第26卷 第5期
2000年9月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 5
Sep., 2000

# 应急模糊网络系统最大满意度路径的选取[1)]

刘春林
(南京大学国际商学院 南京 210093)
何建敏 盛昭瀚
(东南大学经济管理学院 南京 210096 E-mail:liu_cl@263.net)

**摘 要** 讨论给定限制期条件下的应急系统模糊路径问题.当边的长度为对称三角模糊数(Symmetric Triangular Fuzzy Number)时,由于模糊数的不可比性,网络中一般不存在绝对最短的路.为此,引入了路径满意度函数的概念,从而问题就变成:寻找一条从起点到终点的通路,应急车辆经过此路的时间不超过限制期 $t$ 的满意度最大.这样的路径选取问题实际可转化为一个比例路径问题,尽管许多比例路径问题已被证明是NP问题,完全可以针对问题的具体特点,运用最短路方法的变权迭代实现对该问题的精确求解.

**关键词** 对称三角模糊数,限制期,最短路,最大满意度路径.

# SELECTING OF THE MAXIMUM SATISFACTION FACTOR PATH IN FUZZY EMERGENCY NETWORK SYSTEMS

LIU Chunlin
(*International Business School, Nanjing University, Nanjing* 210093)
HE Jianmin SHENG Zhaohan
(*Economic Management School, Southeast University, Nanjing* 210096)

**Abstract** This paper deals with a fuzzy path problem for emergency systems in which a deadline is given. When arc lengths are symmetric triangular fuzzy numbers (STFNs), there usually does not exist the shortest path in a network because fuzzy numbers may be incomparable. While the satisfaction factor function is introduced, the paths then become comparable (based on satisfaction factor). And we consider the problem of finding a path through which the retrieve vehicle can reach the destination $v_t$ from the start node $v_s$ in a given deadline $t$ with the maximum satisfaction factor. This kind of problem can be regarded as the minimum ratio path problem known as a strong NP-complete problem. However, an algorithm is proposed to solve this problem by repeatedly using the shortest path approach.

1) 国家自然科学基金(79970096)资助项目.
收稿日期 1998-11-11 收修改稿日期 1999-03-02

**Key words** STFN, deadline, the shortest path, the maximum satisfaction factor path.

# 1 引言

在应急网络系统中,通常会规定一个限制期 $t$,即要尽力保证车辆在 $t$ 时间内从一地到达另一地,并且经过每一段路所需时间是不确定的. 本文讨论边权(时间)为 STFN (Symmetric Triangular Fuzzy Number)的最优路径的选取,即选择一条通路,车辆经过该路所需时间不超过限制期 $t$ 的满意度最大. 这类问题具有较强的应用背景,如某市消防大队就规定在接到火灾报警的20分钟内必须赶到事故现场,当应急车辆通过每一段路所需时间(节点间长度)为模糊数并且从出发点到事故地点不存在绝对保险的通路时,选择一条最大满意度或最小风险路径具有十分重要的意义.

给定一个赋权图 $G$,对每一边 $e$,对应权值表示为 $w(e)$,设 $R$ 为从起点 $v_s$ 到终点 $v_t$ 的所有路径的集合,若 $P$ 是 $G$ 中从 $v_s$ 到 $v_t$ 的一条路,则 $P\in R$,定义路 $P$ 的权为 $P$ 中所有边的权之和,记为 $w(P)$,即 $w(P)=\sum\limits_{e\in P}w(e)$. 能够完全满足限制期路径的最优集设为 $Q$,则 $Q=\{P/w(P)\leqslant t,P\in R\}$. 设 $P_0$为一条从 $v_s$ 到 $v_t$ 的最短路,那么,

$$w(P_0)=\min_{P} w(P). \tag{1}$$

显然,当 $w(e)$为普通实数时,只要看式(1)求得的最短路 $P_0$是否满足

$$w(P_0)\leqslant t, \tag{2}$$

若式(2)成立,则选择路径 $P_0(P_0\in Q)$;若式(2)不成立,显然有 $Q=\phi$.

当 $w(e)$为 STFN 时,$w(P)$也为 STFN,而模糊数的序关系"$\leqslant$"是个偏序,也就是说对图 $G$,路径之间通常是不可比的,一般不存在"$\leqslant$"意义下的最短路. 文中通过引入 STFN 小于等于 $t$ 的程度(满意度)的概念,定义了满意度函数 $F(P,t)$,用以表示选择路径 $P$ 所需时间不超过 $t$ 的满意度,并从该角度定义最优目标集 $S$. 设最大程度(最大满意度)满足限制期路径的最优集为 $S$,则

$$S=\{P/\max_{P\in R}F(P,t)\}. \tag{3}$$

我们的目标是找出一条路 $P^{\times}$,使得 $P^{\times}\in S$.

# 2 STFN 的性质及满意度函数的定义

## 2.1 与 STFN 有关的定义[1,2]

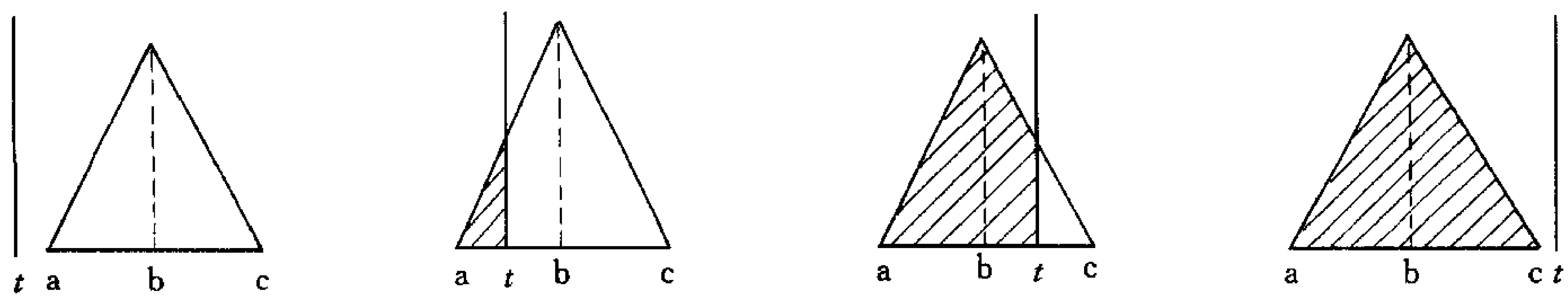
若 $M=[a,b,c](a<b<c)$为对称三角模糊数,那么 $b=(a+c)/2$.

记 $\chi$ 为所有形式如 $M$ 的对称三角模糊数的集合. 由于对称三角模糊数 $M$ 同普通实数 $t$ 在许多情况下是不可比的(如当 $a<t<c$ 时),为此可定义"$M\leqslant t$"的可能度(Certainty factor),记为 $T(\{M\leqslant t\})$. 通过面积比定义 $T(\{M\leqslant t\})$图1(阴影面积除以整个三角形面积)

**定义1.** 若 $M=[a,b,c]\in\chi$,定义

$$T(\{M \leqslant t\}) = \begin{cases} 0, & a > t; \\ 2\left(\dfrac{t-a}{c-a}\right)^2, & a \leqslant t < b = (a+c)/2; \\ 1 - 2\left(\dfrac{c-t}{c-a}\right)^2, & b = (a+c)/2 \leqslant t < c; \\ 1, & c \leqslant t. \end{cases}$$

从该定义不难看出：当 $t=b$ 时，$T(\{M\leqslant t\})=0.5$. 图1形象描述了 $T(\{M\leqslant t\})$的4种可能情况.



(a) $a>t$ 时，$T(\{M\leqslant t\})=0$　　(b) $a\leqslant t<b$ $0\leqslant T(\{M\leqslant t\})<0.5$　　(c) $b=\leqslant t<c$ $0.5\leqslant T(\{M\leqslant t\})<1$　　(d) $c\leqslant t$ $T(\{M\leqslant t\})=1$

图1　$t$ 和 STFN 比较

设 $M=[a,b,c]\in\chi$，$N=[c,d,e]\in\chi$，显然：$M+N=[a+c,b+d,c+d]\in\chi$.

**引理1.** 若 $M=[a,b,c]\in\chi$，$N=[a1,b1,c1]\in\chi$，并且 $a\leqslant t<c$，$a1\leqslant t<c1$，则 $T(\{M\leqslant t\})\leqslant T(\{N\leqslant t\})$的充要条件是：$\dfrac{t-a}{c-a}\leqslant\dfrac{t-a1}{c1-a1}$（或者$\dfrac{c-t}{c-a}\geqslant\dfrac{c1-t}{c1-al}$）.

证明."⇒" 由题意知：$T(\{M\leqslant t\})\leqslant T(\{N\leqslant t\})$，下面分两种情况讨论：

1）若 $t>b$，则 $T(\{M\leqslant t\})>0.5$，这样 $T(\{N\leqslant t\})>0.5$，故 $t>b1$. 所以

$$T(\{M\leqslant t\}) = 1 - 2\left(\frac{c-t}{c-a}\right)^2, T(\{N\leqslant t\}) = 1 - 2\left(\frac{c1-t}{c1-a1}\right)^2,$$

并且

$$1 - 2\left(\frac{c-t}{c-a}\right)^2 \leqslant 1 - 2\left(\frac{c1-t}{c1-a1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{c-t}{c-a} \geqslant \frac{c1-t}{c1-a1} \Rightarrow 1 - \frac{c-t}{c-a} \leqslant 1 - \frac{c1-t}{c1-a1} \Rightarrow \frac{t-a}{c-a} \leqslant \frac{t-al}{cl-al};$$

2）若 $t\leqslant b$，则 $T(\{M\leqslant t\})=2\left(\dfrac{c-t}{c-a}\right)^2\leqslant 0.5$. 这时若 $t>b1$，显然$\dfrac{t-a}{c-a}\leqslant\dfrac{t-a1}{c1-a1}$（因为$\dfrac{t-a}{c-a}\leqslant 0.5$，$\dfrac{t-a1}{c1-a1}>0.5$），否则如果 $t\leqslant b1$，则 $T(\{N\leqslant t\})=2\left(\dfrac{t-a1}{c1-a1}\right)^2$，由题意知：$T(\{M\leqslant t\})\leqslant T(\{N\leqslant t\})$，即有$2\left(\dfrac{t-a}{c-a}\right)^2\leqslant 2\left(\dfrac{t-a1}{c1-a1}\right)^2$，所以 $\dfrac{t-a}{c-a}\leqslant\dfrac{t-a1}{c1-a1}$.

"⇐"同样分"$t>b$"，"$t\leqslant b$"两种情况讨论，由于上述证明过程是可逆的，故引理得证.

### 2.2　满意度函数的定义

由于 $w(e)$为 STFN，故可表示为$[w_1(e),w_0(e),w_2(e)]$，且

$w_0(e)=(w_1(e)+w_2(e))/2$，这样

$$w(P) = \sum_{e\in P} w(e) = [w_1(P), w_0(P), w_2(P)] = \left[\sum_{e\in P} w_1(e), \sum_{e\in P} w_0(e), \sum_{e\in P} w_2(e)\right],$$

这里 $w_1(P)=\sum_{e\in P} w_1(e)$，$w_2(P)=\sum_{e\in P} w_2(e)$，$w_0(P)=\sum_{e\in P} w_0(e)$. 显然 $w_0(P)=(w_1(P)+w_2(P))/2$.

广义上讲，$R$ 中应包含两种形式的路：长度为实数的路和长度为"纯"STFN 的路，本

文暂时假定:对任意 $P\in R$,$w(P)\in\chi$,即网络中不含实数路.

**定义2.** 对限制期 $t$,定义路 $P$ 的满意度 $F(P,t)$ 等于 $T(\{w(P)\leqslant t\})$,即有 $F(P,t)=T(\{M\leqslant t\})$. 由该定义可得出以下性质:

1) $0\leqslant F(P,t)\leqslant 1$;2)边权取 $w_2(e)$,若

$$w_2(P_0)=\min_{P\in R}w_2(P)=\min_{P\in R}(\sum_{e\in P}w_2(e))\leqslant t,\tag{4}$$

则 $F(P_0,t)=1$,显然 $P_0\in S$;3)边权取 $w_1(e)$,若

$$w_1(P_0)=\min_{P\in R}w_1(P)=\min_{P\in R}(\sum_{e\in P}w_1(e))>t,\tag{5}$$

则 $F(P_0,t)=0$.

## 3 问题转化

据上节讨论,选择一路径 $P^\times$,使 $P^\times\in S$,当式(4)或式(5)成立时,显然可根据性质2)或3),运用最短路算法方便地求出最优路径(最大满意度路径). 以下的问题是当式(4),(5)都不成立时,如何寻找最大满意度路径.

**定理1.** 当式(4),(5)都不成立时,记 $P^*$ 为下述问题的解,即

$$P^*:\min_{P\in R}\frac{w_2(P)-t}{w_2(P)-w_1(P)}=\frac{w_2(P^*)-t}{w_2(P^*)-w_1(P^*)},\tag{6}$$

则一定有 $F(P^*,t)=\max_{P\in R}F(P,t)$.

证明. 由(4)式不成立可知:$\min_{P\in R}w_2(P)>t$;由(5)式不成立可知:$\min_{P\in R}w_1(P)\leqslant t$. 设

$$R11=\{P|w_1(P)\leqslant t<w_2(P),P\in R\};R22=\{P|w_1(P)>t,P\in R\},$$

这样 $R=R11+R22$,并且 $R11\neq\phi$. 显然 $\max_{P\in R22}F(P,t)=0$,故

$$\max_{P\in R}F(P,t)=\max_{P\in R11}F(P,t).\tag{7}$$

又因为 $\min_{P\in R22}\frac{w_2(P)-t}{w_2(P)-w_1(P)}>0$,$\min_{P\in R11}\frac{w_2(P)-t}{w_2(P)-w_1(P)}\leqslant 0$,所以 $P^*\in R11$,即有

$$\min_{P\in R11}\frac{w_2(P)-t}{w_2(P)-w_1(P)}=\frac{w_2(P^*)-t}{w_2(P^*)-w_1(P^*)}.$$

由引理1可知 $\min_{P\in R11}T(\{w(P)\leqslant t\})=T(\{w(P^*)\leqslant t\})$,故有

$$F(P^*,t)=\min_{P\in R11}F(P,t).\tag{8}$$

由式(7),(8)可得 $F(P^*,t)=\max_{P\in R}F(P,t)$,即 $p^*$ 为最大满意度路径. 证毕.

显然若能找出式(6)的优化路径,问题就得到解决. 给出式(6)的等价形式如下:

$$P^*:\max_{P\in R}\frac{t-w_2(P)}{w_2(P)-w_1(P)}=\frac{t-w_2(P^*)}{w_2(P^*)-w_1(P^*)}=x^*.\tag{9}$$

**推论1.** 当式(4),(5)都不成立时,(9)式的优化值 $x^*\in[-1,0]$,并且

$$F(P^*,t)=\begin{cases}1-2x^{*2}, & x^*\geqslant -0.5;\\ 2(1+x^*)^2, & x^*<-0.5.\end{cases}\tag{10}$$

证明. 由定理1的证明过程可知 $P^*\in R11$,故 $0\leqslant\frac{w_2(P^*)-t}{w_2(P^*)-w_1(P^*)}\leqslant 1$,这样 $x^*=$

$\frac{t-w_2(P^*)}{w_2(P^*)-w_1(P^*)}=-\frac{w_2(P^*)-t}{w_2(P^*)-w_1(P^*)}\in[-1,0]$. 当 $x^*\geqslant-0.5$ 时，也就是说 $\frac{w_2(P^*)-t}{w_2(P^*)-w_1(P^*)}\leqslant 0.5$，这样，$t\geqslant w_0(P^*)=(w_1(P^*)+w_2(P^*))/2$，故 $F(P^*,t)=1-2(\frac{w_2(P^*)-t}{w_2(P^*)-w_1(P^*)})^2=1-2x^{*2}$；当 $x^*<-0.5$时，也就是说$\frac{w_2(P^*)-t}{w_2(P^*)-w_1(P^*)}>0.5$，这样，$t<w_0(P^*)=(w_1(P^*)+w_2(P^*))/2$，故 $F(P^*,t)=2(\frac{t-w_1(P^*)}{w_2(P^*)-w_1(P^*)})^2=2(1+x^*)^2$.

## 4 最短路算法思想的扩展[3~6]

定理1把问题转化为求解(9)式的 $P^*$. 尽管问题已得到简化，但(9)式表示的是一个较复杂的非线性路径问题，许多类似的比例路径问题已被证明是 $NP$ 问题[6]. 本文将把这一问题转化成最短路问题来求解. 并引进一重要的路径形式 $P(x)$，$x\in[-1,0]$.

记 $P(x)$：$\min\limits_{P\in R}\sum\limits_{e\in P}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x+w_2(e))=\sum\limits_{e\in P(x)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x+w_2(e))$，(11)

$P(x)$为给定 $x$ 值时问题(11)的最优解对应的路径，$P(x)\in R$，用最短路算法很容易求出，并记 $N(x)=\sum\limits_{e\in P(x)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x+w_2(e))$. (12)

### 4.1 重要定理

**定理2.** $x\in[-1,0]$，$N(x)$是连续递增函数.

证明. 设 $x1<x2$时

$$
\begin{aligned}
N(x2)-N(x1)=&\sum_{e\in P(x2)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x2+w_2(e))-\sum_{e\in P(x1)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x1+w_2(e))\geqslant\\
&\sum_{e\in P(x2)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x2+w_2(e))-\sum_{e\in P(x2)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x1+w_2(e))=\\
&\sum_{e\in P(x2)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot(x2-x1)\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

故 $N(x)$是单调上升的；

当 $x2\geqslant x1$时

$$
\begin{aligned}
0\leqslant&|N(x2)-N(x1)|=N(x2)-N(x1)=\\
&\sum_{e\in P(x2)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x2+w_2(e))-\sum_{e\in P(x1)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x1+w_2(e))\leqslant\\
&\sum_{e\in P(x1)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x2+w_2(e))-\sum_{e\in P(x1)}((w_2(e)-w_1(e))\cdot x1+w_2(e))=\\
&(x2-x1)\cdot\sum_{e\in(x1)}(W_2(e)-w_1(e))\leqslant\\
&(x2-x1)\cdot[\max_{P\in R}\sum_{e\in P}(w_2(e)-w_1(e))]\to 0，当\ x2\to x1+.
\end{aligned}
$$

当 $x2<x1$时

$$0 \leqslant |N(x2) - N(x1)| = N(x1) - N(x2) \leqslant$$
$$(x1 - x2) \cdot \left[\max_{P \in R} \sum_{e \in P} (w_2(e) - w_1(e))\right] \to 0, \text{当 } x2 \to x1 -,$$

故 $N(x)$是连续的.

**定理3**[4]. 当式(4),(5)都不成立,对 $x \in [-1,0]$,有以下结论:

1) $N(x) > t$ 的充要条件为 $x > x^*$;2) $N(x) < t$ 的充要条件为 $x < x^*$;3)$N(x) = t$ 的充要条件为 $x = x^*$($x^*$定义见(9)式).

**推论2**[4]. 当 $N(x) = t$ 时,$P(x)$为满足(9)式的最优路径,并且 $x$ 等于(9)式的最大值 $x^*$;当 $x$ 等于(9)式的最大值 $x^*$ 时,$P^*$ 为满足(11)式的最优路径 $P(x^*)$,并且 $N(x) = t$. 定理3和推论2的详细证明参见文献[4]

### 4.2 算法思想和算法步骤

当式(4),(5)都不成立时,显然有 $N(0) > t$ ,$N(-1) \leqslant t$,又因为 $N(x)$是连续递增函数,所以可通过二分法求得 $x^*$.算法步骤如下

1) 让 $x = 0$,若 $N(0) \leqslant t$,则 $P(0)$为最优路径即 $P(0) \in S$,否则转2);

2) 让 $x = -1$,若 $N(-1) > t$,则 $P(-1)$为最优路径即 $P(-1) \in S$,否则转3);

3)让 $x' = -1, x'' = 0$,转4);

4)取 $x = [x' + x'']/2$,若 $|N(x) - t| < \varepsilon$,则 $P(x)$为最优路径即 $P(x) \in S$,停止,否则转5);

5)若 $N(x) > t$,则让 $x'' = x$,否则 $x' = x$,转2).

### 4.3 算例

图2和表1分别给出了本文所研究问题的仿真数据和计算结果.

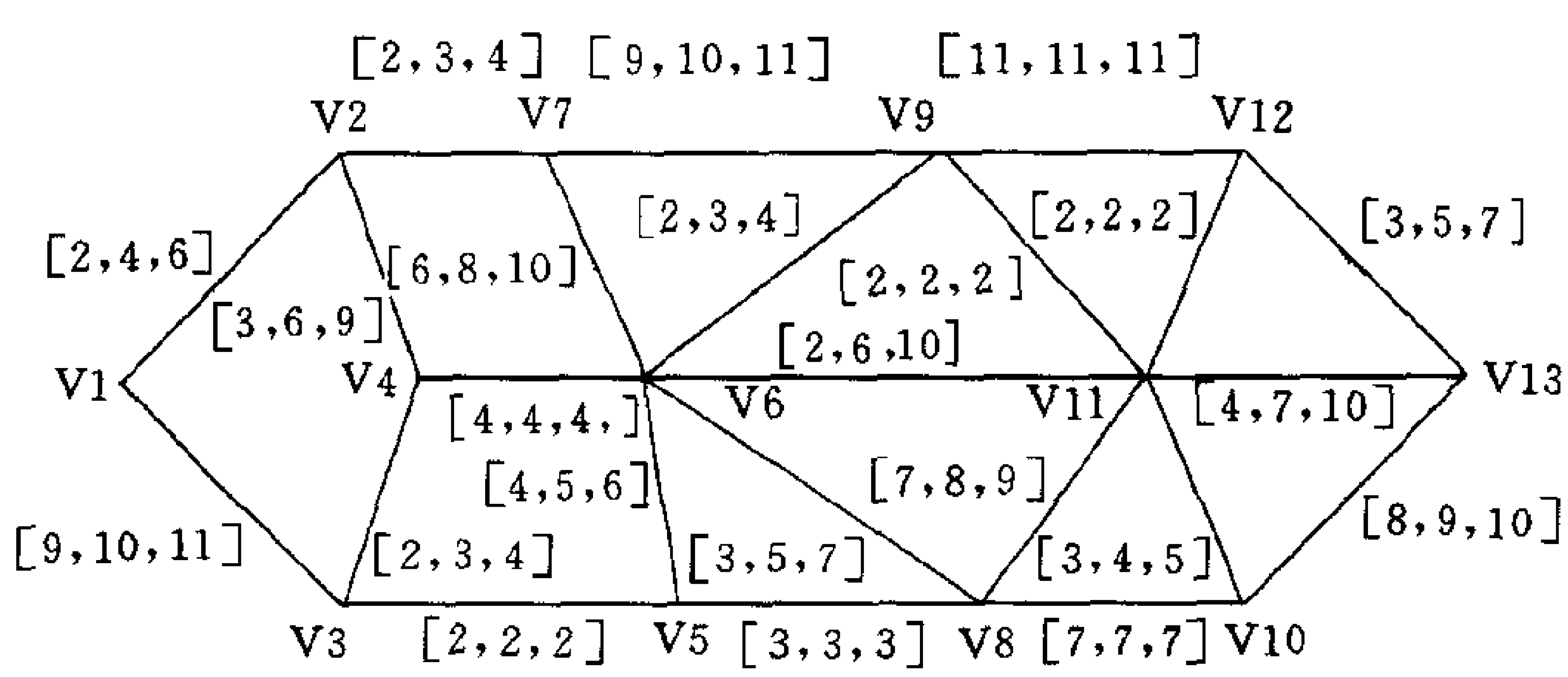



图2 边权为 STFN 的网络图

表1 限制期 $t$ 取不同值时的计算结果

| $t$ | $x$ | $P(x)$ | $N(x)$ | $F(t,P(x))$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ≤14 | −1 | $V_1-V_2-V_4-V_6-V_{11}-V_{13}$ | | 0 | 2 |
| 20 | −0.7916 | $V_1-V_2-V_4-V_6-V_{11}-V_{13}$ | 20.0010 | 0.0868 | 14 |
| 26 | −0.5000 | $V_1-V_2-V_7-V_9-V_{11}-V_{12}-V_{13}$ | 26 | 0.5000 | 2 |
| 31 | −0.0833 | $V_1-V_2-V_7-V_9-V_{11}-V_{12}-V_{13}$ | 31.0010 | 0.9861 | 13 |
| ≥32 | 0 | $V_1-V_2-V_7-V_9-V_{11}-V_{12}-V_{13}$ | | 1 | 1 |

注. n 表示使用最短路算法(*Dijkstra* 算法)的次数,$\varepsilon = 0.001$

可以看到,当限制期 t 变化时,最优路径有所不同,并且 $N(x)$随着 $x$ 的增加而变大,

从而验证了定理2.由于二分法具有较高的收敛速度,迭代次数一般不大,这也在本例中得到了验证.

## 5 结语

本文是在假定 $R$ 中不存在实数路径的情况下,给出了上面的算法.那么当 $R$ 中有实数路径存在,应该如何求解最大满意度路径,一个可行的办法是:在做第3)步前,检测直接通往终节点的所有弧长,若弧 $e$ 的长度为"纯"STFN,即 $w_1(e)<w_0(e)<w_2(e)$,不作改动;若 $e$ 的长度为普通实数,即 $w_1(e)=w_0(e)=w_2(e)$,则让 $w_2(e)=w_1(e)+\delta$,$w_0(e)=w_1(e)+\delta/2$,$\delta$ 为充分小的正数,然后继续上面的算法过程即可.

## 参 考 文 献

1 汪培庄,韩立岩.应用模糊数学.北京:北京经济学院出版社,1989.275～304

2 吴望名.应用模糊集方法.北京:北京师范大学出版社,1985.237～269

3 Henig M I. The shortest path problem with two objective functions. *European Journal of Operational Research*, 1985 **25**(2):281～291

4 Soroush H M. The most critical path in a PERT network: A heuristic approach. *European Journal of Operational Research*, 1994,**78**(1): 93～105

5 Meggido N. Combinatorial optimization with rational objective functions. *Operational Research*, 1979,**4**(3):414～424

6 Ahuja R K. Minimum cost-reliability ratio path problem. *Computers & Operational Research*, 1988,**15**(1): 83～89

**刘春林**　男,1970年生,南京大学国际商学院博士后.目前研究领域为应急调度、模糊优化和人工智能.

**何建敏**　男,1956年生,东南大学经济管理学院副院长、教授、博士生导师.在国内外已发表论文50多篇,并多次获得省级以上科技进步奖.研究兴趣为应急管理和人工智能.