



二维完整配置下刚性航天器姿态 角速度的渐近镇定¹⁾

张 兵 吴宏鑫

(北京控制工程研究所 北京 100080)

(E-mail: zhb@public2.east.net.cn)

摘 要 讨论了以非完整配置的单向推力器系统为执行机构时,刚性航天器姿态角速度的镇定问题. 针对一类特殊的有扰量非完整配置的情况——共面扰量二维完整配置,基于滑动控制律实现了姿态角速度的镇定. 仿真结果证实了所述方法的有效性.

关键词 姿态控制, 单向执行器, 推力器配置, 欠驱动航天器, 滑动模态控制.

ASYMPTOTICAL STABILIZATION OF ANGULAR VELOCITY OF A RIGID SPACECRAFT WITH TWO-DIMENSIONAL COMPLETE CONFIGURATION

ZHANG Bing WU Hongxin

(Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100080)

Abstract The paper discusses the stabilization of angular velocity of an underactuated rigid spacecraft with one-sided thrusters system under a special underactuated configuration. A special case as disturbance-coplanar two-dimensional complete configuration for three-dimensional control is considered to asymptotically stabilize the angular velocities of a rigid spacecraft, in which a sliding mode control (SMC) law is used. The simulations show the effectiveness of the approach.

Key words Attitude control, one-sided actuator, thruster configuration, underactuated spacecraft, sliding mode control.

1 引言

具有三维控制作用的刚性航天器通常被看成是充分驱动的系统(Fully Actuated

1)国家自然科学基金资助项目. 本文曾在全国第八届(1998年)空间及运动体控制技术学术会议上宣读.

System, 略为 FAS). 以推力器为执行单元的反作用控制系统(RCS)中, 执行器系统控制作用的生成能力取决于其配置, 以完整配置的推力器系统为执行机构的刚性航天器是 FAS, 由于个别推力器的失效会导致执行器系统的有效配置失去完整性^[1], 也就是推力器系统不能产生完整的三维控制作用, 此时的 RCS 则会变为欠驱动系统(Underactuated System).

对于欠驱动刚性航天器的控制问题, 目前绝大多数研究是基于失效后推力器系统仍能产生任意二维控制力矩, 而失控轴的作用为零^[2~6]. 由于推力器是一类具有多维控制效应的单向执行机构, 在姿态控制中, 一个推力器可以产生三维的控制力矩, 而且控制效应在指令空间中的方向是固定的, 它是单向的意味着对个别推力器的控制命令只能是正的, 所以一般情况下, 配置不完整的单向推力器系统在产生二维控制作用时, 可能会同时在失控轴产生额外的非零扰量, 针对此类情况的研究很少. 文[6]利用两个控制力矩实现了角速度指数镇定, 但其中考虑的配置是较特殊的无扰量配置, 而且必须保证无控轴非对称轴(否则系统将是不能控的^[4,5]); 文[7]提出了一类更具一般性的有扰量非完整配置形式——共面扰量二维完整配置, 考虑了推力器的单向性和不对称性, 避免了前述正交配置中对惯量分布的要求, 并通过滑动控制实现了姿态角速度的渐进镇定, 但在该控制律下, 姿态角速度在零点附近的趋进速率很有限(如图 2 所示). 本文基于共面扰量二维完整配置, 通过状态变换将共面扰量控制问题转化为另一系统的零扰量控制问题, 基于滑动控制律实现了姿态角速度在滑动平面上的指数镇定; 仿真结果证实了所述方法的有效性.

2 问题的描述

刚性航天器的动力学方程可以用欧拉方程来描述^[7]

$$\dot{\omega}_1 = -d_1\omega_2\omega_3 + u_1; \quad \dot{\omega}_2 = -d_2\omega_1\omega_3 + u_2; \quad \dot{\omega}_3 = -d_3\omega_1\omega_2 + u_3. \quad (1)$$

这里 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 为角速度在本地轴上的分量, I_1, I_2, I_3 为三轴的转动惯量, τ_1, τ_2, τ_3 为三轴力矩; $d_1 = (I_3 - I_2)/I_1, d_2 = (I_1 - I_3)/I_2, d_3 = (I_2 - I_1)/I_3; u_i = \tau_i/I_i, i = 1, 2, 3$.

考虑推力器为单向执行机构, 控制用指令力矩是通过多个推力器单元作用的正组合来实现的, 因而对三维的姿态控制问题, 推力器系统所产生的控制量与推力器作用向量的关系可用下式描述

$$\mathbf{u} = C_f \mathbf{u}_c, \quad (2)$$

其中, $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T, \mathbf{u}_c \in R_+^m$ 为 m 维非负作用向量, m 为推力器数量, $C_f \in R^{3 \times m}$ 为推力器系统的配置矩阵. 正常情况下, 如果配置是完整的, 则可以产生 3 维指令空间中的任意控制量. 但个别推力器失效后, 显然对应于失效单元的配置矩阵的列向量将全变为零, 此时的配置矩阵有可能失去完整性^[1]. 对 n 维指令系统, 非完整配置下推力器系统的可生成的控制指令集必然是某 $n-1$ 维超平面一侧的凸多面锥, 最大为包含该平面的半空间. 而且 n 维非完整配置可以看成 $n-r (r < n)$ 维的降维完整配置. 由于推力器的单向性, 一般的非完整配置在产生完整维的控制指令时, 将会在失控轴产生非零扰量, 这里考虑一类特殊的有扰量配置, 即共面扰量 2 维完整配置^[7], 在此配置下通过引入变换阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta \text{ 不全为零}. \quad (3)$$

可将(1)和(2)组成的系统化为

$$\dot{\tilde{\omega}} = [\tilde{f}_1(\tilde{\omega}) \quad \tilde{f}_2(\tilde{\omega}) \quad \tilde{f}_3(\tilde{\omega})]^T + \tilde{u}, \quad (4)$$

其中 $\tilde{\omega} = [\tilde{\omega}_1 \quad \tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3] = P\omega$, $\tilde{u} = pu = PC_f u_c = \tilde{C}_f u_c$, $\omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T$, $u = C_f u_c$. 而且 \tilde{C}_f 是零扰量二维完整配置,也就可以根据无扰量的情况进行控制律的设计.

如记 $P = [P_1^T \quad P_2^T \quad P_3^T]^T$, $\bar{P} = [\bar{P}_1^T \quad \bar{P}_2^T \quad \bar{P}_3^T]^T = P^{-1}$, 其中 $P_i (i=1,2,3)$ 为 P 的行向量, $\bar{P}_i (i=1,2,3)$ 为 P^{-1} 的行向量, $p_{ij} (i,j=1,2,3)$ 为 P 的元素. 考虑(4), 可得

$$\tilde{f}_1(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^T \tilde{P} \tilde{\omega}, \quad \tilde{P} = -d_1 p_{11} \bar{P}_2^T \bar{P}_3 - d_2 p_{12} \bar{P}_1^T \bar{P}_3 - d_3 p_{13} \bar{P}_1^T \bar{P}_2; \quad (5a)$$

$$\tilde{f}_2(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^T \tilde{Q} \tilde{\omega}, \quad \tilde{Q} = -d_1 p_{21} \bar{P}_2^T \bar{P}_3 - d_2 p_{22} \bar{P}_1^T \bar{P}_3 - d_3 p_{23} \bar{P}_1^T \bar{P}_2; \quad (5b)$$

$$\tilde{f}_3(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^T \tilde{R} \tilde{\omega}, \quad \tilde{R} = -d_1 p_{31} \bar{P}_2^T \bar{P}_3 - d_2 p_{32} \bar{P}_1^T \bar{P}_3 - d_3 p_{33} \bar{P}_1^T \bar{P}_2. \quad (5c)$$

3 变换系统的滑动模态控制

这里首先假设(H1) $d_1=0$; (H2) $d_2\alpha^2 - d_3\beta^2 \neq 0$; (H3)变换阵 P 具有(3)的形式.

由假设(H1)和(H3)可将 \tilde{P} 简化为

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0 & d_3\beta & d_2\alpha \\ 0 & d_3\alpha\beta & d_2\alpha^2 \\ 0 & d_3\beta^2 & d_2\alpha\beta \end{bmatrix} = [0 \quad \tilde{P}_2 \quad \tilde{P}_3]. \quad (6)$$

取切换函数为

$$s(\tilde{\omega}) = \dot{\tilde{\omega}}_1 + k_e \tilde{\omega}_1, k_e > 0. \quad (7)$$

定理 1. 对满足假设(H1), (H2)和(H3)的系统(4), 如取控制

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{bmatrix} = -N[\tilde{\omega}_1 \quad \tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3 \quad \tilde{\omega}^T \tilde{P} \tilde{\omega}]^T - \begin{bmatrix} \tilde{\omega}^T \tilde{Q} \tilde{\omega} \\ \tilde{\omega}^T \tilde{R} \tilde{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{s2} \cdot \text{sign}(s\tilde{\omega}^T \hat{P}_2) \\ k_{s3} \cdot \text{sign}(s\tilde{\omega}^T \hat{P}_3) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

则,可以保证对系统任何状态 $\tilde{\omega} \in R^3$, 都有 $s(\tilde{\omega}) \cdot \dot{s}(\tilde{\omega}) < 0$, 其中 $k_{s2}, k_{s3} < 0$, $N \in R^{2 \times 4}$ 为某种与 \tilde{P} 相关的特定形式的矩阵, 将在证明中给出定义.

证明. 对(7)式取时间的导数可得

$$\dot{s}(\tilde{\omega}) = \ddot{\tilde{\omega}}_1 + k_e \dot{\tilde{\omega}}_1 = k_e \tilde{\omega}^T \tilde{P} \tilde{\omega} + \tilde{\omega}^T (\tilde{P} + \tilde{P}^T) \dot{\tilde{\omega}}. \quad (9)$$

$$\text{记 } \hat{P} = \tilde{P} + \tilde{P}^T = \begin{bmatrix} 0 & d_3\beta & d_2\alpha \\ d_3\beta & 2d_3\alpha\beta & d_3\alpha^2 + d_3\beta^2 \\ d_2\alpha & d_3\alpha^2 + d_3\beta^2 & 2d_2\alpha\beta \end{bmatrix} = [\hat{P}_1 \quad \hat{P}_2 \quad \hat{P}_3],$$

进一步有

$$\dot{s}(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^T (k_e \tilde{P} \tilde{\omega} + \hat{P}_1 \tilde{\omega}^T \tilde{P} \tilde{\omega} + [\hat{P}_2 \quad \hat{P}_3] \begin{bmatrix} (\tilde{\omega}^T \tilde{Q} \tilde{\omega} + \tilde{u}_2) \\ (\tilde{\omega}^T \tilde{R} \tilde{\omega} + \tilde{u}_3) \end{bmatrix}). \quad (10)$$

(8)式代入(10)式得

$$\dot{s}(\tilde{\omega}) = \epsilon(\tilde{\omega}) + \tilde{\omega}^T [\hat{P}_2 \quad \hat{P}_3] \begin{bmatrix} k_{s2} \cdot \text{sign}(s\tilde{\omega}^T \hat{P}_2) \\ k_{s3} \cdot \text{sign}(s\tilde{\omega}^T \hat{P}_3) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\epsilon(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^T (k_e \tilde{P} \tilde{\omega} + \hat{P}_1 \tilde{\omega}^T \tilde{P} \tilde{\omega} - [\hat{P}_2 \quad \hat{P}_3] N [\tilde{\omega}_1 \quad \tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3 \quad \tilde{\omega}^T \tilde{P} \tilde{\omega}]^T). \quad (12)$$

显然, 如果存在 $N \in R^{2 \times 4}$, 对系统任何状态 $\tilde{\omega} \in R^3$, 都有 $\epsilon(\tilde{\omega}) \equiv 0$, 则

$$s(\tilde{\omega}) \cdot \dot{s}(\tilde{\omega}) = k_{s2}s\tilde{\omega}^T\hat{P}_2\text{sign}(s\tilde{\omega}^T\hat{P}_2) + k_{s3}s\tilde{\omega}^T\hat{P}_3\text{sign}(s\tilde{\omega}^T\hat{P}_3) < 0 \quad (k_{s2}, k_{s3} < 0). \tag{13}$$

下面证明使得 $\varepsilon(\tilde{\omega}) \equiv 0$ 成立的 $N \in R^{2 \times 4}$ 的存在性.

只要下式成立, 必有 $\varepsilon(\tilde{\omega}) \equiv 0$

$$k_e\tilde{P}\tilde{\omega} + \hat{P}_1\tilde{\omega}^T\tilde{P}\tilde{\omega} - [\hat{P}_2 \quad \hat{P}_3]N[\tilde{\omega}_1 \quad \tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3 \quad \tilde{\omega}^T\tilde{P}\tilde{\omega}]^T = x^X\tilde{\omega}, \tag{14}$$

其中 $x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \in R^3$, 且 $x^X := \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]$.

分析可知基于假设(H2), 对任意非零的 $x_1 \in R$, 如果

$$x_2 = -x_1d_2\alpha/(d_2\alpha^2 - d_3\beta^2), \quad x_3 = x_1d_3\beta/(d_2\alpha^2 - d_3\beta^2), \tag{15}, (16)$$

则 $\text{rank}[\hat{P}_2 \quad \hat{P}_3 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3] = 2$, 必然存在 $N \in R^{2 \times 4}$ 使得(14)成立.

此时 $N = L_2^{-1}L_1$, 其中 $L_1 = [-X_1 \quad k_e\tilde{P}_2 - X_2 \quad k_e\tilde{P}_3 - X_3 \quad \hat{P}_1]$, $L_2 = [\hat{P}_2 \quad \hat{P}_3]$. 证毕.

定理 2. 对满足假设(H1), (H2)和(H3)的系统(4), 取控制(8), 其中 $N = L_2^{-1}(2 : 3, :)L_1(2 : 3, :)$. 如果下面的条件:

(C1) $0 < x_1 < \Delta$, 当 $\Delta > 0$ 或 (C2) $0 > x_1 > \Delta$, 当 $\Delta < 0$, 其中 $\Delta = k_e(d_2\alpha^2 - d_3\beta^3)$ 成立时, $\tilde{\omega}$ 是在滑动平面上是指数收敛的.

证明. 如果 $s = 0$, 有 $\dot{\tilde{\omega}}_1 = -k_e\tilde{\omega}_1$, 由于 $k_e > 0$, 显然 $\tilde{\omega}_1$ 指数收敛.

将(8)式代入(4)式经简化得

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\omega}}_2 \\ \dot{\tilde{\omega}}_3 \end{bmatrix} = -N[\tilde{\omega}_1 \quad \tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3 \quad \tilde{\omega}^T\tilde{P}\tilde{\omega}]^T + \begin{bmatrix} k_{s2} \cdot \text{sign}(s\tilde{\omega}^T\hat{P}_2) \\ k_{s3} \cdot \text{sign}(s\tilde{\omega}^T\hat{P}_3) \end{bmatrix}. \tag{17}$$

若考虑 $s = 0$, 上式右端第二项为零, 因而 $[\tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3]$ 在滑面上的轨迹, 将主要取决于

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\omega}}_2 \\ \dot{\tilde{\omega}}_3 \end{bmatrix} = \tilde{N} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

其中 \tilde{N} 为 N 第二和第三列组成的子矩阵, 记 $\tilde{N} = -N(:, 2 : 3)$. 取 $N = L_2^{-1}(2 : 3, :)L_1(2 : 3, :)$, 根据 \tilde{N} 的定义得 $\tilde{N} = -L_1^{-1}(2 : 3, :)L_1(2 : 3, 2 : 3)$, 经计算可知

$$\tilde{N} = \frac{-1}{(d_2\alpha^2 - d_3\beta^2)^2} \cdot \begin{bmatrix} -(d_2d_3k_e\alpha^2\beta^2 - d_2\alpha^2x_1 - d_3k_e\beta^4 - d_3\beta^2x_1) & -d_2\alpha\beta(k_e d_2\alpha^2 - 2x_1 - k_e d_3\beta^2) \\ d_3\alpha\beta(k_e d_2\alpha^2 - 2x_1 - k_e d_3\beta^2) & d_2k_e\alpha^4 - d_2d_3k_e\alpha^2\beta^2 - d_2\alpha^2x_1 - d_3\beta^2x_1 \end{bmatrix}.$$

可以得到 \tilde{N} 的特征多项式 $\lambda(\tilde{N}) = \det(\lambda I - \tilde{N}) = \lambda^2 - \text{tr}(\tilde{N})\lambda + \det(\tilde{N})$. \tilde{N} 的特征值具有负实部的充要条件是

$$\text{tr}(\tilde{N}) = -k_e < 0, \tag{19}$$

$$\det(\tilde{N}) = \frac{x_1(k_e(d_2\alpha^2 - d_3\beta^2) - x_1)}{(d_2\alpha^2 - d_3\beta^2)^2} > 0. \tag{20}$$

由于 $k_e > 0$, (19)式显然成立. 考虑到假设(H2), (20)式可以化为条件(C1)和(C2). 所以, 如果(C1)和(C2)成立, \tilde{N} 的特征值具有负实部, 因而 $[\tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3]$ 是指数收敛的. 证毕.

4 翻滚抑制的仿真和结论

这里利用前述的滑动控制律,针对一个共面扰量二维完整配置,进行了翻滚抑制的仿真.其中图 1(b)为采用文[7]中多项式收敛算法的控制效果,显示出状态轨线在接近零点时比较缓慢,而采用本文中所述的指数收敛算法,在相同的对象参数和初值下,状态收敛很快,如图 1(a)所示.仿真中系统惯量取 $I_1=100\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $I_2=300\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $I_3=300\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 即轴 1 为对称轴,推力器数 $m=3$,变换阵中 $\alpha=-1$, $\beta=0.5$, $k_e=0.2$, $x_1=-0.1$.

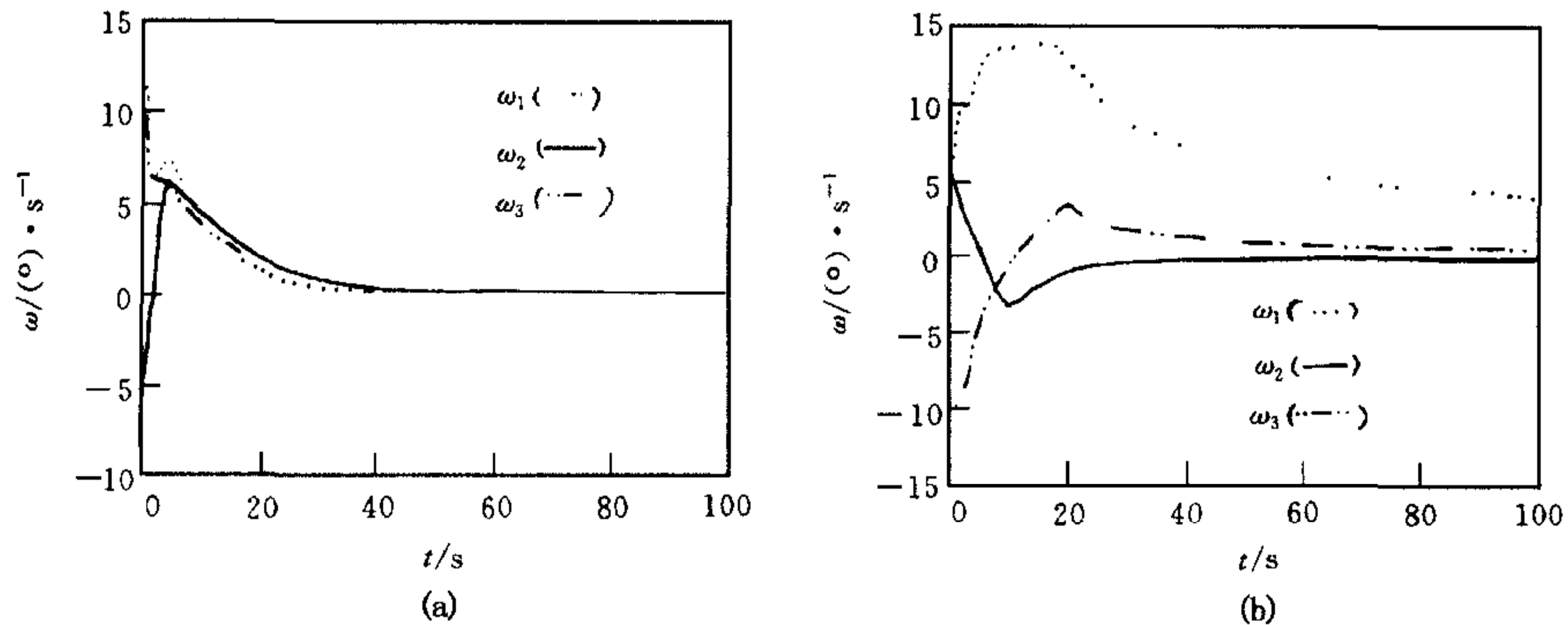


图 1 姿态角速度

参 考 文 献

- 1 张兵,吴宏鑫.单向执行器系统配置的完整性.见:中国控制会议'98论文集.宁波:浙江宁波大学,1998,735~742
- 2 Byrnes C I. On the attitude stabilization of a rigid spacecraft. *Automatica*. 1991, **27**(1):87~95
- 3 Coron J M, Kerai E Y. Explicit feedbacks stabilizing the attitude control of a rigid spacecraft with two control torques. *Automatica*, 1996, **32**(5):669~677
- 4 Tsiotras P, Luo J. Reduced-effort control laws for underactuated rigid spacecraft. AIAA 97~0113
- 5 Krishnan H, Reyhanoglu M, McClamroch H. Attitude stabilization of a rigid spacecraft using two control torques: a non-linear control approach based on the spacecraft attitude dynamics. *Automatica*. 1994, **30**(6):1023~1027
- 6 Coverstone-Carroll V L. Detumbling and reorienting underactuated rigid spacecraft. AAS 95~413
- 7 Zhang Bing, Hongxin Wu, Jun Zhang. Sliding Mode Control for Detumbling Rigid Spacecraft with Underactuated Configuration. In: Proc. of the World Congress of International Federation of Automatic Control'99 (IFAC'99), Volume P:337~342

张 兵 1970年生,博士.1992年和1995年在重庆大学自动化系分别获学士和硕士学位.1998年12月在北京控制工程研究所获博士学位.研究领域有:容错控制、故障检测与诊断以及航天控制等.

吴宏鑫 1939年生,1965年毕业于清华大学自动控制系.现为中国空间技术研究院北京控制工程研究所研究员、博士生导师.从事自适应控制理论和智能控制研究及其在航天控制和工业过程控制领域中的应用.