

大系统的模型简化*

万百五 吴受章
(西安交通大学)

摘 要

本文对大系统的数学模型简化方法进行了综述,归纳为五个主要降阶方法:集结法、摄动法、积分平方误差法、Padé近似法及Routh近似法;并加以比较、评论和展望。附有一个三阶系统用多种方法计算的简化模型及其性能指标的数字实例。

一、引 言

近十多年来,大系统数学模型的降阶(又称简化)问题很受注意,发表的论文已逾两百篇。然而,在这一研究方向上只能找到简短的或不全面的评述^[1,2]和摘记^[3]。本文仅就线性定常连续时间的大系统,综述多输入-多输出模型的简化问题。关于单输入-单输出传递函数的简化问题,在1972年已有综述^[4]。

所有降阶方法都有同样的目的:为大系统准备一个低阶的近似模型,它在计算上、分析上都应比原系统容易处理,而仍能提供关于原系统足够的信息。因此,简化问题可提出如下:给出线性定常连续时间系统的状态向量方程

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.1}$$

$$y = Cx \tag{1.2}$$

式中 $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^p$ 。 A, B, C 为维数合适的常量矩阵。今欲求出简化模型

$$\dot{z} = Fz + Gu \tag{1.3}$$

$$y_m = Hz \tag{1.4}$$

式中 $z \in R^r$, $p \leq r < n$, $y_m \in R^p$ 。 F, G, H 为维数合适的常量矩阵。

多输入-多输出系统的降阶,可从状态向量方程着手;也可从传递函数矩阵着手:给出线性定常连续时间系统的传递函数矩阵

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{Q_0 + Q_1s + Q_2s^2 + \dots + Q_{n-2}s^{n-2} + Q_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n}, \tag{1.5}$$

式中,分母为系统的特征多项式, $\forall Q_i$ 为 $p \times m$ 常量矩阵。今欲求出一简化模型

$$P(s) = \frac{D_0 + D_1s + D_2s^2 + \dots + D_{q-1}s^{q-1} + D_qs^q}{e_0 + e_1s + e_2s^2 + \dots + e_{k-1}s^{k-1} + e_ks^k}. \tag{1.6}$$

式中,分母为简化模型的特征多项式, $k < n$; $\forall D_i$ 为 $p \times m$ 常量矩阵。

简化模型可用来:(1)对原大系统作一较简单的模拟,以便较好地了解其动态性能;

* 本文曾于1978年12月全国系统工程会议上宣读。修改稿于1979年6月28日收到。

(2) 便于研究某些状态变量的行为、它们间的交连,及系统某些参数对动态性能的影响;
 (3) 采用基于简化模型的次最佳策略,可减少为了获得最佳控制和适应性控制器所需的计算工作量;
 (4) 获得较低维数的“控制规律”,以简化反馈控制器的结构.为此,降阶问题特别引起了从事大系统理论和应用工作者的兴趣.

二、集 结 法

1968年, Aoki 在主特征值法简化模型的基础上,提出了降阶的集结法^[5]. 此法是从矩阵 A 中抽取 r 个主特征值,建立简化模型. 简化模型的状态向量 \mathbf{z} 和原系统的状态向量 \mathbf{x} , 通过常量集结矩阵 K 相联系

$$\mathbf{z} = K\mathbf{x} \quad (2.1)$$

这表明: \mathbf{z} 不一定是物理上存在的状态变量,而是原状态变量中要保留的模式之一的线性组合. 矩阵 F 和 G 可表示为^[5]

$$FK = KA \text{ 或 } F = KAK'(KK')^{-1} \quad (2.2)$$

$$G = KB \quad (2.3)$$

式中,“'”表示转置. 这时, F 的特征值就是 A 的特征值,但对应于在 \mathbf{z} 中所保留 \mathbf{x} 的模式. 因此,集结法实质上是主特征值法简化线性系统的推广.

用保留主特征值的方法,可求得 K 的一般表达式^[6,7]

$$K = M_0 T M^{-1} \quad (2.4)$$

式中, M 为原系统式 (1.1) 中 A 的模态矩阵; $T = [I_r; 0]_{r \times n}$, I_r 为 r 阶单位阵; M_0 为任一正则 $r \times r$ 阶矩阵.

文献中已有的保留主特征值的降阶法,都可归结为集结法,只不过对 M_0 进行了不同的选取罢了! 选择 M_0 为 M 的左上部分,则得 Davison (1966) 简化模型,它能保持原系统某些变量的物理意义^[8]. 正因 K 的选取有一定的任意性,故有必要对简化的质量,也就是模型引起的误差,引入某种定量的量度^[7].

文 [9] 提出一新的思想: 采用集结法时,把输出方程式 (1.2) 和式 (1.4) 都考虑进去,并限定模型输出 \mathbf{y}_m 要包括原系统输出的所有模式,即 $\mathbf{y}_m \approx \mathbf{y}$, 由此得

$$HK = C, \text{ 即 } H = CK'(KK')^{-1} \quad (2.5)$$

矩阵 H 与输入 $\mathbf{u}(t)$ 无关.

文 [10] 将集结法和积分平方误差法(见第四节)结合起来,即把两个输出方程的差的二次型作为泛函

$$J = \int_0^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}_m)' Q (\mathbf{y} - \mathbf{y}_m) dt \quad (2.6)$$

从它的极小,解出简化模型的最佳输出矩阵 H , 这个 H 当然和一定的输入有关.

利用简化模型可以有效地进行分析和设计. 在线性二次型状态变量反馈最佳控制的特定情况下,已经检验了按集结模型设计后用于原系统的实际效果,即所谓次最佳控制. 并找到了按集结的 Riccati 方程的解获得次最佳控制性能的上下边界^[5].

集结法是大系统模型降阶的最常用方法之一. 这种方法的一个最重要的特点是: 若高阶系统是稳定的(或不稳定的),则简化模型也是稳定的(或不稳定的). 缺点是: 要计

算高阶矩阵 A 的特征值和特征向量, 工作量很繁重, 而且在特征值均匀分散或相对集中时都不能获得较好的结果. 此外, 在某些应用中还会遇到这样一个困难: 即使集结模型的诸状态变量是有物理意义的, 但仍会在矩阵 F 中出现无物理意义的交连系数. 因此, 提出了“保持某些结构”的附加条件^[2,11].

三、摄动法

Kokotović 和 Sannuti 提出的摄动法提供了新的研究途径, 它并能对低阶近似最佳控制策略作出相当大的改善. 它可分为两种情况: 弱交连和强交连^[2,12].

1. 弱交连

这个方法基于非奇异摄动法, 即摄动项在微分方程的右侧, 即原系统式(1.1)可表达成

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ \varepsilon A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ \mathbf{u}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

式中, ε 是小的正参数, 它并不一定表示一个物理量. 显然令 $\varepsilon = 0$, 原系统去耦, 并分解为两个完全独立的子系统. 利用它设计或模拟控制系统, 计算工作量便降低了. 而且由此设计的控制系统对原系统形成一完全分散的控制结构, 见图 1.

摄动法这个概念用于弱交连情况中, 例如对于线性二次型最佳控制问题而言, 原系统的方程的解若按 ε 展为幂级数, 取 n 项, 即得其最佳性能的第 $2n - 1$ 阶的近似. 而该解的第零阶项可以由无耦合的 ($\varepsilon = 0$) 子系统的 Riccati 方程求得, 其它高阶项可由去耦的线性方程求解, 因此不要求原系统 Riccati 方程的解^[12]. 这样, 计算工作量便大为减少了.

目前, 还缺乏将原系统的矩阵 A 和 B 分块成式(3.1)的分析准则, 特别是当不能从系统的物理性质分块时.

2. 强交连

这个方法基于奇异摄动法, 即对微分方程的左侧摄动. 将原系统式(1.1)表达成

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = A_{11}\mathbf{x}_1(t) + A_{12}\mathbf{x}_2(t) + B_1\mathbf{u}(t) \quad (\text{慢系统}) \quad (3.2)$$

$$\varepsilon\dot{\mathbf{x}}_2(t) = A_{21}\mathbf{x}_1(t) + A_{22}\mathbf{x}_2(t) + B_2\mathbf{u}(t) \quad (\text{快系统}) \quad (3.3)$$

式中 ε 是小的正参数; A_{22} 是一个稳定矩阵. 令 $\varepsilon = 0$, 由式(3.2)及式(3.3)可得出简化模型.

奇异摄动法是将微分方程的奇异摄动理论作为对原系统的准最佳化设计方法的基础^[12]. 若在线性二次型最佳控制问题中, 将原系统的最佳反馈增益矩阵 $K(\varepsilon)$, 在一定条件下展为 ε 的幂级数. 此后的处理, 和弱交连中所用的相似.

在实际应用中, 几种物理系统可以通过下述方式化成式(3.2)与式(3.3)的形式, 即将小的已知时间常数 T_i 、小惯量 m_j 、大增益 K_l 相应表示成 $T_i = C_i\varepsilon$, $m_j = C_j\varepsilon$, $K_l = \frac{C_l}{\varepsilon}$.

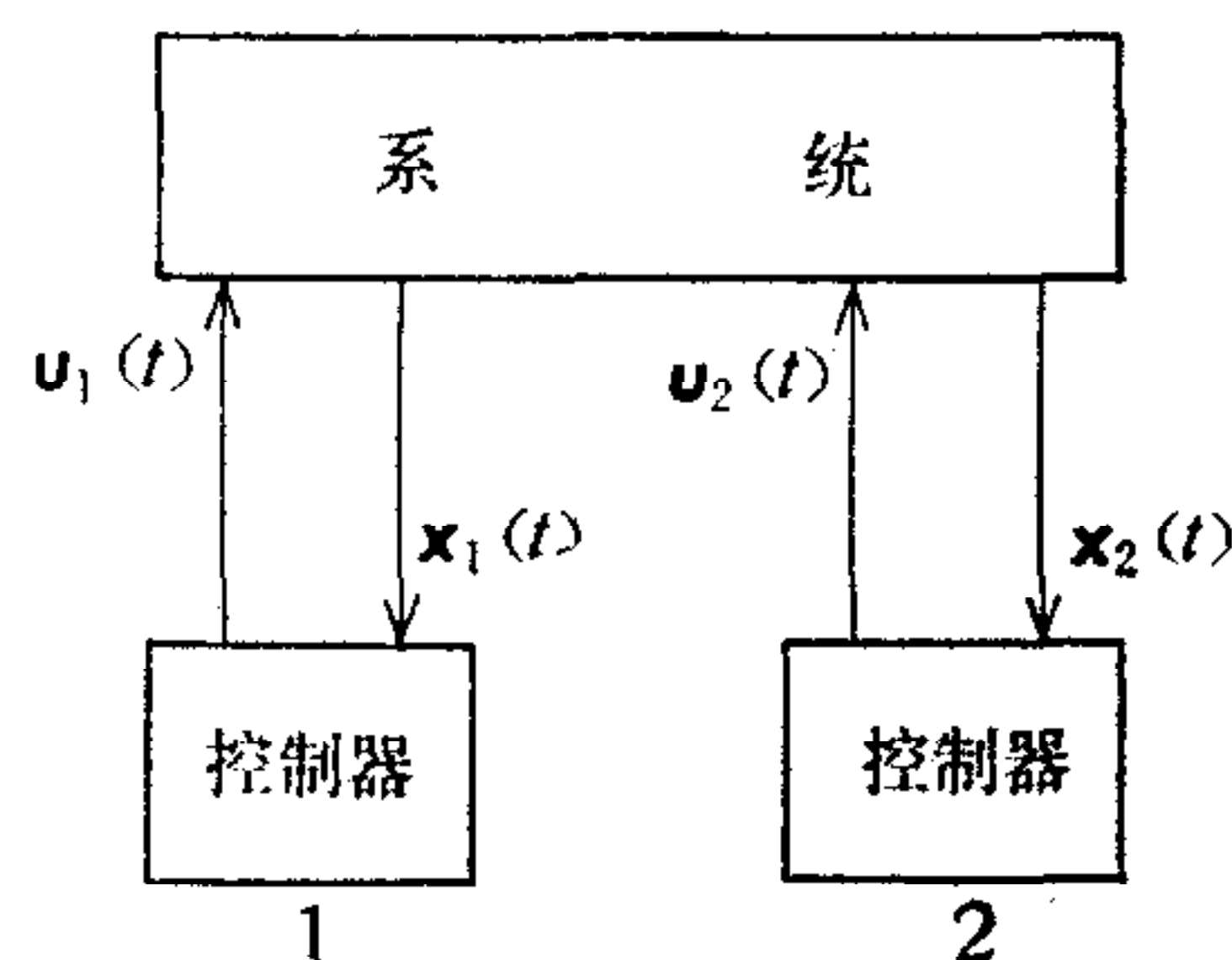


图1 分散控制结构

奇异摄动法还可以获得递阶控制结构的控制器或滤波器^[13],这是此法的一个特点.然而,从实用的观点看,没有一个实际的物理系统给出式(3.2)与式(3.3)的二时标形式.因此,将一个实际物理系统化成上述体制,这还是个重要的探索性研究课题.文[14]建立了矩阵范数条件,可将一个大系统分解成(快及慢)两个子系统.这里,矩阵范数条件起了替代小参数 ε 的作用.

四、积分平方误差法

这个研究方向是采用最佳近似法——将系统输出和模型输出之间误差的某一泛函作为近似的一种量度,并使之极小,借此寻找模型.这个方法的物理涵义很清晰.

1970年, Wilson 在连续时间的定常多变量系统中创议采用积分平方误差法.对于脉冲输入向量 $\mathbf{u}(t)$, 选用价值函数为简化误差 $\mathbf{e}(t)$ 向量的二次型

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{e}'(t) Q \mathbf{e}(t) dt,$$

式中 $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y} - \mathbf{y}_m$. 为了计算 J , 输入向量 $\mathbf{u}(t)$ 必须是给出的. Q 是正定对称加权矩阵. 将式(1.2)及式(1.4)代入 J , 并对它取最佳性必要条件, 即

$$\frac{\partial J}{\partial f_i} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial g_i} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial k_i} = 0 \quad (4.1)$$

式中 f_i 是矩阵 F 的元; g_i 是矩阵 G 的元; h_i 是矩阵 H 的元. 由此可得出一组非线性矩阵代数方程, 以求解 F, G, H . 对这个方程组求解是相当困难的, 一方面因为非线性, 另一方面因为 F, G, H 矩阵的元数众多, 因此变量众多^[4,5]. 只在单输入-单输出情况, 并预先选取 F 的特征值及一定结构时, 可以找出一个算法^[15]. 选取 F 的特征值必然是取 A 的主特征值, 这样, 积分平方误差法就借用了主特征值法的思路.

1974年, Wilson 对多输入-多输出系统提出一选取 F, G 求 H , 再按 F, H 求 G 的递推算法^[16]. 但此法计算工作量很大, 且递推的收敛性在理论上尚未证明.

Wilson 方法仍需解出矩阵 A 的特征值, 但不需计算特征向量. 然而, 这样算得的模型, 对于阶跃输入并不能给出和原系统一样的稳态值. 并且, 在多输入-多输出系统中如何选取 F 及 G 的一定标准结构, 以减少矩阵未知元数目这一问题, 也没有解决.

为了适应阶跃输入, 文[17]采取了分开误差向量 $\mathbf{e}(t)$ 中的动态部分和稳态部分并分别最佳化的办法. 文[18]将系统和模型的稳态输出一致这一要求转化为对简化模型结构的一个约束. 关键问题是如何将 Wilson 方法推广到多输入-多输出系统. 文[17]提出总的价值函数

$$J = \sum_{i=1}^m J_i$$

J 也可以是 J_i 加权的和, 而 J_i 是 $\mathbf{u}(t)$ 中 u_i 分量所引起的.

五、Padé 近似法

Padé 近似是十分古老的数学内容^[19], 而且, 早就用于其它技术领域^[20]. Padé 近似用

于模型降阶,形成了模型降阶的 Padé 近似法. 实际上它是一种泛称,包括了好几种方法.

1. Padé 近似

若系统的传递函数矩阵 $\Gamma(s)$ 为式 (1.5), 它可以展为下列矩阵幂级数

$$\Gamma(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + C_3s^3 + \dots \quad (5.1)$$

式中 $\forall C_i$ 为 $p \times m$ 常量矩阵. 则 $\Gamma(s)$ 的 Padé 近似定义为

$$[q, k] \triangleq \frac{D_0 + D_1s + D_2s^2 + \dots + D_{q-1}s^{q-1} + D_qs^q}{e_0 + e_1s + e_2s^2 + \dots + e_{k-1}s^{k-1} + s^k} \quad (5.2)$$

式中 $[q, k]$ 为 Padé 近似的记号,分母为简化模型的特征多项式, $\forall D_i$ 为 $p \times m$ 矩阵. 而式 (5.2) 的矩阵幂级数展开(实际上即为长除所得的商)与式 (5.1) 中的各项彼此相等(包括到 s^{q+k} 项). 由此,比较系数矩阵得 $q + k + 1$ 个方程,可解出 $e_0, e_1, \dots, e_{k-1}; D_0, D_1, \dots, D_q$.

Padé 近似的主要缺点是: 即使原系统是稳定的,简化模型甚至会出现不稳定. 推究其起因,在比较系数矩阵时,不仅计入了传递函数矩阵的分母,也计入了分子. 因此分子各项也直接影响到简化模型的稳定性.

2. 矩阵时间矩匹配法

矩阵时间矩匹配法是时间矩匹配法^[4]的推广. 采用系统的矩阵脉冲响应,可得传递函数矩阵 $\Gamma(s)$ 的表达式同式 (5.1), 而式中 C_0, C_1, C_2, \dots 即为时间矩(确切地说是正比于时间矩). 因此,求法同 Padé 近似.

3. 矩阵连分式法

连分式法对于单输入-单输出系统是一种很好的降阶方法. 矩阵连分式法是连分式法的推广^[21].

由于系统的传递函数矩阵 $\Gamma(s)$ 为式 (1.5), 它可展成矩阵连分式

$$\Gamma(s) = \{H_1 + s\{H_2 + s\{H_3 + \dots\}^{-1}\}^{-1}\}^{-1} \quad (5.3)$$

式中, H_1, H_2, H_3, \dots 为偏商矩阵. 从式 (1.5) 可以算出各次偏商矩阵^[22,23]. 如果截断矩阵连分式,并删去尾随的若干次偏商矩阵,即得简化模型.

矩阵连分式法的缺点^[24,25]: (1) 因为 $H_1 = a_0Q_0^{-1}$, 所以,要 H_1 存在,必须 Q_0^{-1} 存在,故 Q_0 必为方阵,这意味着要求原系统的输入维数 m 必须等于输出维数 p ; (2) 要 Q_0^{-1} 存在,必须 Q_0 非奇异,这未必能保证; (3) 为了提高逼近的程度,简化模型的传递函数矩阵的分母阶数有时甚至比原系统的分母阶数还高,这就不成其为简化模型了; (4) 即使原系统是稳定的,简化模型甚至会出现不稳定.

4. 保留主极与 Padé 近似结合

若系统的传递函数矩阵 $\Gamma(s)$ 为式 (1.5), 它可以展为矩阵幂级数,如式 (5.1). 对式 (1.5) 利用数值分析中的 König 定理及其推广,求出 $\Gamma(s)$ 的主极数目和位置. 再将前述 Padé 近似推广到两点或更多点附近^[26], 即求出的 k 个主极 $-s_1, -s_2, \dots, -s_k$ 应满足简化模型的特征多项式,由此可建立 k 个方程,取代式 (5.1), (5.2) 的比较系数所得的许多方程中的 k 个方程,由此可求出 $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{k-1}; D_0, D_1, D_2, \dots, D_q$. 故可得 $\Gamma(s)$ 的 Padé 近似 $[q, k]$ 为式 (5.2), 它保证降阶模型也是稳定的.

六、Routh 近似法

Routh 近似法利用 Routh 表中的系数^[27]和一种特殊的连分式展开式(即所谓 α - β 展开式)之间有一定的关系,把传递函数展为 α - β 展开式后,截断连分式,可以保证得到稳定的简化模型^[28]。所以, Routh 近似法一方面和 Padé 近似法有密切联系;另一方面较之 Padé 近似法在思路又略有特色。

先讨论单输入-单输出系统。若系统的传递函数为 $\Gamma(s)$, 即式 (1.5), 但 $Q_i = q_i$ (标量), $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 。为了获得一低频近似采用倒数变换, 即令

$$\hat{\Gamma}(s) = \frac{1}{s} \Gamma\left(\frac{1}{s}\right),$$

则得

$$\hat{\Gamma}(s) = \frac{q_0 s^{n-1} + q_1 s^{n-2} + \dots + q_{n-2} s + q_{n-1}}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (6.1)$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \alpha_1 s} + \frac{1}{\alpha_2 s} + \dots + \frac{1}{\alpha_n s} \right) \left[\beta_1 + \left(\frac{1}{\alpha_2 s} + \frac{1}{\alpha_3 s} + \dots + \frac{1}{\alpha_n s} \right) \cdot \left[\beta_2 + \left(\frac{1}{\alpha_3 s} + \frac{1}{\alpha_4 s} + \dots + \frac{1}{\alpha_n s} \right) \left[\beta_3 + \dots + \left(\frac{1}{\alpha_n s} [\beta_n] \dots \right) \right] \right] \right] \quad (6.2)$$

式 (6.2) 即为连分式的 α - β 展开式; 式中, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 各有 α 表 (即所谓 Routh 表) 及 β 表可以查出^[28]。截断连分式, 得简化模型的倒数传递函数 $\hat{P}(s)$

$$\hat{P}(s) = \left(\frac{1}{1 + \alpha_1 s} + \frac{1}{\alpha_2 s} + \dots + \frac{1}{\alpha_k s} \right) \left[\beta_1 + \left(\frac{1}{\alpha_2 s} + \dots + \frac{1}{\alpha_k s} \right) \cdot \left[\beta_2 + \left(\frac{1}{\alpha_3 s} + \dots + \frac{1}{\alpha_k s} \right) \left[\beta_3 + \dots + \left(\frac{1}{\alpha_k s} [\beta_k] \dots \right) \right] \right] \right] \quad (6.3)$$

最后得简化模型的传递函数为 $P(s)$

$$P(s) = \frac{1}{s} \hat{P}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{d_0 + d_1 s + \dots + d_{k-1} s^{k-2} + d_k s^{k-1}}{e_0 + e_1 s + \dots + e_{k-1} s^{k-1} + e_k s^k} \quad (6.4)$$

因为 $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 意味着 n 阶系统渐近稳定, 并因 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subset \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 故简化模型也是渐近稳定的。至于简化模型的阶数 k , 可按脉冲响应能量之比来选取^[28]。此法可推广到多输入-多输出系统, 但手续上是很烦的。

文 [29] 重新布置 α - β 表, 形成了不用倒数变换的 Routh 近似法。文 [30] 又修正了 Routh 近似法, 使降阶模型的分子阶数不一定要比分母低一阶, 即可任选, 使自由性增加了些 (但未必分子阶数比分母低一阶就一定不好)。

由于决定系统稳定性的是阵 $\Gamma(s)$ 的分母, 因此, 文 [31] 提出: 可以只考虑分母的展开式, 而对分子采用 Padé 近似。这样做, 在分母展开式中没有矩阵出现, 既简单, 又可推广到多输入-多输出系统中去, 这就是所谓 Routh 稳定判据与 Padé 近似法的结合。

七、结 束 语

本文综述了五个主要的降阶方法。我们要求降阶方法计算工作量不能太大, 同时必

须能对降阶所引起的误差有所量度和节制。在选用降阶方法时,要根据手头的任务出发,全面统一地考虑。

集结法的特点是比较容易应用,系统和模型两者之间的关系是清楚的、明确的。系统和模型的状态向量间的关系也是明确的,但计算工作量较大。

摄动法能得出分散控制或递阶控制的结构,这是一个特点。但如何建立一套循序的步骤,以把系统化能采用摄动法的 ε 小参数体制的方程,尚有待于进一步探讨。

以积分平方误差作为价值函数的方法来选取最佳简化模型,这比其它价值函数容易解析处理和最佳化,并可获得比最佳集结法性能更好的简化模型。但计算工作量大。进一步研究,可集中在作为必要条件的非线性矩阵方程组的数值算法,以及对于模型 (F, G, H) 中诸矩阵适用结构的研究。

Padé 近似法的优点是简单,弱点在于有时使简化模型不稳定。由于传递函数矩阵的形式决定了采用时间矩匹配,所以,应该采取一种稳定形式与匹配时间矩相结合。保留主极与 Padé 近似法的结合, Routh 近似法, Routh 稳定判据和 Padé 近似法的结合,都是在上述思想下形成的。目前,这三种方法是较为有生气的。

此外,还有部份最小实现法。它是在采用 Markov 参数、Hankel 矩阵进行最小实现的过程中,同时通过 Hermite 标准型进行简化^[32]。由于它从传递函数矩阵出发,得出简化模型的状态向量方程,所以它是两大类降阶方法外另一个独创的研究途径。该法有一些优点,但是,和 Padé 近似法一样,存在着简化模型的稳定性问题。

最近, Tse 等人提出了广义 Hessenberg 表示法的新研究途径^[33]。借助于大系统的一组局部的测定或输出(信息结构),用广义集结法将状态方程中的矩阵 A 演化为分块下 Hessenberg 矩阵。然后,从保持输入-输出特性的角度归纳出简化模型。此法不要求特征值,也不必保留主特征值,却能保持系统的部份结构,但需要对有些参数作合适的修正,不是任何大系统都能用,而且计算工作量较重。

总之,大系统的模型简化,还是一个继续开拓中的研究课题。

附 录

(各种简化模型的误差比较实例¹⁾)

给出三阶系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 20 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 18 \end{bmatrix} x$$

取 $-1, -2$ 两个主特征值,并求保持 x_1, x_2 两个状态变量的二阶简化模型,即

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) 本数字实例取自 [10], 原文只用五种方法计算了简化模型,其余五种方法由本文作者加算。

$$\therefore K = M_0 T M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

则对象的简化模型为 Davison (1966) 模型^[2,4]:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 20 \\ -5 \end{bmatrix} u, \quad y = [h_1 \quad h_2] z.$$

同时,系统传递函数

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{2} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+10 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)}.$$

今采用本综述中所述诸方法求出简化模型,即或只要决定输出方程中的 h_1, h_2 , 或者从 $T(s)$ 求出简化模型的传递函数 $P(s)$, 列表给出诸简化模型的传递函数及其在脉冲作用下的积分平方误差

$$J = \int_0^{\infty} (y - y_m)^2 dt$$

的值.

表 1

传递函数 $P(s)$	积分平方误差 J	简化模型
$\frac{2}{(s+1)(s+2)}$	5.05×10^{-3}	不带零点的主特征值集结法
$\frac{-0.278(s-7)}{(s+1)(s+2)}$	3.85×10^{-3}	集结法, 并 $H = CK'(KK')^{-1}$
$\frac{-0.152(s-13)}{(s+1)(s+2)}$	1.15×10^{-3}	集结法, 并 $H = CWK'(KWK')^{-1}$ ^[10]
$\frac{-0.081(s-20.173)}{s^2 + 2.477s + 1.664}$	0.45×10^{-3}	Wilson 积分平方误差法
$\frac{-0.1460s + 1.898}{s^2 + 2.891s + 1.898}$	0.789×10^{-3}	连分式法, 时间矩匹配法, Padé 近似法
$\frac{1.616}{s^2 + 2.586s + 1.616}$	1.85×10^{-3}	Routh 近似法, Routh 稳定判据与 Padé 近似相结合
$\frac{-0.1613s + 1.935}{s^2 + 2.935s + 1.935}$	1.11×10^{-3}	保留一主极与 Padé 近似结合
$\frac{-0.2(s-10)}{(s+1)(s+2)}$	1.62×10^{-3}	保留二主极与 Padé 近似结合

参 考 文 献

- [1] H. M. Power, A Review of Methods of Model Reduction, IEE Control and Automation Division, Colloquium on: Reduced Order Models and Their Use in Design of Dynamical Systems, (1975), I/1-I/7.
- [2] N. R. Sandell, et al., Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-23(1978), No. 2, 108—128.
- [3] R. Genesio and M. Milanese, A Note on the Derivation and Use of Reduced-order Models, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21(1976), No. 1, 118—122.
- [4] M. J. Bosely and F. P. Lees, A Survey of Simple Transfer-function Derivations from High-order State-variable Models, *Automatica*, 8(1972), No. 6, 765—775.
- [5] M. Aoki, Control of Large-scale Dynamic Systems by Aggregation, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-13(1968), No. 3, 246—253.

- [6] S. S. Lamba and S. V. Rao, On Suboptimal Control via the Simplified Model of Davison, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-19(1974), No. 4, 448—450.
- [7] J. M. Siret, G. Michailesco and P. Bertrand, Representation of Linear Dynamical Systems by Aggregated Models, *Int. J. Contr.*, 26(1977), No. 1, 121—128.
- [8] E. J. Davison, A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-11(1966), No. 1, 93—101.
- [9] M. R. Chidambara and R. B. Shainker, Lower Order Generalized Aggregated Model and Suboptimal Control, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-16(1971), No. 2, 175—180.
- [10] H. Inooka and G. Obinata, Mixed Method of Aggregation and I. S. E. Criterion Approaches for System Reduction, *Electron. Lett.*, 13(1977), No. 3, 88—90.
- [11] H. G. Kwatny, F. M. Massimo and J. H. Spare, Canonical Representation and Averaging in the Construction of Reduced Order Models with Physical Structure, *Proc. JACC*, 1977, 534—542.
- [12] P. V. Kokotović, Feedback Design of Large Linear Systems, in J. B. Cruz, Jr. (Editor), *Feedback Systems*, McGraw-Hill, 1972.
- [13] A. H. Haddad, Linear Filtering of Singularly Perturbed Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21(1976), No. 4, 515—519.
- [14] J. H. Chow and P. V. Kokotović, Eigenvalue Placement in Two-time-scale Approach. *Proc. IFAC Symposium. Large-scale System Theory and Application*, Italy (1976).
- [15] D. A. Wilson, Optimal Solution of Model Reduction Problem, *Proc. IEE*, 117(1970), No. 6, 1161—1165.
- [16] D. A. Wilson, Model Reduction for Multivariable Systems, *Int. J. Contr.*, 20(1974), No. 1, 57—64.
- [17] G. Hirzinger and G. Kreisselmeier, On Optimal Approximation of High-order Linear System by Low-order Models, *Int. J. Contr.*, 22(1975), No. 3, 399—408.
- [18] J. M. Siret, G. Michailesco and P. Bertrand, Optimal Approximation of High-order Systems Subject to Polynomial Inputs, *Int. J. Contr.*, 26(1977), No. 6, 963—971.
- [19] H. S. Wall, *The Analytical Theory of Continued Fractions*, Princeton, N. J. Van Nostrand (1948).
- [20] P. R. Graves-Morris (Editor), *Padé Approximants and Their Application*, Academic Press, London, 1973.
- [21] C. F. Chen, Model Reduction of Multivariable Control Systems by Means of Matrix Continued Fraction, *Int. J. Contr.*, 20(1974), No. 2, 225—238.
- [22] C. F. Chen and L. S. Shieh, Continued Fraction Inversion by Routh's Algorithm, *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-16(1969), No. 2, 197—202.
- [23] L. S. Shieh and F. F. Gaudiano, Matrix Continued Fraction Expansion and Inversion by the Generalized Matrix Routh Algorithm, *Int. J. Contr.*, 20(1974), No. 5, 727—737.
- [24] M. R. Calfe and M. Healey, Continued-fraction Model-reduction Technique for Multivariable Systems, *Proc. IEE*, 121(1974), No. 5, 393—395.
- [25] S. A. Marshall, Comments on Continued-fraction Model-reduction Technique for Multivariable Systems, *Proc. IEE*, 121(1974), No. 9, 1032.
- [26] M. R. Calfe and M. Healey, Author's Reply, *Proc. IEE*, 121(1974), No. 9, 1032.
- [27] Y. Shamash, Linear Systems Reduction Using Padé Approximation to Allow Retention of Dominant Modes, *Int. J. Contr.*, 21(1975), No. 2, 257—272.
- [28] R. J. Schwarz and B. Friedland, *Linear Systems*, McGraw-Hill, 1965.
- [29] M. F. Hutton and B. Friedland, Routh Approximations for Reducing Order of Linear, Time-invariant Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-20(1975), No. 3, 329—337.
- [30] V. Krishnamurthy and V. Seshadri, A Simple and Direct Method of Reducing Order of Linear Systems Using Routh Approximations in Frequency Domain, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-21(1976), No. 5, 797—799.
- [31] G. Langholz and D. Feinmesser, Model Reduction by Routh Approximations, *Int. J. Sys. Sci.*, 9(1978), No. 5, 493—496.
- [32] Y. Shamash, Model Reduction Using the Routh Stability Criterion and the Padé Approximation Technique, *Int. J. Contr.*, 21(1975), No. 3, 475—484.
- [33] J. Hickin and N. K. Sinha, New Method of Obtaining Reduced-order Models for Linear Mul-

tivariable Systems, *Electron. Lett.*, **12**(1976), No. 4, 90—92.

- [34] E. C. Y. Tse, J. V. Medanic and W. R. Perkins, Generalized Hessenberg Transformations for Reduced-order Modelling of Large-scale Systems, *Int. J. Contr.*, **27**(1978), No. 4, 493—512.

MODEL REDUCTION OF LARGE SCALE SYSTEM

WAN BAI-WU WU SHOU-ZHANG

(*Xian Jiaotong University*)

ABSTRACT

This paper surveys the methods of model reduction for large scale systems. Five main aspects are classified, viz. aggregation method, perturbation method, integral-square-error method, Padé approximation method and Routh approximation method. They are compared and reviewed. A numerical example of 3rd order system with various reduced order models and performance indexes is given.