短文

具有区域极点和方差约束的不确定连续系统鲁棒控制[1)]

俞 立
(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310032)
(E-mail: lyu@mail.hz.zj.cn)

摘 要 对一类具有不确定参数的线性连续系统,研究使得闭环系统的稳态状态方差小于某个给定的上界,同时闭环极点位于一给定圆盘中的状态反馈鲁棒方差控制器设计问题.导出了控制器存在的条件,并证明了该条件等价于一个线性矩阵不等式系统的可解性问题,进而用这组线性矩阵不等式系统的可行解给出了一组所求控制器的一个参数化表示.据此,给出了具有最小能量的鲁棒方差控制器设计方法.

关键词 约束方差设计,区域极点配置,线性矩阵不等式,鲁棒控制.

ROBUST CONTROL OF UNCERTAIN SYSTEMS WITH REGIONAL POLE AND VARIANCE CONSTRAINTS

YU Li
(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032)

Abstract This paper concerns the design problem of state feedback robust variance controllers which guarantee the closed-loop poles in a specified disk and steady-state variance to be less than a given upper bound for linear systems with linear fractional parameter uncertainties. Conditions for existence of such controllers are derived and it is shown that this condition is equivalent to the solvability of a certain linear matrix inequality (LMI) system. A parameterized representation of a set of desired controllers is characterized in terms of the feasible solutions to the LMI system. Based on this, the solution to a minimum-energy variance controller design problem is presented.

Key words Constrained variance design, regional pole placement, linear matrix inequality, robust control.

1)国家自然科学基金(69974036)和浙江省自然科学基金重点项目(zd9905)资助.
收稿日期 1998-09-01 收修改稿日期 1999-12-08

1 引言

方差控制自提出以来，已得到了广泛的研究，取得了一系列的研究成果[1~5]. 通过适当配置系统的稳态状态方差矩阵，可以保证闭环系统具有诸如稳定性、输出量的特定性能要求等许多控制目标. 现有的方差控制理论提供了所有可配置方差的一个刻划，并且给出了闭环系统具有给定可配置稳态方差的所有方差控制器的一个参数化表示. 文献[5]进一步提出了求取最小能量方差控制器的一个凸优化方法.

众所周知，一个实际对象的数学模型不可避免地存在一定程度的参数不确定性. 显然，对这样的具有参数不确定性的系统，要严格地配置其稳态方差是不现实的. 一般的，可以通过其稳态方差不超过某个给定上界来保证闭环系统具有所期望的性能. 另一方面，一个系统除了需具有良好的稳态特性外，还需具有良好的瞬态性能，以保证过渡过程的品质要求. 而系统的瞬态性能可以由其极点位置所确定. 因此，具有方差和区域极点约束的鲁棒方差控制问题更具研究和应用的价值. 文献[4]最早研究了该问题，但是所得到的结果只能应用到状态矩阵含有不确定参数的系统. 另外，所提出的方法是复杂的，难以在其基础上有效地解决最小能量方差控制器的设计问题.

本文研究一类不确定系统具有闭环极点和稳定状态方差约束的鲁棒方差控制问题，所考虑系统的状态和输入矩阵都允许存在不确定参数，参数不确定性具有线性分式形式，范数有界参数不确定性是这一类不确定性的特例. 采用线性矩阵不等式的处理方法，研究了该问题的分析和状态反馈控制器的设计问题，用一个线性矩阵不等式系统的可行解给出了鲁棒方差控制器的参数化表示. 据此，通过建立和求解一个凸优化问题给出了设计具有最小能量鲁棒方差控制器的有效方法.

2 问题的描述

考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + \Delta A)\boldsymbol{x}(t) + (B + \Delta B)u(t) + Dw(t), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是系统的状态向量，$u(t)\in R^m$ 是控制输入，$w(t)\in R^l$ 是外部扰动，A，B 和 D 是适当维数的常数矩阵，$w(t)$是一个具有单位方差的零均值白噪声过程，且 $w(t)$和初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$是不相关的，ΔA，ΔB 是反映系统模型中参数不确定性的未知矩阵，并假定其具有以下的结构形式

$$\begin{aligned} [\Delta A\ \Delta B] &= M\widetilde{\Delta}[N_1\ N_2], \\ \widetilde{\Delta} &= F(I - JF)^{-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $F\in R^{i\times j}$是满足 $FF^{\mathrm{T}}\leqslant I$ 的不确定矩阵，M，N_1，N_2 和 J 是已知的常数矩阵. 为了保证对所有允许的不确定矩阵 F，$I-JF$ 是可逆的，必须 $I-J^{\mathrm{T}}J>0$. 本文中总是假定该条件成立. 特别是，当 $J=0$ 时，不确定性描述(2)就是范数有界参数不确定性.

进一步考虑左半开复平面中的中心在 $-q+0j(q>0)$，半径为 $r(r<q)$的圆盘 $D(q,r)$，假定系统的状态是可以直接测量的，则本文要研究的问题是对给定的系统(1)，圆盘 $D(q,r)$和一组常数 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，设计一个状态反馈控制律

$$u(t) = Gx(t), \tag{3}$$

使得对所有允许的不确定性,闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A_c + \Delta A_c)\boldsymbol{x}(t) + Dw(t), \tag{4}$$

具有以下性能:

A1) 所有极点位于圆盘 $D(q,r)$ 中;

A2) $[X]_{ii} < \sigma_i^2 (i=1,2,\cdots,n)$.

$A_c = A + BG, \Delta A_c = \Delta A + \Delta BG$, $\mathrm{E}(\cdot)$表示期望算子,$[X]_{ii}$是稳态状态方差矩阵 $X = \lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[x(t)x(t)^{\mathrm{T}}]$的对角线上的第 i 个元.具有这样性质的控制律(3)称为是系统(1)的一个鲁棒方差控制律.

如果闭环系统(4)是稳定的,则闭环系统(4)的稳态状态方差矩阵 X 存在,且满足以下的 Lyapunov 方程[6]

$$(A_c + \Delta A_c)X + X(A_c + \Delta A_c)^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} = 0. \tag{5}$$

3 鲁棒方差控制律的设计

定理 1. 对给定的圆盘 $D(q,r)$和闭环系统(4),如果存在对称正定矩阵 P,使得对所有允许的不确定性,以下的矩阵不等式

$$\left(\frac{A_c + \Delta A_c + qI}{r}\right)P\left(\frac{A_c + \Delta A_c + qI}{r}\right)^{\mathrm{T}} - P + \frac{q}{r^2}DD^{\mathrm{T}} < 0 \tag{6}$$

成立,则闭环系统(4)的所有极点均位于圆盘 $D(q,r)$中,且闭环系统(4)的稳态状态方差矩阵满足 $X<P$.

证明. 类似于文[7]中主要结论的证明可得定理 1 的第一个结论.

另一方面,将(6)式整理,可等价地写成

$$\begin{aligned}&(A_c + \Delta A_c)P + P(A_c + \Delta A_c)^{\mathrm{T}} \\ &\quad + q^{-1}[(A_c + \Delta A_c)P(A_c + \Delta A_c)^{\mathrm{T}} + (q^2 - r^2)P] + DD^{\mathrm{T}} < 0.\end{aligned} \tag{7}$$

由此可得闭环系统(4)是稳定的. 因此,闭环系统(4)的稳态状态方差矩阵 X 存在,且满足(5)式. 将(7)式减去(5)式,可得

$$\begin{aligned}&(A_c + \Delta A_c)(P - X) + (P - X)(A_c + \Delta A_c)^{\mathrm{T}} \\ &\quad + q^{-1}[(A_c + \Delta A_c)P(A_c + \Delta A_c)^{\mathrm{T}} + (q^2 - r^2)P] < 0.\end{aligned}$$

由于$(A_c+\Delta A_c)P(A_c+\Delta A_c)^{\mathrm{T}}+(q^2-r^2)P>0$,故从 Lyapunov 稳定性理论可知,$X<P$. 综合以上两部分,定理 1 得证.

定理 1 的条件依赖不确定矩阵,难以验证,以下我们将导出一个不依赖不确定参数的等价条件. 为此先给出一个引理.

引理 1[8]. 给定适当维数的矩阵 Y,U 和 V,其中 Y 是对称的,对(2)式描述的 $\widetilde{\Delta}$,

$$Y + U\widetilde{\Delta}V + V^{\mathrm{T}}\widetilde{\Delta}^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}} < 0$$

当且仅当存在一个常数 $\varepsilon>0$,使得

$$Y + [\varepsilon^{-1}V^{\mathrm{T}} \ \varepsilon U]\begin{bmatrix} I & -J \\ -J^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}V \\ \varepsilon U^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0.$$

定理 2. 对给定的圆盘 $D(q,r)$ 和闭环系统(4),存在对称正定矩阵 P,使得对所有允许的不确定性,矩阵不等式(6)成立当且仅当存在一个正常数 α,使得

$$\begin{bmatrix} -rP & PA_c^{\mathrm{T}}+qP & P(N_1+N_2G)^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_cP+qP & -rP+qr^{-1}DD^{\mathrm{T}} & 0 & \alpha M \\ (N_1+N_2G)P & 0 & -\alpha I & \alpha J \\ 0 & \alpha M^{\mathrm{T}} & \alpha J^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

证明. 由矩阵的 Schur 补性质,存在正定矩阵 P,使得(6)式成立当且仅当

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & r^{-1}(A_c+\Delta A_c+qI)^{\mathrm{T}} \\ r^{-1}(A_c+\Delta A_c+qI) & -P+qr^{-2}DD^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

在上式两边分别左乘和右乘矩阵 $\mathrm{diag}\{\sqrt{r}P, \sqrt{r}I\}$,可得

$$\begin{bmatrix} -rP & P(A_c+\Delta A_c)^{\mathrm{T}}+qP \\ (A_c+\Delta A_c)P+qP & -rP+qr^{-1}DD^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0. \tag{10}$$

由于 $\Delta A_c=\Delta A+\Delta BG=M\tilde{\Delta}(N_1+N_2G)$,记

$$Y=\begin{bmatrix} -rP & PA_c^{\mathrm{T}}+qP \\ A_cP+qP & -rP+qr^{-1}DD^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

则(10)式可以重新写成

$$Y+\begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix}\tilde{\Delta}[(N_1+N_2G)P \quad 0]+\begin{bmatrix} P(N_1+N_2G)^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix}\tilde{\Delta}^{\mathrm{T}}[0 \quad M^{\mathrm{T}}]<0.$$

根据引理 1,上式对所有满足 $FF^{\mathrm{T}}\leqslant I$ 的矩阵 F 成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon>0$,使得

$$Y+\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}P(N_1+N_2G)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \varepsilon M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -J \\ -J^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \varepsilon^{-1}P(N_1+N_2G)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \varepsilon M \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}<0. \tag{11}$$

由于 $I-J^{\mathrm{T}}J>0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} I & -J \\ -J^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix}>0,$$

利用矩阵的 Schur 补性质,(11)式等价于

$$\begin{bmatrix} -rP & PA_c^{\mathrm{T}}+qP & \varepsilon^{-1}P(N_1+N_2G)^{\mathrm{T}} & 0 \\ A_cP+qP & -rP+qr^{-1}DD^{\mathrm{T}} & 0 & \varepsilon M \\ \varepsilon^{-1}(N_1+N_2G)P & 0 & -I & J \\ 0 & \varepsilon M^{\mathrm{T}} & J^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix}<0.$$

在上式两边分别左乘和右乘矩阵 $\mathrm{diag}\{I,I,\varepsilon I,\varepsilon I\}$,并记 $\alpha=\varepsilon^2$,即得(8)式. 定理得证.

根据以上的分析结果,我们将提出使得闭环系统满足设计要求(A1)和(A2)的状态反馈鲁棒方差控制律(3)的设计方法.

定理 3. 对给定的圆盘 $D(q,r)$ 和一组常数 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$,若存在常数 $\alpha>0$,矩阵 Y 和对称矩阵 P,使得

$$\begin{bmatrix} -rP & (AP+BY+qP)^{\mathrm{T}} & (N_1P+N_2Y)^{\mathrm{T}} & 0 \\ AP+BY+qP & -rP+qr^{-1}DD^{\mathrm{T}} & 0 & \alpha M \\ N_1P+N_2Y & 0 & -\alpha I & \alpha J \\ 0 & \alpha M^{\mathrm{T}} & \alpha J^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{bmatrix}<0, \tag{12}$$

$$[P]_{ii} < \sigma_i^2, (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{13}$$

则 $u(t)=YP^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 是不确定系统(1)的一个具有给定要求的鲁棒方差控制律.

证明. 可以从定理 1 和 2 以及适当的变量变换得到.

矩阵不等式(12)和(13)是关于变量 P,Y 和 α 的线性矩阵不等式,因此,定理条件的检验和控制器的设计实际上就是求解该线性矩阵不等式系统的问题. 而后者可以应用现有的有关求解线性矩阵不等式的方法解之. 另一方面,定理 3 用一组线性矩阵不等式约束刻划了鲁棒方差控制律的存在条件,并用它的可行解给出了一组鲁棒方差控制律的参数化表示. 利用这一表示,通过附加一些约束条件,可以有效地求取具有其它性能要求的鲁棒方差控制律. 特别的,我们将利用这一性质来设计具有最小能量的鲁棒方差控制律.

4　最小能量的鲁棒方差控制律设计

定理 3 给出了一组鲁棒方差控制律的参数化表示. 在实际中,具有最小能量的方差控制器是更有意义的. 一般的,最小能量控制器的定义是

$$\min \| u \|_R \triangleq \lim_{t\to\infty}[\mathrm{E}u(t)^{\mathrm{T}}Ru(t)]^{1/2},$$

其中 R 是一个给定的正定加权矩阵.

文献[5]研究了最小能量方差控制器的设计问题,但他们并没有考虑系统模型中可能存在的参数不确定性. 本节的目的是对不确定系统(1),设计一个使得闭环系统具有性能(A1)和(A2)的最小能量方差控制器.

由于定理 3 导出的控制律具有形式 $u(t)=YP^{-1}\boldsymbol{x}(t)$,且 $X<P$. 因此

$$\begin{aligned}\| u \|_R^2 = &\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}[x(t)^{\mathrm{T}}P^{-1}Y^{\mathrm{T}}RYP^{-1}\boldsymbol{x}(t)] = \\ &\mathrm{tr}[YP^{-1}XP^{-1}Y^{\mathrm{T}}R] \leqslant \\ &\mathrm{tr}[SYP^{-1}(SY)^{\mathrm{T}}],\end{aligned}$$

其中 $R=S^{\mathrm{T}}S$,tr 表示矩阵的迹算子,因此可以通过使得 $\| u \|_R^2$ 的上界 $\mathrm{tr}[SYP^{-1}(SY)^{\mathrm{T}}]$ 最小化的方法来求取具有尽可能小能量的控制器.

定理 4. 对给定的圆盘 $D(q,r)$ 和一组常数 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$,若以下的优化问题

$$\begin{aligned}&\min_{\alpha,P,Y,H} \mathrm{tr}(H) \\ &\mathrm{s.t.}\quad \begin{bmatrix} -H & SY \\ (SY)^{\mathrm{T}} & -P \end{bmatrix} < 0,\end{aligned} \tag{14}$$

以及式(12),(13)有解 α^*, P^*, Y^*, H^*,则 $u(t)=Y^*(P^*)^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 是一个具有最小能量的鲁棒方差控制器.

证明. 事实上,矩阵不等式(14)等价于 $SYP^{-1}(SY)^{\mathrm{T}}<H$,因此 $\mathrm{tr}(H)$ 的最小化将保证 $\mathrm{tr}[SYP^{-1}(SY)^{\mathrm{T}}]$ 的最小化. 据此及定理 3,可得证本定理.

容易看到定理 4 中的优化问题是一个凸优化问题,因此可以保证达到全局的最优解. 进而,该问题是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题,因此,可以应用现有的诸如内点法等凸优化技术来求解该问题. 特别是 Matlab 软件中的 LMI 工具箱为本文中有关问题的求解提供了方便和有效的计算工具.

参 考 文 献

1 Hotz A, Skelton R E. Covariance control theory. *Int. J. Control*, 1987, **46**(1): 13～32

2 Skelton R E, Iwasaki T. Lyapunov and covariance controllers. *Int. J. Control*, 1993, **57**(3): 519～536

3 Wang Zidong, Chen Xuemin, Guo Zhi. Controller design for continuous systems with variance and circular pole constraints. *Int. J Systems Sci.*, 1995, **26**(5): 1249～1256

4 王子栋，唐国庆. 方差约束下线性连续系统的多指标随机控制. 控制理论与应用，1998，**15**(1)39～47

5 Grigoriadis K M, Skelton R E. Minimum-energy covariance controllers. *Automatica*, 1997, **33**(4): 569～578

6 Kwakernaak H, Sivan R. Linear Optimal Control Systems. New York: Wiley, 1972

7 俞立，陈国定，杨马英. 不确定系统具有圆盘区域极点约束的鲁棒控制. 自动化学报，2000，**26**(1): 116～120

8 Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. *Int. J. Control*, 1996, **63**(4): 741～750

俞 立 1961年生. 1982年在南开大学获学士学位，后在浙江大学获硕士和博士学位，1993年至1995年留学瑞士联邦理工学院. 现为浙江工业大学信息工程学院教授，副院长，在国内外发表论文80余篇. 主要研究方向为鲁棒控制，时滞系统的分析和控制等.

《自动化学报》征稿简则

一、《自动化学报》是中国自动化学会主办的高级学术期刊，每年出版六期.

二、本刊刊载自动化科学与技术领域的高水平学术论文和科学研究成果. 内容包括：1. 自动控制理论；2. 系统理论与系统工程；3. 自动化技术及其在国民经济各领域中的创造性应用；4. 自动化系统计算机辅助技术；5. 机器人与自动化；6. 人工智能与智能控制；7. 自动控制系统中的新概念、新原理、新方法、新设计；8. 信息理论与信息处理技术，模式识别；9. 自动化学科领域的其它重要问题.

三、本刊发表的文章以论文和短文两种形式为主，并不定期地发表综述与评论性文章、长论文、书刊评论、问题讨论、读者来信和国内外学术活动信息等.

四、本刊原则上只发表原始性稿件，但不排除刊登已在国内外学术会议上发表或准备发表的优秀论文的可能性（对于此种情况，作者必须如实说明）.

五、作者投稿时需签署"作者承诺".

六、来稿格式及要求

1. 来稿要求论点明确、论证充分、语言通顺、文字简练. 一般定稿时论文不超过6000字；短文不超过3000字；其它形式文章视具体内容由编辑部决定. 对重要成果进行系统、完整叙述的长论文字数可稍长. 长论文稿件，作者在投稿时必须注明.

2. 稿件首页应包括下列内容：标题；作者姓名、工作单位、详细通讯地址（包括邮政编码）、E－mail、电话号码；论文摘要；关键词；用英文书写的上述内容.

3. 论文和短文的文章结构请参照本刊最近发表的文章格式. 论文摘要在200字以内；短文100字左右. 文中缩写词（中文或英文）须在首次出现时注明全称；公式、图、表均须分别用阿拉伯数字全文统一编号.

4. 计量单位一律用国际单位，即SI单位制. 名词术语必须规范化、标准化，前后一致. 外国人名、地名、书刊名称除已通用者外一律用原文.

（下转第541页）