制对象是力学持久机，它主要用来对钢种进行力学试验，试验时将钢样放入持久机，两端加上一定拉力(如500公斤)，在一定高温下(如 $800^\circ\text{C}$ )，拉到规定时间或拉断为止。两端的拉力可由机械装置解决，而炉温的恒温控制虽有常规(PID)控制仪表，但仍要人工调节升温过程。人工调节时间长，耗电大，劳动强度也大。为了对上百台炉子进行集中控制，工厂提出用电子计算机实现炉温的全自动闭环控制。在采用计算机巡回检测的基础上，1977年5月用现代控制论的方法在单台炉子上实现了闭环控制。

## 二、模型辨识

### 1. 系统的表示

图1是持久机内部示意图，炉子上、下部用两组电热丝加热( $u_1, u_2$ )，钢样两端用两组热电偶测温( $z_1, z_2$ )。要求根据测得的温度不断调节加热电压，使上、下端输出温度与设定值之差不超过 $\pm 4^\circ$ ，上、下端温度之差也不超过 $\pm 4^\circ$ 。

因为炉子较小，二组电热丝靠得较近，因此上、下端输入对上、下端输出都有影响，所以它是一个典型的双输入-双输出系统，如图2所示。

根据试验资料，我们将这个系统处理为双输入-双输出定常LQG(线性、二次、高斯)系统，用一个二阶的差分方程来描述不带噪声的系统模型：

$$\mathbf{Z}_k + A_1 \mathbf{Z}_{k-1} + A_2 \mathbf{Z}_{k-2} = B_1 \mathbf{U}_{k-1} + B_2 \mathbf{U}_{k-2} \quad (1)$$

这里  $\mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} z_k^{(1)} \\ z_k^{(2)} \end{pmatrix}$  是输出向量， $z_k^{(1)}$ ， $z_k^{(2)}$  分别表示上、下端在  $k$  时刻的输出值。  $\mathbf{U}_{k-1} =$

\* 本文所涉及的试验数据均由上钢五厂第二中心试验室夏天池同志提供。上海师大数学系七四届学员马亚平等为完成此项目作了不少计算工作。本文曾在中国自动化学会1978年年会上宣读

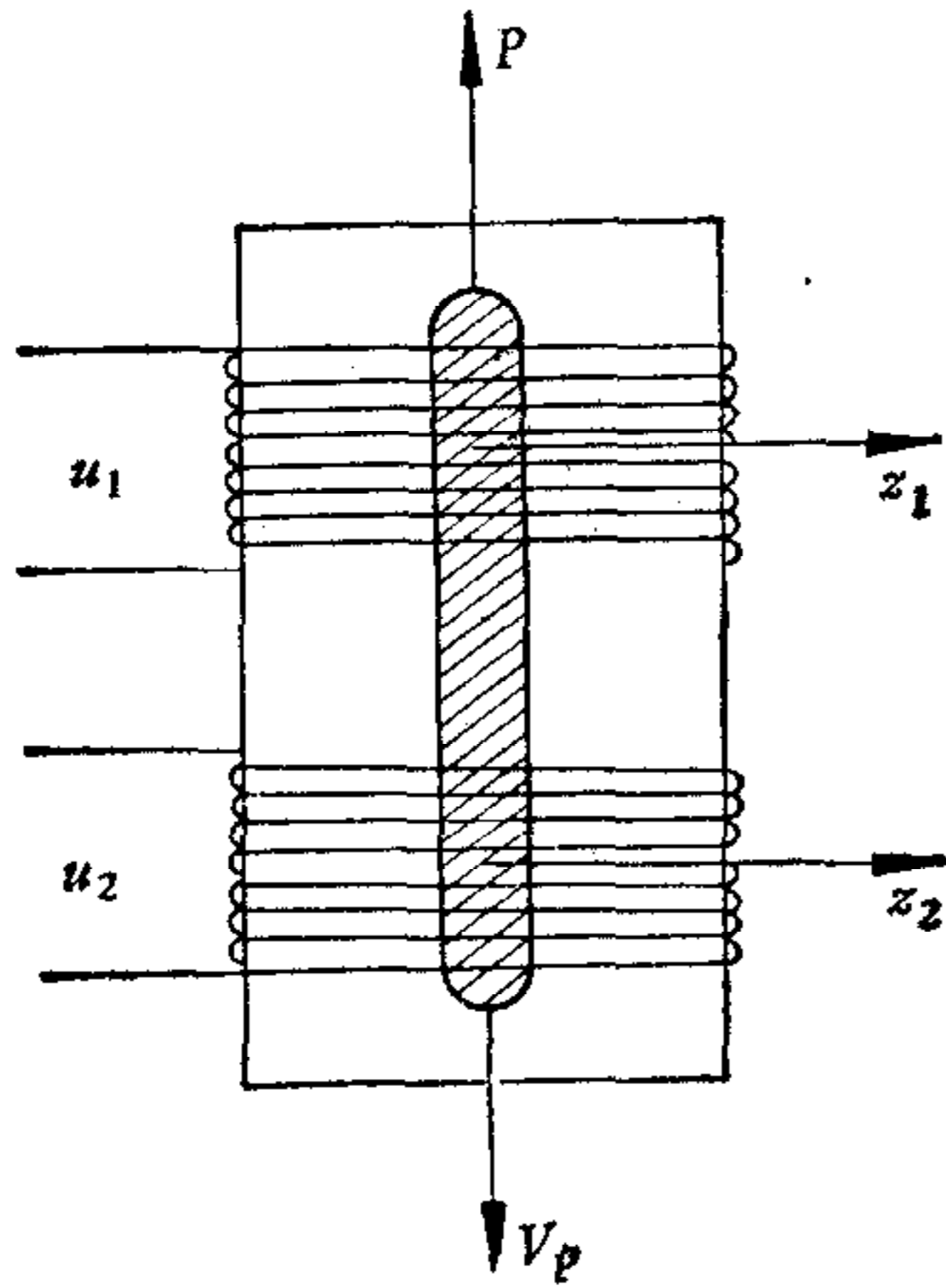


图 1

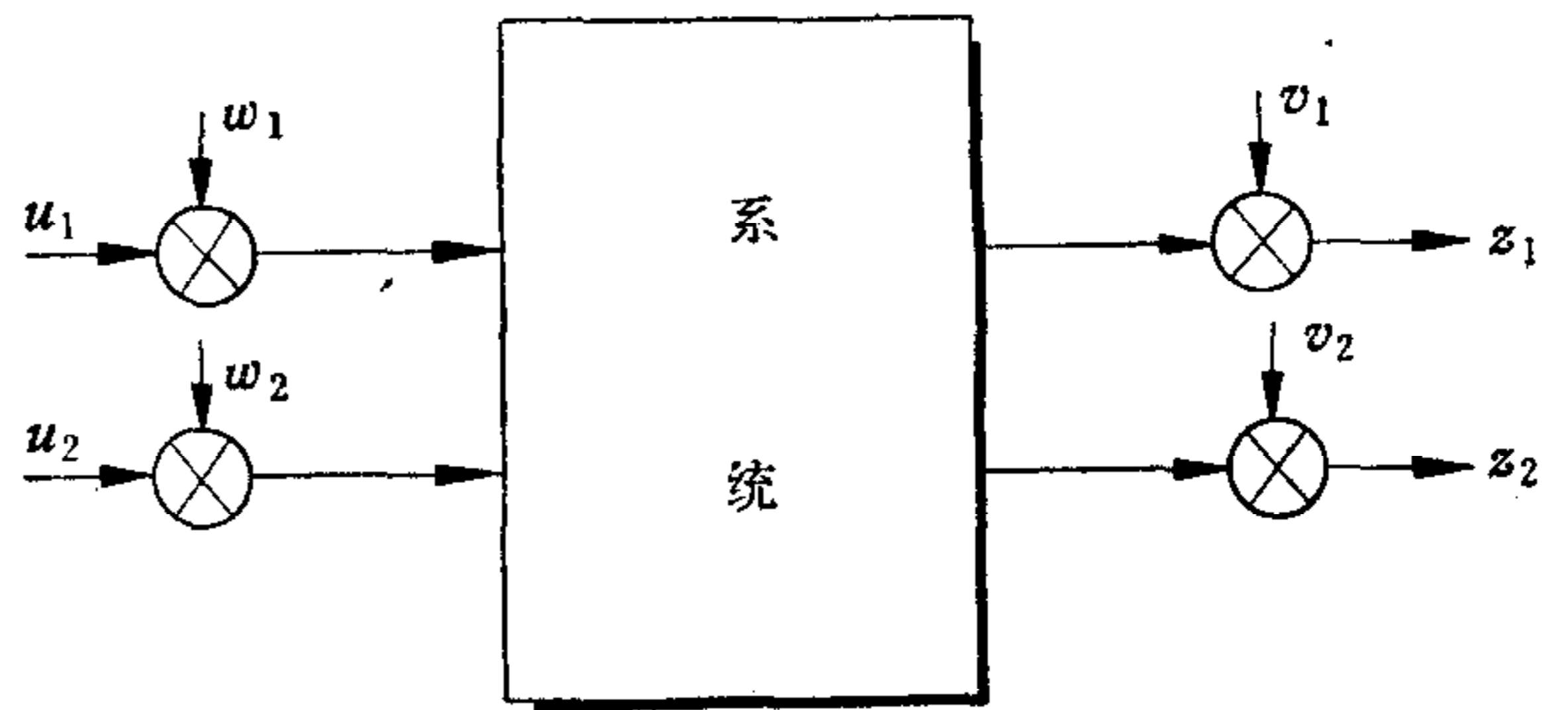


图 2

$\begin{pmatrix} u_{k-1}^{(1)} \\ u_{k-1}^{(2)} \end{pmatrix}$  是输入向量,  $u_{k-1}^{(1)}$ ,  $u_{k-1}^{(2)}$  分别表示上、下端在  $k-1$  时刻的输入值。

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ b_{21}^{(2)} & b_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

分别是系数矩阵。为了识别系数矩阵,我们先通过试验获得脉冲响应阵。

### 2. 脉冲响应阵

我们知道,传递函数的拉氏变换  $G(s)$  与输入、输出的拉氏变换  $U(s)$ 、 $Z(s)$  之间有如下关系:

$$Z(s) = G(s)U(s) \quad (2)$$

$G(s)$  为传递函数阵。(2)式用框图表示如图 3。

脉冲响应阵就是传递函数阵的拉氏逆变换,即

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

### 3. 伪随机码辨识

我们采用最长二进制  $m$ -序列作信号源,识别系统的脉冲响应[1]。

运用 Wiener-Hopf 方程应用于系统(1),可以得以下几个方程式:

$$R_{z_1 u_1}(\tau) = \int_0^T R_{u_1 u_1}(\tau - \theta) h_{11}(\theta) d\theta + \int_0^T R_{u_2 u_1}(\tau - \theta) h_{12}(\theta) d\theta \quad (3)$$

$$R_{z_1 u_2}(\tau) = \int_0^T R_{u_1 u_2}(\tau - \theta) h_{11}(\theta) d\theta + \int_0^T R_{u_2 u_2}(\tau - \theta) h_{12}(\theta) d\theta \quad (4)$$

$$R_{z_2 u_1}(\tau) = \int_0^T R_{u_1 u_1}(\tau - \theta) h_{21}(\theta) d\theta + \int_0^T R_{u_2 u_1}(\tau - \theta) h_{22}(\theta) d\theta \quad (5)$$

$$R_{z_2 u_2}(\tau) = \int_0^T R_{u_1 u_2}(\tau - \theta) h_{21}(\theta) d\theta + \int_0^T R_{u_2 u_2}(\tau - \theta) h_{22}(\theta) d\theta \quad (6)$$

其中  $R_{z_i u_j}(\tau)$  表示  $z_i(t)$ 、 $u_j(t)$  的互相关函数。  $R_{u_i u_j}(\tau)$  表示  $u_i(t)$ 、 $u_j(t)$  的自相关函数。

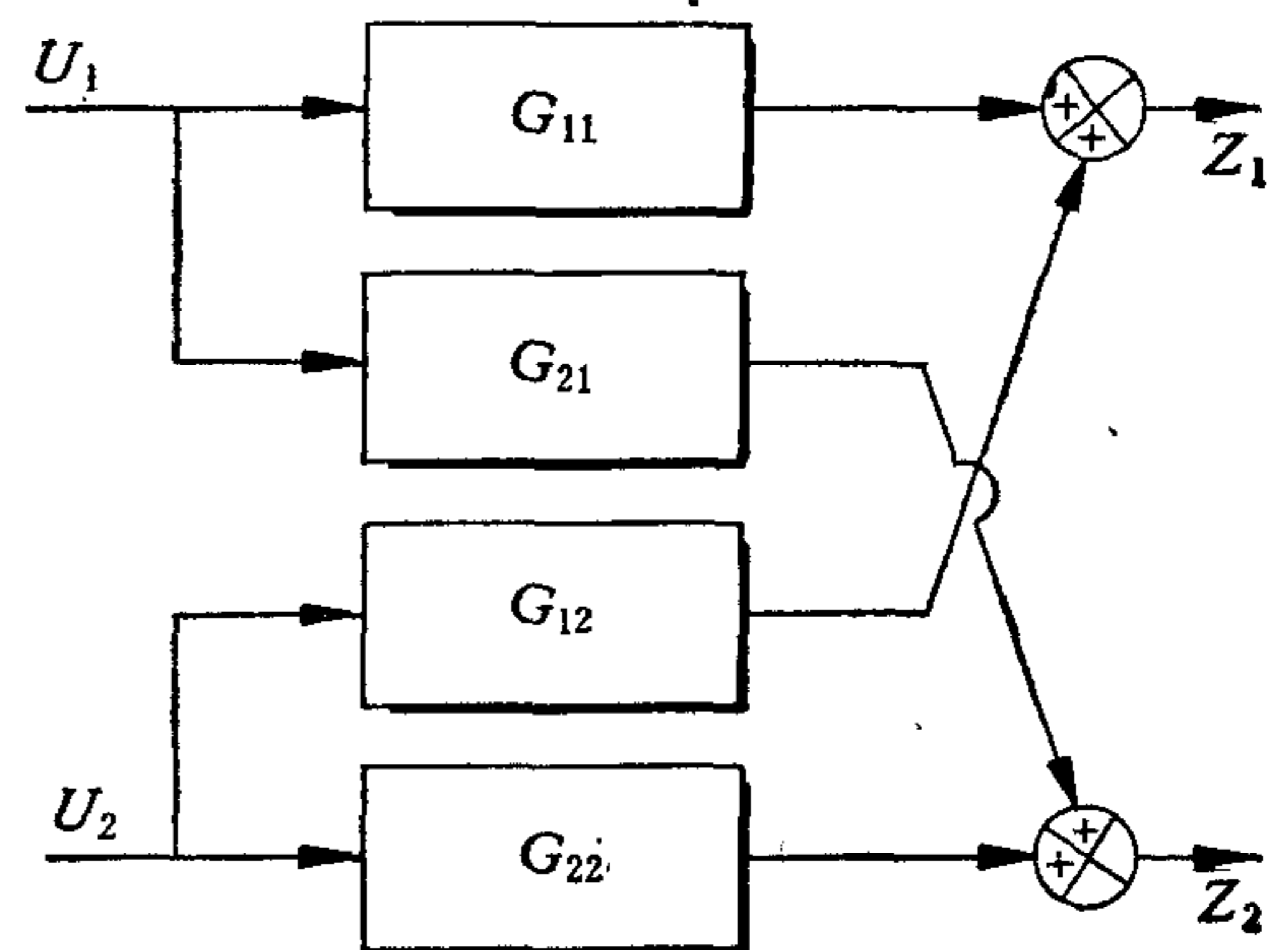


图 3

我们分别用逐个输入与联立输入方法来获得脉冲响应阵。

### (i) 逐个输入法

先将下部输入端稳定在“零”位(设定功率输入值上),上部输入端  $u_1$ , 输入一个 63 ( $= 2^6 - 1$ ) 码的伪随机信号来近似代替白噪声信号。伪随机码每一个电平的电平宽为 5 分钟, 幅度为 5 伏, 一个周期时间  $= 63 \times 5 = 315$  (分钟), 超过了系统的持续时间 (4 小时)。

在伪随机码输入的同时, 记录上、下输出端的输出值  $z_{1,i}, z_{2,i}$ , 每间隔 5 分钟采样一次, 并在线进行相关分析, 计算如下相关函数值:

$$R_{z_1 u_1}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{1,i} u_{1,i-\tau} \quad N = 63, \quad \tau = 0, 1, \dots, N-1$$

$$R_{z_2 u_1}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{2,i} u_{1,i-\tau} \quad N = 63, \quad \tau = 0, 1, \dots, N-1$$

进行四个周期的试验后, 再将上部输入端稳在“零”状态, 下部输入端输入同样的 63 码的周期性伪随机信号, 经过上述相同步骤, 得到

$$R_{z_1 u_2}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{1,i} u_{2,i-\tau} \quad N = 63, \quad \tau = 0, 1, \dots, N-1$$

$$R_{z_2 u_2}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{2,i} u_{2,i-\tau} \quad N = 63, \quad \tau = 0, 1, \dots, N-1$$

为了减少试验误差, 我们把后三个周期的相关函数值进行平均, 作为相关分析的最后结果。

因为输入  $u_1, u_2$  是近似白噪声信号, 根据伪随机码的性质, 在上部输入伪码时  $R_{u_1 u_1}(\tau) = K\delta(\tau)$ , 在下部输入伪码时  $R_{u_2 u_2}(\tau) = K\delta(\tau)$ , 它们是  $\delta$  函数, 而  $R_{u_1 u_2}(\tau) = 0$  (因为在逐个试验中  $u_1, u_2$  中总有一个为 0)。

根据  $\delta$  函数的性质, 由(3)、(4)、(5)、(6)式可得:

$$R_{z_1 u_1}(\tau) = Kh_{11}(\tau)$$

$$R_{z_2 u_1}(\tau) = Kh_{21}(\tau)$$

$$R_{z_1 u_2}(\tau) = Kh_{12}(\tau)$$

$$R_{z_2 u_2}(\tau) = Kh_{22}(\tau)$$

因为伪随机码信号是叠加在一个稳态输入上的, 对应这个稳态输入值应有一个稳态输出值, 因此每个采样值都应减去稳态值, 另外伪随机码的自相关函数与理想的脉冲函数还有区别, 因此上述计算的互相关函数还需通过如下计算才能获得脉冲响应。如

$$h_{11}(\tau) = (R_{z_1 u_1}(\tau) - x_1) \cdot \frac{N}{N+1} \cdot M \quad (7)$$

其中  $x_1$  是  $R_{z_1 u_1}(\tau)$  的稳态值,  $x_1$  的理论算法可参阅[1],  $M$  是为了适应控制机程序编制的需要而加的单位比例因子。这样就获得了脉冲响应阵的  $h_{11}(\tau), h_{12}(\tau), h_{21}(\tau), h_{22}(\tau)$ 。

### (ii) 联立输入法

用 127 码的伪随机码作为输入信号, 将相互位移 63 码的二个 127 码的周期性伪随机

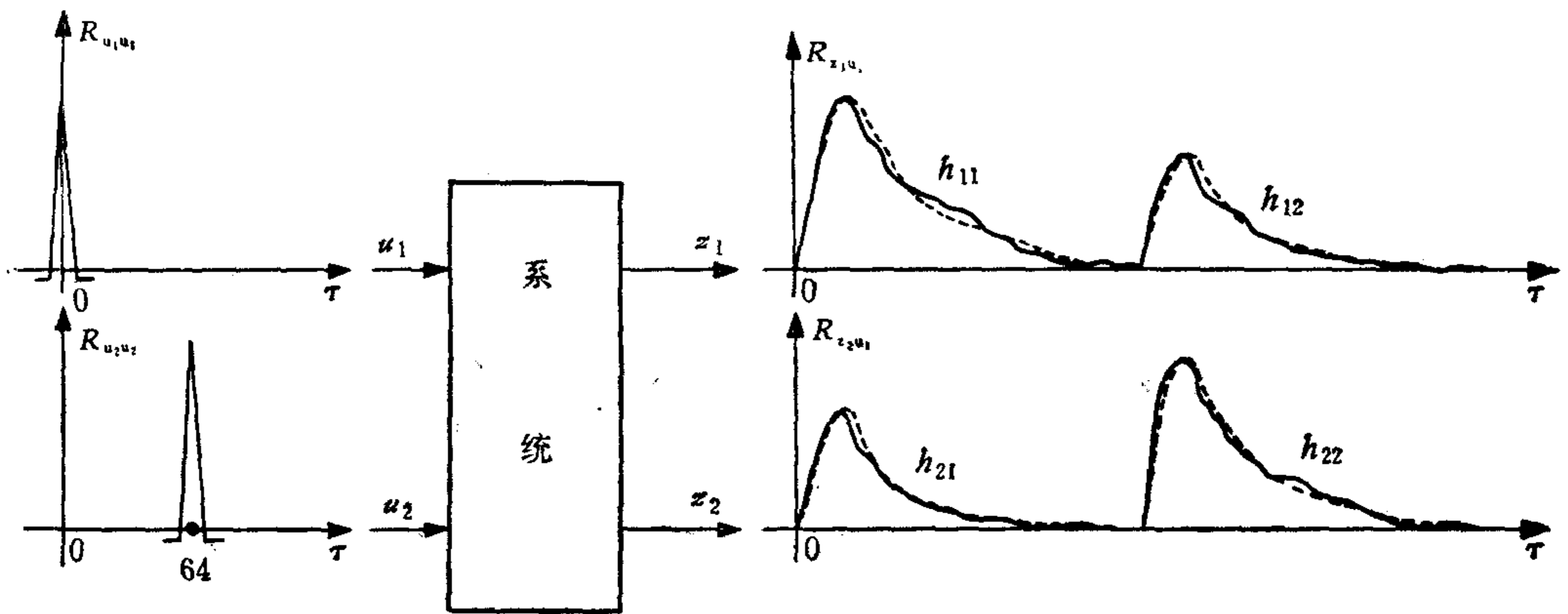


图 4

码信号同时输入上、下两端,并对上、下两输出端的采样值计算相关函数值,计算结果可用图 4 中实线表示。这相当于在  $\tau = 0$  时上端输入一个脉冲,  $\tau = 64$  时,下端输入一个脉冲,从而在  $\tau = 0$  至  $\tau = 64$  之间和  $\tau = 64$  至  $\tau = 127$  之间输出端分别获得四个脉冲响应  $h_{11}(\tau)$ ,  $h_{12}(\tau)$ ,  $h_{21}(\tau)$ ,  $h_{22}(\tau)$ 。

#### 4. 参数估计

将上述脉冲函数作为输入函数,脉冲响应离散值作为输出数据,用最小二乘法来估计模型参数。

考虑系统噪声,将模型方程(1)展开得:

$$z_k^{(1)} = -a_{11}^{(1)}z_{k-1}^{(1)} - a_{12}^{(1)}z_{k-1}^{(2)} - a_{11}^{(2)}z_{k-2}^{(1)} - a_{12}^{(2)}z_{k-2}^{(2)} + b_{11}^{(1)}u_{k-1}^{(1)} + b_{12}^{(1)}u_{k-1}^{(2)} + b_{11}^{(2)}u_{k-2}^{(1)} + b_{12}^{(2)}u_{k-2}^{(2)} + w_k^{(1)} \quad (8)$$

$$z_k^{(2)} = -a_{21}^{(1)}z_{k-1}^{(1)} - a_{22}^{(1)}z_{k-1}^{(2)} - a_{21}^{(2)}z_{k-2}^{(1)} - a_{22}^{(2)}z_{k-2}^{(2)} + b_{21}^{(1)}u_{k-1}^{(1)} + b_{22}^{(1)}u_{k-1}^{(2)} + b_{21}^{(2)}u_{k-2}^{(1)} + b_{22}^{(2)}u_{k-2}^{(2)} + w_k^{(2)} \quad (9)$$

尾部的  $w$  表示各个时刻所带的误差,(8)、(9)式可简写为向量形式:

$$\mathbf{Z}^{(1)} = A\beta^{(1)} + W^{(1)} \quad (8')$$

$$\mathbf{Z}^{(2)} = A\beta^{(2)} + W^{(2)} \quad (9')$$

$\beta^{(1)} = (-a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(1)} - a_{11}^{(2)} - a_{12}^{(2)}b_{11}^{(1)}b_{12}^{(1)}b_{11}^{(2)}b_{12}^{(2)})_{\tau}$ ,  $\beta^{(2)} = (-a_{21}^{(1)} - a_{22}^{(1)} - a_{21}^{(2)} - a_{22}^{(2)}b_{21}^{(1)}b_{22}^{(1)}b_{21}^{(2)}b_{22}^{(2)})_{\tau}$ , 就是所要估计的系数向量。问题变为给定矩阵  $A$  和量测向量  $\mathbf{Z}^{(1)}$  和  $\mathbf{Z}^{(2)}$  来估计系数向量  $\beta^{(1)}$ ,  $\beta^{(2)}$ 。参数的最小二乘法解表现为方程:

$$(A^T A)\beta^{(1)} = A^T \mathbf{Z}^{(1)}$$

我们用高斯消去法求得这个线性方程组的解  $\beta^{(1)*}$ , 同样可求得  $\beta^{(2)*}$ , 从而将模型方程中的十六个参数全部估计出来了。

最后将估计所得的参数代入模型方程,并假定分别在  $k = 0$  与  $k = 64$  时,上、下端输入一个脉冲信号,由模型方程计算其输出值,并与试验数据进行比较,拟合得较好(图 4 中之虚线即为模拟数据曲线)。

#### 5. 状态方程

对差分方程  $\mathbf{Z}_k + A_1\mathbf{Z}_{k-1} + A_2\mathbf{Z}_{k-2} = B_1\mathbf{U}_{k-1} + B_2\mathbf{U}_{k-2}$ , 如果令状态变量

$$X_k = \begin{pmatrix} Z_k \\ Z_{k+1} + B_1 U_k \end{pmatrix}$$

那么上述差分方程就可化为如下状态方程和量测方程:

$$X_{k+1} = \Phi X_k + \Gamma U_k$$

$$Z_k = H X_k$$

$$\text{其中 } \Phi = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_2 & -A_1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_1 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad H = (I, 0).$$

## 二、最佳反馈控制器的设计

状态变量中的  $Z_k = \begin{pmatrix} z_k^{(1)} \\ z_k^{(2)} \end{pmatrix}$  是实际状态与设定值的差。最佳准则选用二次型性能指标来表达,建立如下目标函数:

$$J = \sum_{k=1}^N \{q[(z_k^{(1)})^2 + (z_k^{(2)})^2 + (z_k^{(1)} - z_k^{(2)})^2] + q'[(u_{k-1}^{(1)})^2 + (u_{k-1}^{(2)})^2]\}$$

式中  $(z_k^{(1)} - z_k^{(2)})$  为上、下端温度偏差,  $q, q'$  是“权”, “权”的选择按重视什么品质而定,  $q, q'$  的选择仅与它们之比有关。

上述目标函数很容易化为如下矩阵形式:

$$J = \sum_{k=1}^N (X_k^T Q X_k + U_{k-1}^T Q' U_{k-1})$$

其中

$$Q = \begin{pmatrix} 2q & -q & 0 & 0 \\ -q & 2q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q' = \begin{pmatrix} q' & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix}$$

最佳控制即要寻找一组控制量  $\{U_0, U_1, \dots, U_{n-1}\}$  在服从状态方程条件下,使目标函数取得极小,可用变分法或动态规划方法求得这一组解,计算公式如下[2]:

$$U_{N-k}^* = -\Lambda_{N-k+1} \Phi X_{N-k}$$

$$\Lambda_{N-k+1} = (Q' + \Gamma^T Q_{N-k+1}^0 \Gamma)^{-1} \Gamma^T Q_{N-k+1}^0$$

$$Q_{N-k+1}^0 = Q + \Phi^T \tilde{Q}_{N-k+2} \Phi$$

$$\tilde{Q}_{N-k+2} = Q_{N-k+2}^0 - Q_{N-k+2}^0 \Gamma \Lambda_{N-k+2}$$

这组递推公式是逆向推行的。可以证明当  $N$  充分大时,  $\Lambda_k \rightarrow \Lambda$  (常数矩阵),  $\Lambda$  称为反馈系数矩阵,有了  $\Lambda$  就可根据每一时刻的状态计算出一组反馈量:  $U_k^* = -\Lambda \Phi X_k$  实现最佳控制。

$$\text{我们取 } Q_{N+1}^0 = 0, \text{ 取 } Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} q & -\frac{q}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{q}{2} & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

计算了当  $q$  取不同值时的反馈系数阵, 并离线进行模拟, 以选取最理想的反馈系数矩阵供实时控制时使用。

### 三、卡尔曼滤波器的设计

实际的系统已处理为 LQG 系统, 根据分离定理, 最佳控制函数应为:

$$U_k^* = -\Lambda \Phi \hat{X}_k$$

这里的  $\hat{X}_k$  是对状态  $X_k$  的最佳线性滤波估计, 滤波估计公式为:

$$\hat{X}_k = (\Phi \hat{X}_{k-1} + \Gamma U_{k-1}) + K_k [Z_k - H(\Phi \hat{X}_{k-1} + \Gamma U_{k-1})]$$

由 Kalman 滤波公式,  $K_k$  的递推表达式[3]为:

$$K_k = P'_k H^r (H P'_k H^r + R)^{-1}$$

$$P'_k = \Phi P_{k-1} \Phi^r + \Gamma Q \Gamma^r$$

$$P_k = (I - K_k H) P'_k$$

其中  $Q$ 、 $R$  分别为模型噪声协方差阵和量测噪声协方差阵。

上述递推公式只要有初值  $\hat{X}_0$  与  $P_0$ , 利用已知的  $\Phi$ 、 $H$ 、 $Q$  和  $R$  就可推出一组  $K_k$  来, 根据卡尔曼滤波理论, 如果定常系统是能控的和能观的, 则滤波器方程一定是渐近稳定的, 从而  $\hat{X}_0$  与  $P_0$  是可以任意选取的, 而且  $\lim_{k \rightarrow \infty} K_k = K$ ,  $K$  叫做稳态增益矩阵。这里  $Q$ 、 $R$  的估计正确与否对  $K$  的计算影响较大, 我们根据实际情况, 并考虑到上、下两端的随机干扰并非完全无关, 分别选取

$$Q = \begin{pmatrix} q & \frac{q}{2} \\ \frac{q}{2} & q \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

计算了当  $q/r$  为不同数值时的增益矩阵  $K$ , 以供实时控制时试用。

### 四、自动跟踪系统输入设定值

由于系统存在功率飘移, 因此设计了输入功率点设定值的自动跟踪。主要利用卡尔曼滤波器的新息向量。

前面知道, 数学模型的预报输出为:

$$\hat{Z}_K = -A_1 Z_{K-1} - A_2 Z_{K-2} + B_1 U_{K-1} + B_2 U_{K-2}$$

而实际输出值为

$$Z_K = -A_1 Z_{K-1} - A_2 Z_{K-2} + B_1 (U_{K-1} + \Delta U_K) + B_2 (U_{K-2} + \Delta U_K)$$

这里  $\Delta U_K$  为功率飘移。

于是

$$\Delta Z_K = Z_K - \hat{Z}_K = B_1 \Delta U_K + B_2 \Delta U_K = (B_1 + B_2) \Delta U_K$$

即

$$\Delta U_K = (B_1 + B_2)^{-1} \Delta Z_K$$

在使用此式前我们先用指数平滑法对  $\Delta Z_K$  进行滤波处理。

$$\Delta \tilde{Z}_K = (1 - \alpha) \Delta \tilde{Z}_{K-1} + \alpha \Delta Z_K \quad (0 < \alpha < 1 \text{ 作适当选择})$$

这样

$$\Delta U_K = \begin{pmatrix} \Delta u_K^{(1)} \\ \Delta u_K^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{z}_K^{(1)} \\ \Delta \tilde{z}_K^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$U_K = -\Lambda \Phi X_K + \Delta U_K$$

其中

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = (B_1 + B_2)^{-1},$$

$$\Delta \tilde{Z}_K = \begin{pmatrix} \Delta \tilde{z}_K^{(1)} \\ \Delta \tilde{z}_K^{(2)} \end{pmatrix}$$

## 五、离线计算结果和实时控制计算框图

根据试验数据，离线计算所得的模型参数矩阵  $\Phi$ 、 $\Gamma$ 、 $H$ ，最佳反馈系数矩阵  $\Lambda$ ，卡尔曼滤波增益矩阵  $K$  和自适应修正参数矩阵  $C$ ，结果如下：（计算程序从略）

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.2167 & -0.0936 & 1.1097 & 0.1443 \\ -0.1053 & -0.2045 & 0.1357 & 1.1163 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.0391 & 0.0073 \\ 0.0220 & 0.0305 \\ 0.0964 & 0.0366 \\ 0.0488 & 0.0884 \end{bmatrix}$$

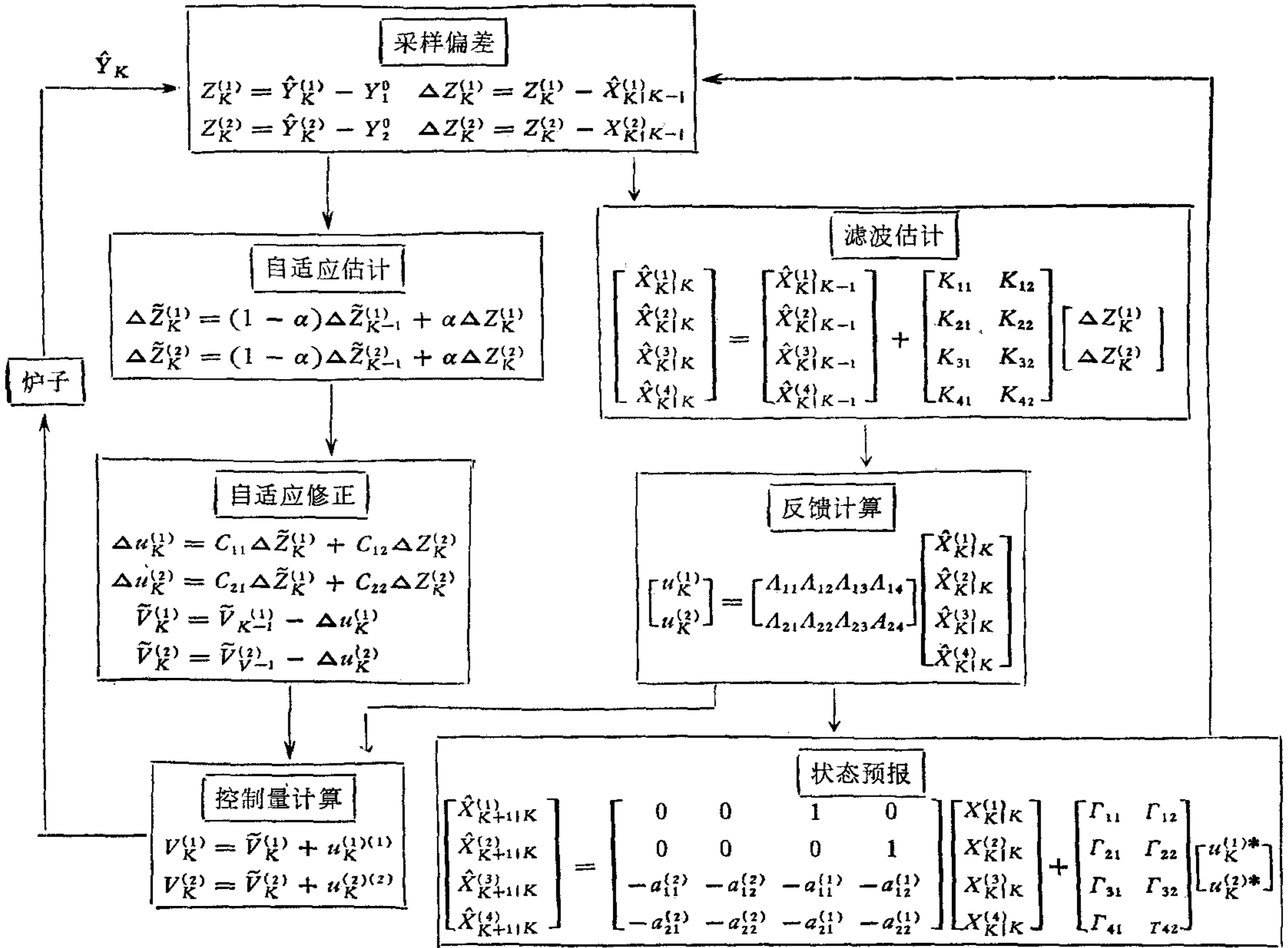
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0.8948 & 0.2504 & -5.6124 & 0.4579 \\ 0.1993 & 0.8610 & 1.4689 & -5.3246 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.5208 & 0.1702 \\ 0.1702 & 0.5260 \\ 0.6315 & 0.3015 \\ 0.2509 & 0.6533 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 13.5823 & -5.0891 \\ -6.6381 & 14.4152 \end{bmatrix}$$

实时控制计算框图：



### 六、使用效果

把上述实时控制计算公式与有关数据编成小型控制机程序进行调试，用上去后得到了很满意的结果，原来人工调节升温过程一般要 7—8 小时，现在计算机给出设定值后一小时半就能自动达到稳态，原来精度  $\pm 4^\circ$ ，现在在  $\pm 2^\circ$  以内，在劳动力方面完全代替了人工调节。在此基础上用同一模型在其他同类型炉子上控制也能得到较好的效果，现在已对 70 多台炉子实现了群控，节省了相应的 70 多台 PID 调节器，成本也降低了。该系统目前已稳定连续运行了一万多小时，取得了重大的经济效果。

### 参 考 资 料

[1] Davies W. D. T., "System identification for self-adaptive control" 1970, New York.  
 [2] 敬喜编“卡尔曼滤波器及其应用”国防工业出版社, 1973.  
 [3] 中国科学院数学所概率统计室编“离散时间系统数字滤波”科学出版社, 1975.



## A MATHEMATICAL MODEL OF COMPUTER-CONTROLLED CREEP-TESTING FURNACES

WANG KIA-SUNG

*(Institute of Teachers, Shanghai)*

CHENG YUE-FANG

*(University of Teachers, Shanghai)*

### ABSTRACT

An example of utilizing the modern control theory is discussed in this paper. The controlled object is an electric furnace with two independent heating windings. Two thermocouples are used to measure the furnace temperature at two different points. The accuracy of controlling the temperatures of the upper and lower portion of the furnace is better than  $\pm 2^\circ\text{C}$ . The object is treated as a LQG system with two variables. The mathematical model consists of dynamic mathematical model, a Kalman filter, an optimum state feedback and the self adapting set point following computation.

This control system has been used in controlling more than seventy similar furnaces with a small process-control computer.