第6卷 第1期 自动化学报 Vol. 6, No. 1
1980年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1980

一种新型平方器和乘法器的研究及其应用*

韩振革
(重庆工业自动化仪表研究所)

摘要

本文讨论用数学方法将平方和乘法运算化为数列求和,采用计数分频,研制一种新型的平方器和乘法器,并将它们应用于数字式质量流量计算器的设计中.

一、前言

人们熟悉的计算机虽然有较强的计算和处理功能. 但由于价格贵,有些场合还是不适用. 譬如检测仪表有许多运算和非线性处理问题,通常是研制一些专用的数字运算装置. 本文提到的“数字式质量流量计算器”就是一个实例.

我们知道,计算机的运算器是以加法演算为主,各种复杂运算都是借助于软件,编制解题程序,用一系列指令来完成的. 而本文研究的“平方器”和“乘法器”则是借助数学工具,把平方运算化为多项式求和,建立便于硬件实现的数学模型,以此为据. 进行电路逻辑设计,实现平方和乘法运算.

二、平方器

平方器是实现 $f(N)=N^2$ 运算的部件,为了把平方运算化成数列求和,先将 $f(N)$ 化为:

$$N^2=N+N(N-1) \tag{1}$$

式中 $N(N-1)$ 可进一步简化. 试取数列: $0, 2, 4, \cdots\cdots(n-1)\times 2\cdots\cdots$ 前 n 项之和

$$S_n=0+2+4+\cdots+(n-1)\times 2.$$

当 $n=N$ 时,

$$S_n=0+2+4+\cdots+(N-1)\times 2=N(N-1)$$

所以 (1) 式变成:

$$N^2=N+\sum_{n=1}^{N}(n-1)\times 2 \tag{2}$$

分析 (2) 式. 如果平方器以 (2) 式为数学模型的话,随着 N 的增大,电路将非常庞大. 因此,尽管 (2) 式已将 $f(N)$ 化成多项式之和,但没有实用价值. 必须对 $N(N-1)$ 作新的简化.

---

* 本文曾在1979年3月中国仪器仪表学会第一次学术交流会上宣读.

我们取下面数列(首项 $=N$,公比 $=2$,通项 $=N\cdot 2^{i-1}$)

$N, N2, N\cdot 2^2, \cdots N\cdot 2^{i-1}, \cdots\cdots\cdots$ 前 n 项之和[1]:

$$S_n = N + N\cdot 2 + N\cdot 2^2 + \cdots + N\cdot 2^{i-1} + \cdots + N\cdot 2^{n-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} N\cdot 2^{i-1} = N(2^n - 1),$$

令 $2^n = N$,于是(1)式变为

$$N^2 = N + \sum_{i=1}^{n} N\cdot 2^{i-1}. \tag{3}$$

经上述数学处理之后,(3)式将平方运算化成了数列求和,同时也便于用分频电路实现.以(3)式为数学模型进行电路设计时,着眼点放在数列的通项($N\cdot 2^{i-1}$)上. 如果把 m 作为计数脉冲数送入计数器,它将被逐项分频. 参照数列通项的特点,将分频信号按一定规律(这个规律取决于通项的数学形式)相与,使"与门"输出脉冲数的表达式具有通项的数学形式. 即用电路实现了数列的通项. 对此作如下说明:

设:二进制计数器的位数是 K,且为奇数. 中心位为 n_0,以 n_0 为中心的对称位分别用 A_{n_0+i} 和 A_{n_0-i} 表示,计数脉冲数为 m(见图1(a))对称位相"与"时,仅当 n_0+i 位处于高电平时,n_0-i 位的分频脉冲数才能通过"与门". 在高位分频信号的一个周期内,"与门"输出脉冲数为

$$\frac{m/2^{n_0-i}}{m/2^{n_0+i}}\cdot\frac{1}{2} = 2^{2i-1} \quad (\text{见图 } 1(\text{b}))$$

实际上,计数脉冲数 m 送入计数器时,n_0+i 位不止翻转一次. 其翻转次数 P_i 即分频数为 $P_i = \frac{m}{2^{n_0+i}}$. 因此,对称位"与门"输出脉冲数不是 2^{2i-1} 而是 $P_i\cdot 2^{2i-1}$. 其表达式为

$$M_i = \frac{m}{2^{n_0+i}}\cdot 2^{2i-1} = \frac{m}{2^{n_0}}\cdot 2^{i-1},$$

设中心位的分频数 $m/2^{n_0} = N$. 则

$$M_i = N\cdot 2^{i-1} \tag{4}$$

显然(4)式和数列的通项形式一致. 因此图1(a)的电路模型满足(3)式要求. 但它不等于(3)式,仅仅是实现了数列通项. 为此,必须将对称位"与门"输出脉冲的总和

$$\left(\sum_{i=1}^{n} N\cdot 2^{i-1}\right)$$

再加上中心位"与门"的输出脉冲数 N 才能实现 N^2. 所以实现 N^2 运算的电路逻辑表达式应写为

$$F_{(N)} = A_{n_0} + A_{n_0+1}\cdot A_{n_0-1} + A_{n_0+2}\cdot A_{n_0-2} + \cdots + A_K\cdot A_1 \tag{5}$$

为采用"与非门"实现(5)式需将(5)式作如下变换:

$$F_{(N)} = \overline{\overline{A_{n_0} + A_{n_0+1}\cdot A_{n_0-1} + A_{n_0+2}\cdot A_{n_0-2} + \cdots\cdots + A_K\cdot A_1}} \tag{6}$$

$$F_{(N)} = \overline{\overline{A}_{n_0}\cdot\overline{A_{n_0+1}\cdot A_{n_0-1}}\cdot\overline{A_{n_0+2}\cdot A_{n_0-2}}\cdots\cdots\cdot\overline{A_K\cdot A_1}} \tag{7}$$

由计数器和"与非门"按(7)式可较方便地组成一种新型的"平方器". 它精度高、简

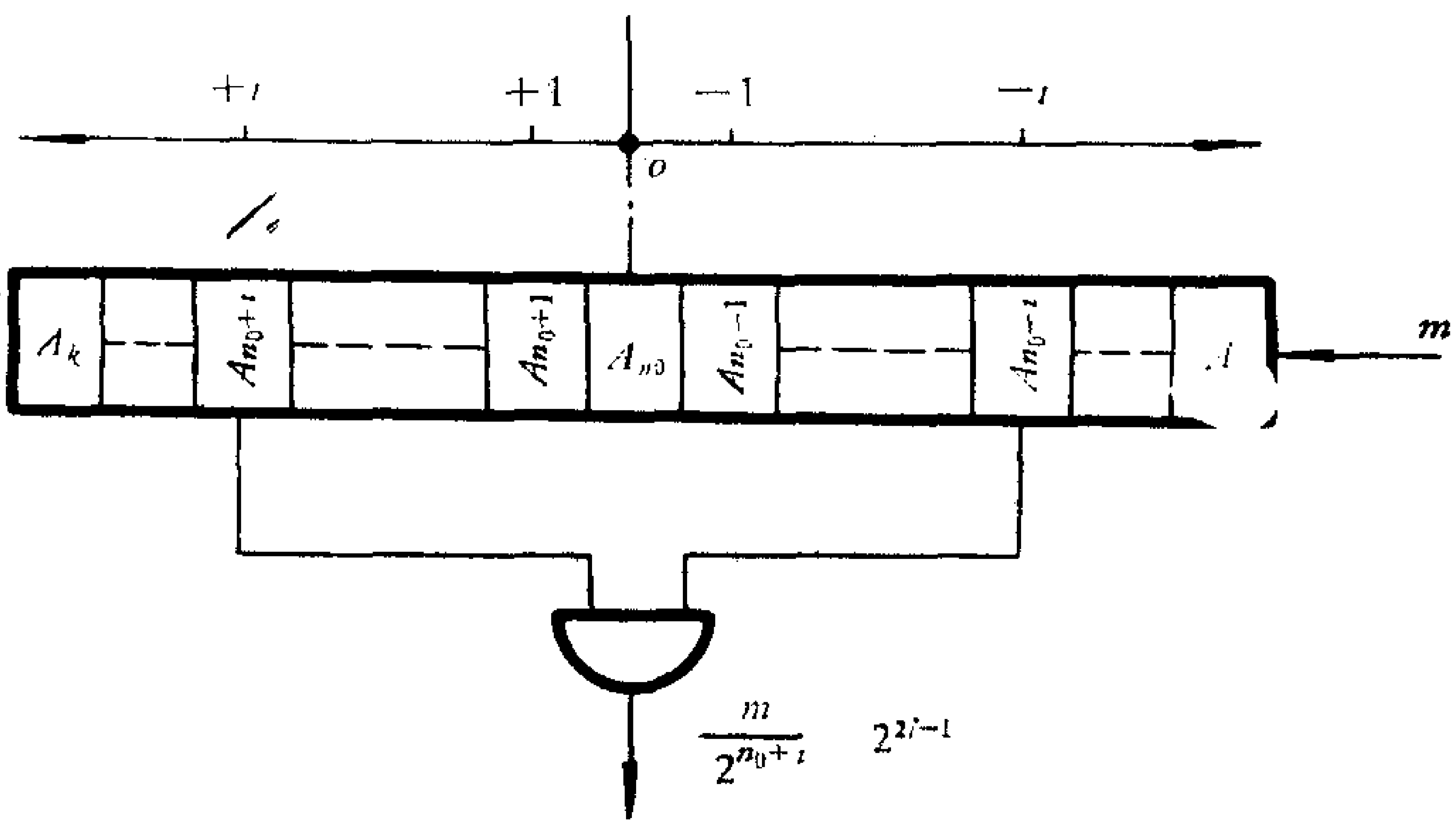

图 1(a)　K位计数器构成原理框图

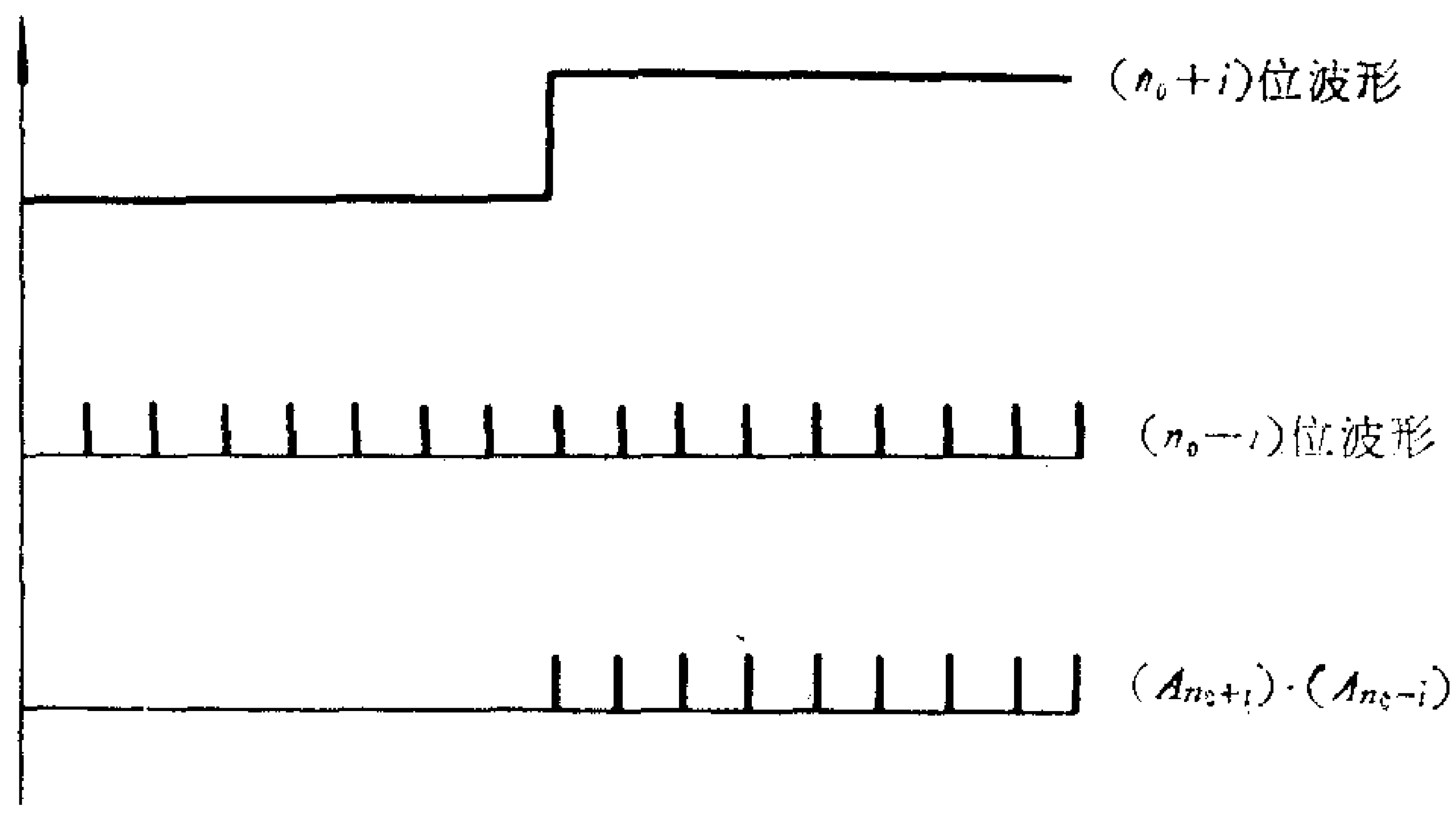

图 1(b)　对称位及相与的波形图

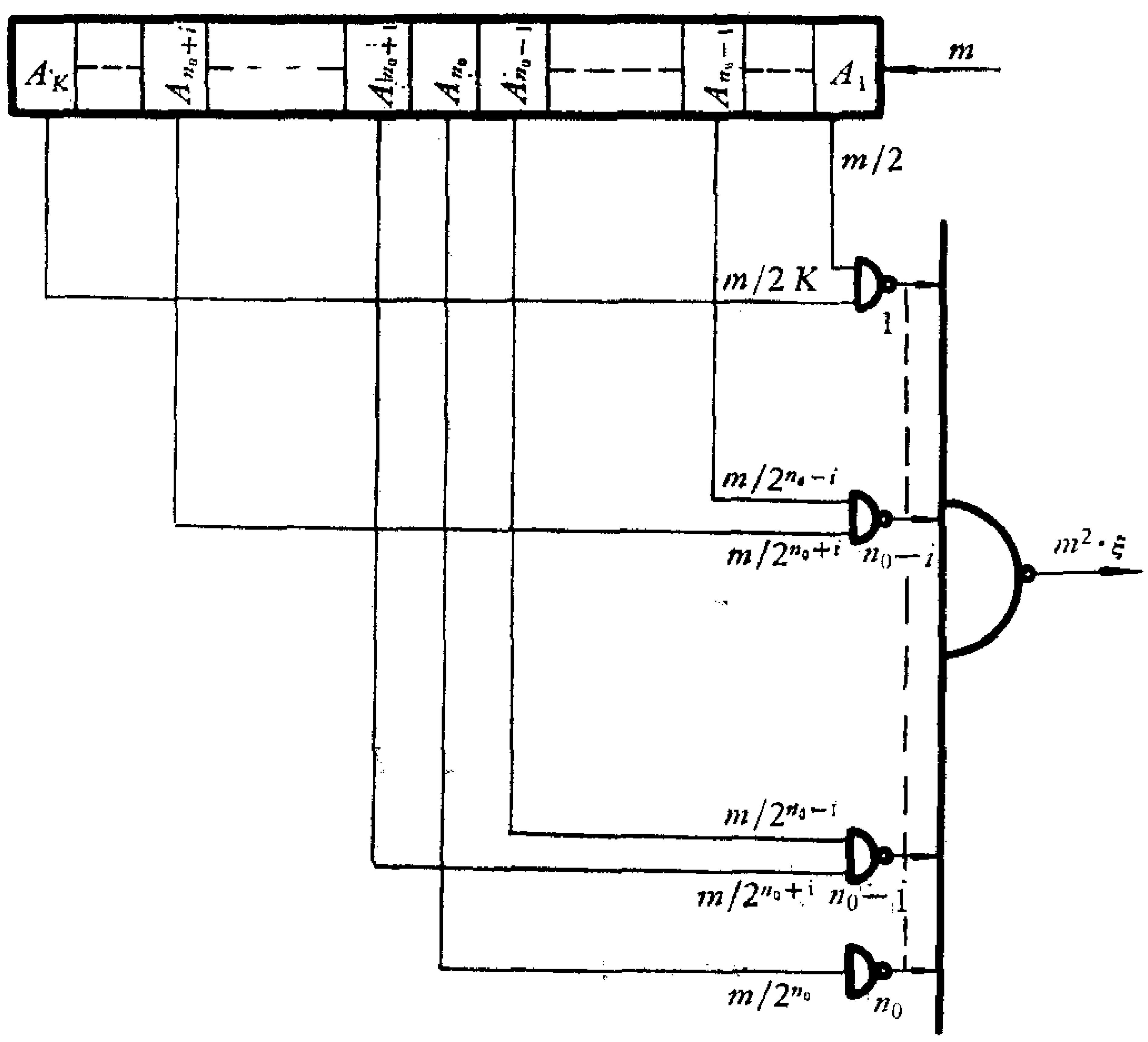

图 2　平方器原理框图

单、形式新颖，可供电路设计者参考使用。

平方器的电路原理见图 2。在应用平方器时有一点请特别注意：平方器是实现N平方的演算，N与计数脉冲数m的关系为$N = m/2^{n_0}$，设

$$\frac{1}{2^{2n_0}} = \xi \quad 则 \quad N^2 = m^2 \cdot \xi \tag{8}$$

(8) 式表明，送入计数器的脉冲数 m 经平方器运算后所得的数不是 m^2，而是比 m^2 缩小了 2^{2n_0} 倍.

关于平方器精度的讨论：

1) 当中心位分频数 $m/2^{n_0}$ 是整数时，电路实现的运算与理论值一致(没有误差). 以 $K=13$，$n_0=7$ 为例，见表 1.

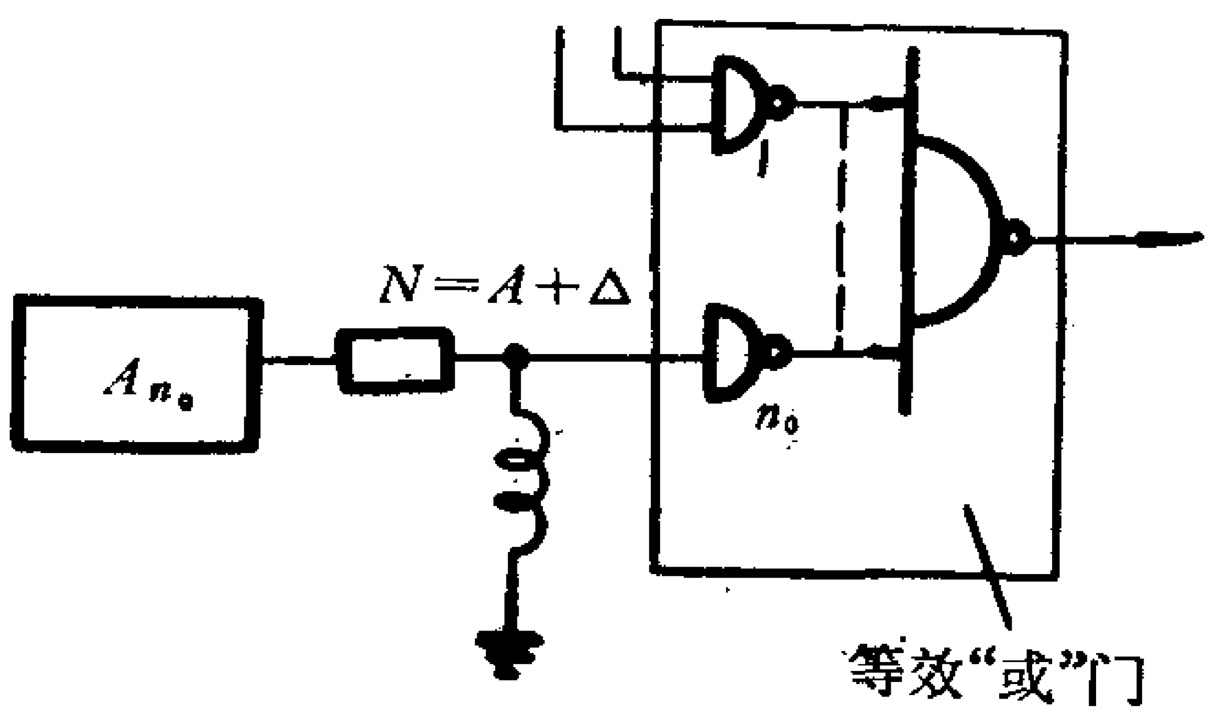

图 3 n_0 位输出电路

2) 当 $m/2^{n_0}$ 不是整数时，

$m/2^{n_0} = A + \Delta$(其中 A 是整数，Δ 是小数)、中心位 n_0 输出电路示于图 3.

$\Delta < \frac{1}{2}$ 时，等效或门输出脉冲数为 A.

$\Delta > \frac{1}{2}$ 时，等效或门输出脉冲数为 $A+1$.

因为在实际电路中，或门是以 1 个脉冲为输出单位的. 当 $\Delta > \frac{1}{2}$ 时，在输出端产生 1 个脉冲，也就是说对等效或门而言，把 Δ 和 1 等同对待. 当 $\Delta < \frac{1}{2}$ 时，在或门输出端不产生脉冲，对或门而言 Δ 相当于 0 而被甩掉. 由此可见，无论 $\Delta > \frac{1}{2}$ 或 $\Delta < \frac{1}{2}$，电路都不能正确反映而造成误差. 下面举几个实际例子予以说明，见表 2.

表 1

m	N	平方器输出	计算值
1536	12	144	144
1920	15	225	225
8192	64	4096	4096

表 2

m	N	电路输出	$m^2/16384$ 的计算
3713	$29\frac{10}{128}$	841	841.4
3310	$25\frac{110}{128}$	669	668.7
4699	$36\frac{91}{128}$	1348	1347.69

三、数字乘法器

乘法器是对两个量 (如 A，B) 进行乘法演算的部件： $M = A \cdot B$. 为了将显函数 $M_{(A,B)}$ 化为数列求和，先用二进制表示数 A：

$$A_{(2)} = A_9A_8A_7A_6A_5A_4A_3A_2A_1A_0 \tag{8}$$

按二-十进制转换规则，化 $A_{(2)} \to A_{(10)}$.

$$A_{(10)} = A_0 + A_1 \cdot 2 + A_2 \cdot 2^2 + A_3 \cdot 2^3 + A_4 \cdot 2^4 + A_5 \cdot 2^5 + A_6 \cdot 2^6 + A_7 \cdot 2^7 + A_8 \cdot 2^8 + A_9 \cdot 2^9 \tag{9}$$

(9) 式也可看作是以 $(A_i 2^i)$ 为通项的数列之和：

$$A_{(10)}=\sum_{i=0}^{9}A_i\cdot 2^i \tag{10}$$

对 $A_{(10)}$ 和 $B_{(10)}$ 作乘法运算:

$$M_{(10)}=A_{(10)}\cdot B_{(10)} \tag{11}$$

将(10)式代入(11)式:

$$M_{(10)}=B_{(10)}\cdot\sum_{i=0}^{9}A_i\cdot 2^i \tag{12}$$

变换(12)式:

$$M_{(10)}=\sum_{i=0}^{9}B_{(10)}\cdot A_i\cdot 2^i \tag{13}$$

为了利用计数器的分频特性,故等式右端提出因子 2^{10}. 则(13)式变为:

$$M_{(10)}=2^{10}\sum_{i=0}^{9}\frac{B_{(10)}}{2^{10-i}}\cdot A_i \tag{14}$$

$$\frac{M_{(10)}}{2^{10}}=\sum_{i=0}^{9}\frac{B_{(10)}}{2^{10-i}}\cdot A_i \tag{15}$$

在进行电路设计时,注意力集中在通项 $\left(\frac{B_{(10)}}{2^{10-i}}\cdot A_i\right)$ 上. 其中 A_i 是 $A_{(2)}$ 的各位代码(非另即1):

$i=0$, A_0 表示权 $=2^0$ 的系数.
$i=1$, A_1 表示权 $=2^1$ 的系数.
⋮
$i=9$　A_9 表示权 $=2^9$ 的系数.

而 $\frac{B_{(10)}}{2^{10-i}}$ 则为 $B_{(10)}$ 的分频信号.

$i=0$, $\frac{B_{(10)}}{2^{10}}$ 表示计数器第十位的分频数.

$i=1$, $\frac{B_{(10)}}{2^{9}}$ 表示计数器第九位的分频数.

⋮

$i=9$, $\frac{B_{(10)}}{2^{1}}$ 表示计数器第一位的分频数.

如果我们把 $A_{(2)}$ 作为被乘数寄存在 10 bit 寄存器内,并且位数是从右向左递增:

A_9	A_8	A_7	A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0

高位 ←———————— 低位

而另一个对 $B_{(10)}$ 进行计数用的二进制计数器的排列则是低位在左,高位在右:

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}

低位 ————————→ 高位

在这样排列的基础上，将 B 的低位和 A 的高位依次相与，便得到通项为 $\frac{B_{(10)}}{2^{10-i}} \cdot A_i$. 通项电路示于图 4. 对"与门"输出求和便得 $\frac{A_{(10)} \cdot B_{(10)}}{1024}$. 和"平方器"相类似，可列出乘法运算的逻辑表达式：

$$M_{(10)} = A_0 \cdot B_{(10)} + A_1 \cdot B_9 + A_2 \cdot B_8 + A_3 \cdot B_7 + A_4 \cdot B_6 + A_5 \cdot B_5 + A_6 \cdot B_4 + A_7 \cdot B_3 + A_8 \cdot B_2 + A_9 \cdot B_1 \tag{16}$$

$$M_{(10)} = \overline{\overline{A_0 \cdot B_{10}} \cdot \overline{A_1 \cdot B_9} \cdot \overline{A_2 \cdot B_8} \cdot \overline{A_3 \cdot B_7} \cdot \overline{A_4 \cdot B_6} \cdot \overline{A_5 \cdot B_5} \cdot \overline{A_6 \cdot B_4} \cdot \overline{A_7 \cdot B_3} \cdot \overline{A_8 \cdot B_2} \cdot \overline{A_9 \cdot B_1}} \tag{17}$$

按 (17) 式进行电路设计. 其电路原理示于图 5. 应用该乘法器时，同样要注意乘法器的输出较 $A_{(10)} \cdot B_{(10)}$ 缩小了 1024 倍. 我们在设计"数字式质量流量计算器"时，对此予以妥善解决.

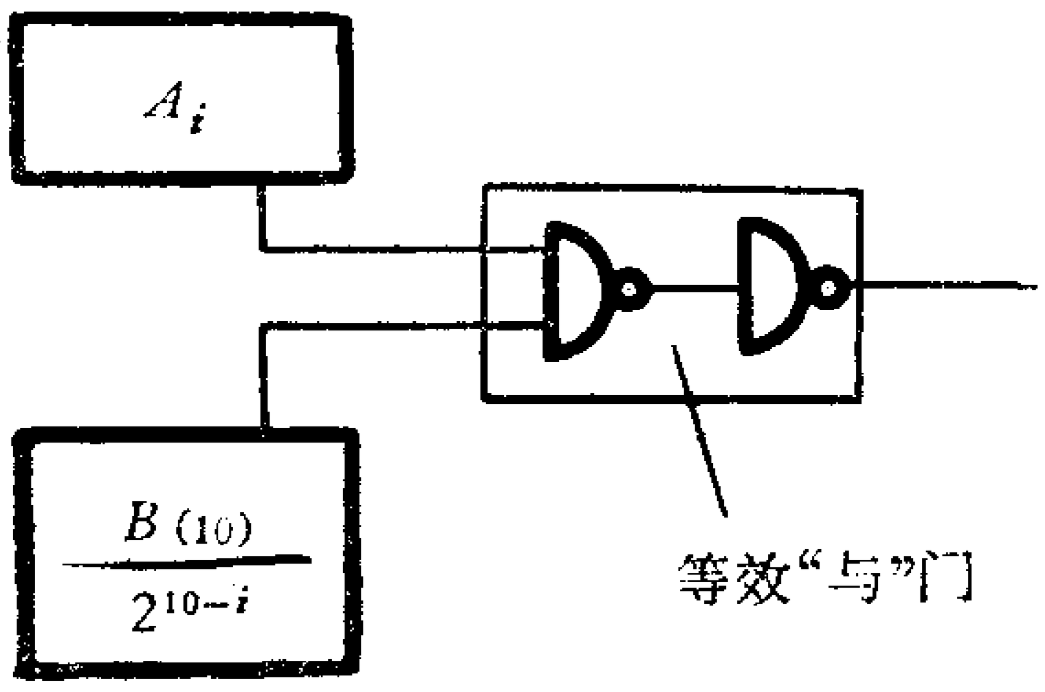

图 4 通项电路

电路实现 (15) 式时，同样存在误差，分析如下：

1) 当 $B_{(10)}$ 的分频信号为整数时，

$$\frac{B_{(10)}}{2^{10-i}} = A.$$

"与门"符合时，"与门" 输出脉冲数就是 A，电路不产生误差.

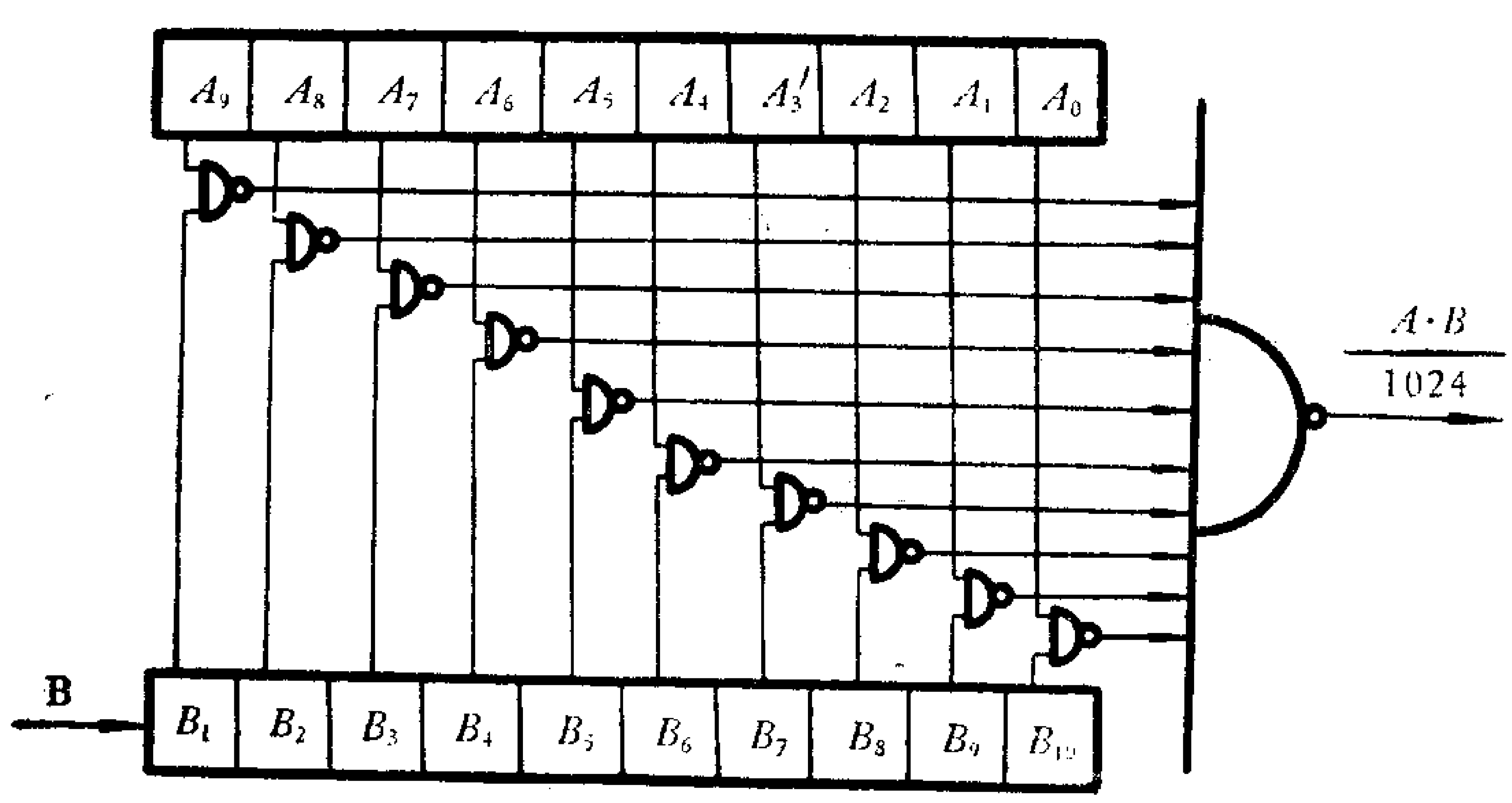

图 5 乘法器原理图

2) 当 $B_{(10)}$ 的分频信号为非整数时，$\frac{B_{(10)}}{2^{10-i}} = A + \Delta$（$A$ 是整数部分，Δ 是小数部分）.

若 $\Delta \geqslant \frac{1}{2}$，$\Delta$ 可在"与门"输出端产生一个输出脉冲，"与门"输出为 $A + 1$.

若 $\Delta < \frac{1}{2}$，"与门"的实际输出是 $A + 0$. 就是说 Δ 被电路甩掉了.

经上述分析知，乘法器的误差来源是在 $B_{(10)}$ 的分频过程中出现小数而引起的. 因为电路不能反应小数. 要么当"1"对待，要么当"0"对待.

下面举几个实际数据见表 3．加深对上述误差来源的理解．

表 3

$\frac{B\cdot A}{1024}$	电路实际输出	$\frac{B\cdot A}{1024}$ 的计算值
$\frac{512\times512}{1024}$	256	256
$\frac{1024\times792}{1024}$	792	792
$\frac{69\times512}{1024}$	35	34.5
$\frac{789\times1000}{1024}$	771	770.49

本文介绍的这种新型"平方器"和"乘法器"在数字电路中比较少见．其技巧就在于有意识地把显函数化成数列求和的形式．而电路设计的关键则是针对通项的数学形式进行电路构思．例如 $f(N)$ 的通项是 $N\cdot2^{i-1}$；$M_{(A,B)}$ 的通项是 $\frac{B_{(10)}}{2^{10-i}}\cdot A_i$．和这类数学形式相适应的电路是二进制计数器．充分利用计数器的分频作用．将各分频信号有规律地相与，求得通项．通项再经过电路求和，就可实现平方运算和乘法运算．

综上所述，我们在电路设计时，精力不应只局限在电路上．如果在数学模型上能多下一番工夫(即函数的简化)，设法建立便于电路实现的数学模型(人们往往忽视这一点)，那么由此确定的电路，其面貌全新．因此，我们应该善于运用数学工具，把丰富的电路经验和巧妙的数学处理相结合，设计一些既有特色又有实用价值的电路．本文着重指出这一点，所谓新型正是新在这一点上．这种数字式"平方器"和"乘法器"是这种设计思想的一个例子，除供电路设计者参考外，更值得推荐的是用以活跃设计思想．

四、应 用

生产过程自动化提出许多非线性处理及运算问题，其中包括检测仪表的信息处理．计算机虽然有较强的计算、处理和控制功能，但在有些情况下使用它还是嫌贵．譬如用于现场的检测仪表，既分散又数量多，不适合采用计算机进行信息处理．当前工业生产迫切需要计量流体的质量流量，如天燃气输气工程及油田输油管线．"数字式质量流量计算器"就是为适应这一要求而研制的．它作为一个专用计算装置，把振筒式密度计和体积流量计(涡街流量计及涡轮流量计)的频率信号进行非线性处理和乘法运算，构成"组合式质量流量计"．见图 6．

本文研究的"平方器"和"乘法器"较成功地用到"数字式质量流量计算器"的设计中，

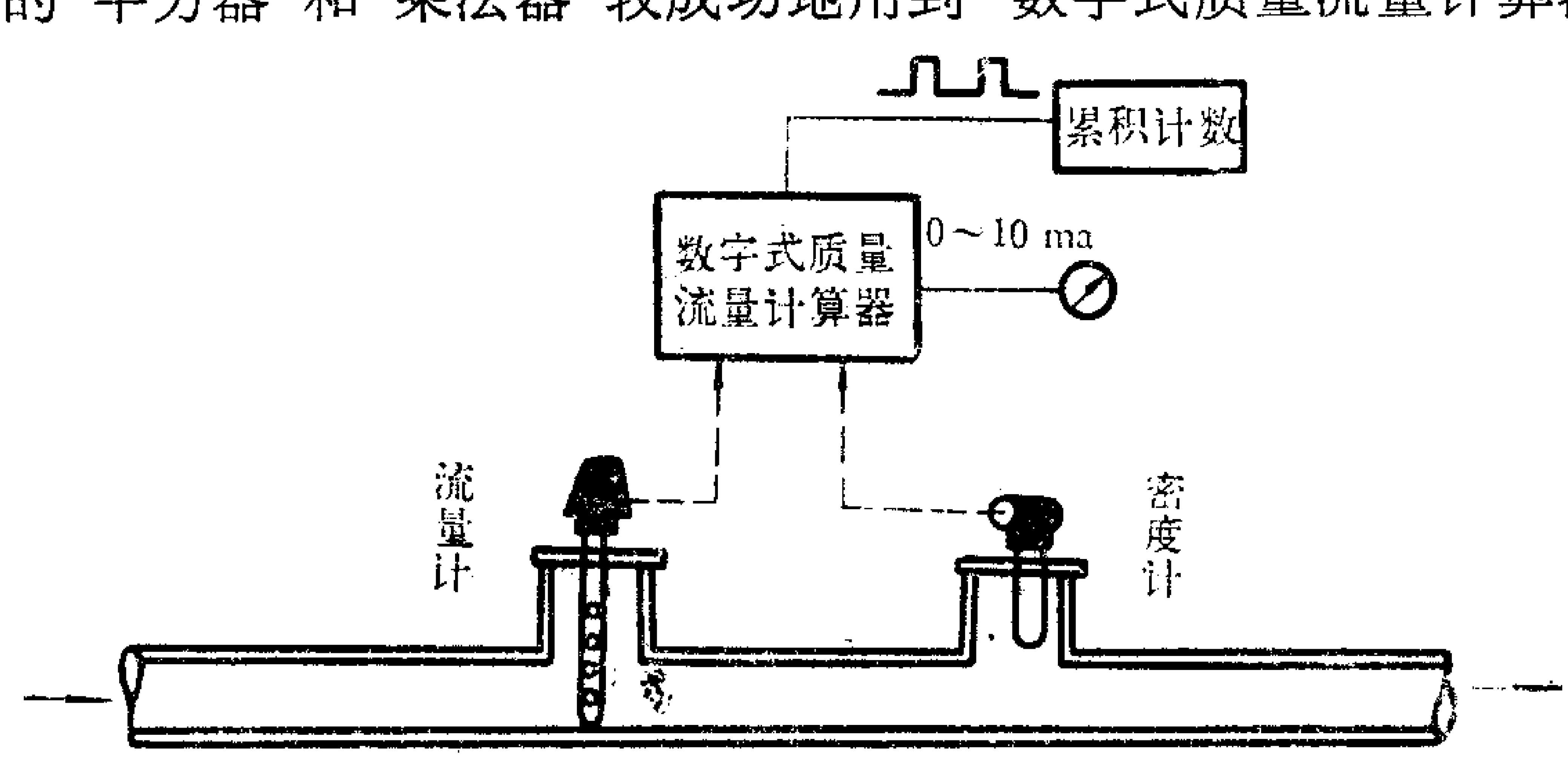

图 6 组合式质量流量计原理图

不仅形式新颖，精度也高.

1. 数字式质量流量计算器的主要功能:

因为振筒式密度计的输出频率和密度呈非线性关系

$$T=\sqrt{\frac{\rho+K_1\cdot K_2}{K_1}} \tag{18}$$

式中: T 表示密度计输出频率的周期.

ρ 表示被测流体的密度.

由 (18) 式确定的反函数为

$$\rho=K_1T^2-K_1K_2 \tag{19}$$

根据 (19) 式设计反函数发生器，便可对非线性函数 (18) 进行线性化. 其数学基础为: 直接函数的自变量是由该函数所确定的反函数[2].

譬如 $T_{(\rho)}$ 是直接函数，其中 ρ 是自变量，由它确定的反函数为

$$\rho_{(T)}=K_1T^2-K_1K_2.$$

因此，通过 $K_1T^2-K_1\cdot K_2$ 的运算求得被测量 ρ，其解题程序如下:

1) 周期倍乘: $\sqrt{K_1'}\cdot T$

2) 平方运算: $(\sqrt{K_1'}T)^2\cdot\xi=K_1T^2$

3) 减法运算: $K_1T^2-K_1K_2$

“计算器”的第二个主要功能是通过密度和体积流量相乘而得到的质量流量为:

$$M=\rho\cdot Q_V \tag{20}$$

对时间 t 的累积质量流量为

$$M_t=\rho\cdot Q_V\cdot t \tag{21}$$

2. “计算器”的工作原理

“计算器”的原理框图示于图 7. 当周期为 T 的密度信号送入“计算器”时，便由倍乘器产生以 $G=\sqrt{K_1'}\cdot T$ 为周期的脉冲信号. 周期倍乘器是由 12 bit 可变量程计数器组成. 事先考虑到平方器的衰减作用，故使倍乘系数 $K_1'=\xi\cdot K_1$ (ξ 是平方器的衰减系数). 周期为 G 的脉冲经延迟环节形成节拍脉冲，作为求密度函数的程序指令.

计算器的各种运算，在机器内均是通过对脉冲数的运算实现的. 选时钟频率 $f_c=$ 20KC，在一个复位周期内 13 bit 计数器的计数脉冲数 m 与复位周期 G 成正比:

$$m=G\cdot f_c \tag{22}$$

平方器的输出脉冲数为

$$m^2\cdot\xi=K_1\cdot T^2\cdot f_c^2 \tag{23}$$

减法器是一个 10 bit 二进制计数器，在计数之前将 $K_1\cdot K_2$ 对应的机器数 Zero 以补码的形式置入计数器中，用被减数加减数的补数实现减法运算

$$N_\rho=K_1T^2\cdot f_c^2+[\mathrm{Zero}]_{补} \tag{24}$$

式中 N_ρ 表示任意密度 ρ 对应的机器数. 假定最大密度 $\rho_{\max}$ 为 60 公斤/米^3，与其对应的机器数 $N_{\rho_{\max}}$ 为 1024，ρ 与 N_ρ 有以下关系:

$$\rho=\frac{N_\rho}{1024}\times 60 \tag{25}$$

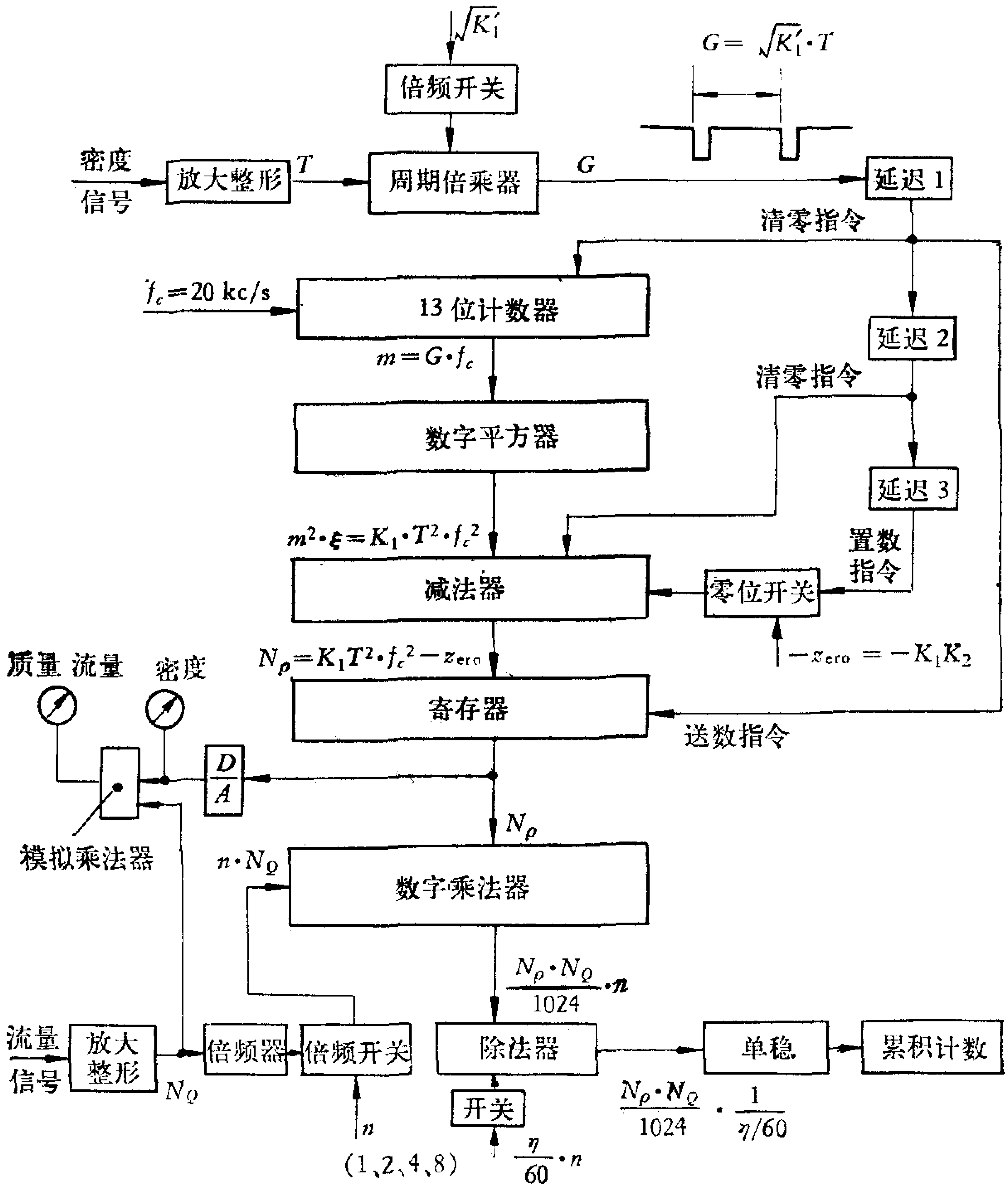

图 7　质量流量计算器框图

在进行乘法运算之前，将二进制密度信息 $N_{\rho(2)}$ 并行存入 10 bit 寄存器内，作为被乘数参加运算．体积流量以频率信号的形式 f_Q 送入乘法器，在累积时间 t 内流量脉冲数为

$$N_Q = Q_V\cdot\eta\cdot t \tag{26}$$

式中 η 称作仪表系数且 $f_Q=Q_V\cdot\eta$．η 的单位为（脉冲数/米^3）由（26）式推出：

$$Q_V=\frac{N_Q}{\eta\cdot t} \tag{27}$$

将（25），（27）代入（21）式，得累积质量流量 M_t 为：

$$M_t=\frac{N_\rho}{1024}\times 60\times\frac{N_Q}{\eta}$$

$$M_t=\frac{N_\rho\cdot N_Q}{1024}\times\frac{1}{\frac{\eta}{60}} \tag{28}$$

乘法器的输出是 $\frac{N_\rho\cdot N_Q}{1024}$，与（28）式相比较知：必须将乘法器的输出再缩小 $\eta/60$ 倍才是在时间 t 内的累积质量流量 M_t．为此“计算器”内还须备有除法器．当 ρ_{max} 和 η 变动

时，可通过“计算器”的拨盘开关重新设定．除法器的输出脉冲数代表 M_t，并由六位机电计数器累积计数．

为了调节、指示和记录的需要，“计算器”还增设了模拟输出部分：

1）通过数/模转换器，将二进制密度信息转换为 0—10mA 的直流电流．

2）模拟乘法器将质量流量的瞬时值以 0—10 mA 直流电流形式由电流表指示．

数字式质量流量计算器可用于组成气体质量流量计，也可用来组成液体质量流量计．就这个意义而言它具有一定的通用性．目前该仪表已研制成功，经现场运行，性能、指标均满足要求．

参 考 文 献

[1] В. И. Смирнов, 高等数学教程，第二分册，商务印书馆 (1954)，305—307.
[2] В. И. Смирнов, 高等数学教程，第一分册，商务印书馆 (1954)，29—30.

THE STUDY OF A NEW TYPE OF SQUARER AND MULTIPLIER AND THEIR APPLICATION

Han Zhen-ge
(*Chongqing Institute of Industrical Automation Instruments*)

Abstract

This paper discusses a mathematic method which trasforms the operation of squarer and multiplieation into the summation of numerical sequence. By means of the frequency divided counting, a new type of "squarer" and "multiplier" are developed, and apply them to the design of the digital mass-flow calculater.