

# 用模糊集合理论设计一类控制器\*

李宝绶 刘志俊

(北京控制工程研究所)

## 摘 要

本文阐述把模糊集合理论用于设计一类缺乏精确数学模型的控制器。在 DJS-130 数字机上,用 BASIC 语言实现了模糊算法。对模糊控制器的一些特性进行了数字仿真,与 PI 控制器进行了比较。数字仿真的结果表明,模糊控制器对单位阶跃响应具有速度较快,精度较高以及对参数变化不敏感等优点。用小型数字机,特别是微型计算机作为控制器,可以实现模糊控制系统的联机实时控制和人机对话。

对于一类缺乏精确数学模型的被控对象,可以用模糊集合<sup>[1]</sup>理论,总结人对系统的操作和控制的经验,用模糊条件语句写出控制规则,也能设计比较理想的控制系统。本文阐述如何把模糊集合理论用于自动控制领域,设计一类缺乏精确数学模型的控制器。先用 BASIC 语言实现模糊算法,在 DJS-130 数字机上计算出控制表,然后用连续系统的数字仿真方法,研究典型对象的模糊控制器性能,并与常用的比例加积分控制器(即 PI 控制器)进行了比较。文中给出了数字仿真的计算结果。

## 一、基本概念和运算规则

以下简要介绍在处理控制问题时要用到的基本概念和运算规则,详细论述可参看[1, 2,3]。

设  $U$  是一个点空间,  $U$  中的点用  $x$  标记,记作  $U = \{x\}$ 。集合  $A$  是  $U$  中的模糊集合,是指集合  $A$  的性质由  $U$  中在闭区间  $[0, 1]$  上取值的函数  $\mu_A(x)$  描述。函数  $\mu_A(x)$  称为模糊集合  $A$  的从属函数。不同的  $\mu_A(x)$  值描述了点  $x$  从属于模糊集合  $A$  的程度。当  $\mu_A(x)$  取 0 和 1 这两个值时,便得到经典集合论中的特殊情形。

模糊集合  $A$  的“补”记作  $\bar{A}$ , 它定义为

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in U \quad (1)$$

其中  $\forall x \in U$  是所有  $x$  属于  $U$  的简写。

模糊集合  $A$  和  $B$  的“并”用  $A + B$  表示,它定义为

$$\mu_{A+B}(x) = \max \{ \mu_A(x); \mu_B(x) \}, \quad \forall x \in U. \quad (2)$$

模糊集合  $A$  和  $B$  的“交”用  $A \cdot B$  表示,它定义为

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \min \{ \mu_A(x); \mu_B(x) \}. \quad \forall x \in U. \quad (3)$$

\* 本文曾在 1979 年 4 月全国空间控制技术学术会议上宣读。本文修改稿于 1979 年 6 月 30 日收到。

在模糊算法<sup>[3]</sup>中，“补”、“并”和“交”分别对应于连接词“NOT”、“OR”和“AND”。

设  $A$  和  $B$  分别是  $U$  和  $V$  中的模糊集合，则  $A$  和  $B$  的笛卡尔积定义为

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min \{ \mu_A(x); \mu_B(y) \}, \quad \forall x \in U, y \in V \quad (4)$$

通常把  $A \times B$  称为由  $U$  到  $V$  的模糊关系。

若  $R$  是由  $U$  到  $V$  的模糊关系，而  $A$  是  $U$  中的模糊集合，则由  $A$  通过  $R$  导出对应于  $V$  中的模糊集合  $B$  由  $R$  和  $A$  的组合确定，定义为

$$\mu_B(y) = \max_x \min \{ \mu_A(x); \mu_{A \times B}(x, y) \}, \quad (5)$$

简写成  $B = A \circ R$ 。

如果用模糊集合给变量赋值，则称为模糊变量。若  $A$  和  $B$  均为模糊变量，则把 if  $A$  then  $B$  称为模糊条件语句<sup>[3]</sup>，它描述了两个模糊变量之间的模糊关系，即

$$\text{if } A \text{ then } B = A \times B. \quad (6)$$

更一般的情形，如果模糊变量  $A$  的值  $A_1, A_2, \dots, A_n$  均为  $U$  的模糊集合，而模糊变量  $B$  的值  $B_1, B_2, \dots, B_n$  均为  $V$  的模糊集合，则 if  $A$  then  $B$  的关系可以写成

$$\begin{aligned} & \text{if } A_1 \text{ then } B_1 \text{ OR if } A_2 \text{ then } B_2 \text{ OR } \dots \text{ OR if } A_n \text{ then } B_n \\ & = A_1 \times B_1 + A_2 \times B_2 + \dots + A_n \times B_n. \end{aligned} \quad (7)$$

其中，“+”表示并，不是通常的算术和。通常把(7)式那样一串模糊条件语句称为模糊算法。

## 二、用于设计一类控制器

一个缺乏精确数学模型的被控对象，很难用现有的控制理论来处理。但人的智能对复杂现象的分析和判断的能力是很强的，特别是有经验的操作人员，通过对系统的操作和控制，总是可以总结出一套控制规则。应用模糊集合理论，把这些规则写成一串模糊条件语句，事实上便构成一个模糊的模型。利用这个模型可以设计出比较理想的控制器。

现在考虑一类消除对象输出误差的问题。假定消除误差的方法由图1给出。图1中的误差  $E$ 、误差变化  $EC$  (即现时刻误差减去前一刻的误差) 以及控制量  $u$  都是模糊变量，所取的值 NB, NM, NS, O, PS, PM, PB (对于  $E$  还进一步区分 NO 和 PO) 都是  $E, EC$  和  $u$  的模糊集合。图1的规则可以写成下列模糊条件语句：

1. if  $E = \text{NB OR NM AND } EC = \text{NB OR NM then } u = \text{PB}$   
OR  
2. if  $E = \text{NB OR NM AND } EC = \text{NS OR O then } u = \text{PB}$

误差的变化:  $EC$

	NB	NM	NS	0	PS	PM	PB
NB	PB				PM		0
NM			PM		0		NS
NS				PM			
NO	PM		PS	0	NS		NM
PO							
PS	PS		0		NM		
PM							
PB	0	NM				NB	

图1 根据系统输出的误差和误差的变化来消除误差的模糊控制规则。

P——Positive; N——Negative; B——Big; M——Medium; S——Small.

OR

3. if  $E = NB$  OR  $NM$  AND  $EC = PS$  then  $u = PM$

OR

4. if  $E = NB$  OR  $NM$  AND  $EC = PM$  OR  $PB$  then  $u = O$

OR

5. if  $E = NS$  AND  $EC = NB$  OR  $NM$  then  $u = PM$

OR

6. if  $E = NS$  AND  $EC = NS$  OR  $O$  then  $u = PM$

OR

7. if  $E = NS$  AND  $EC = PS$  then  $u = O$

OR

8. if  $E = NS$  AND  $EC = PM$  OR  $PB$  then  $u = NS$

OR

9. if  $E = NO$  OR  $PO$  AND  $EC = NB$  OR  $NM$  then  $u = PM$

OR

10. if  $E = NO$  OR  $PO$  AND  $EC = NS$  then  $u = PS$

OR

11. if  $E = NO$  OR  $PO$  AND  $EC = O$  then  $u = O$

OR

12. if  $E = NO$  OR  $PO$  AND  $EC = PS$  then  $u = NS$

OR

13. if  $E = NO$  OR  $PO$  AND  $EC = PM$  OR  $PB$  then  $u = NM$

OR

14. if  $E = PS$  AND  $EC = NB$  OR  $NM$  then  $u = PS$

OR

15. if  $E = PS$  AND  $EC = NS$  then  $u = O$

OR

16. if  $E = PS$  AND  $EC = O$  OR  $PS$  then  $u = NM$

OR

17. if  $E = PS$  AND  $EC = PM$  OR  $PB$  then  $u = NM$

OR

18. if  $E = PM$  OR  $PB$  AND  $EC = NB$  OR  $NM$  then  $u = O$

OR

19. if  $E = PM$  OR  $PB$  AND  $EC = NS$  then  $u = NM$

OR

20. if  $E = PM$  OR  $PB$  AND  $EC = O$  OR  $PS$  then  $u = NB$

OR

21. if  $E = PM$  OR  $PB$  AND  $EC = PM$  OR  $PB$  then  $u = NB$



以上 21 条模糊控制规则便构成了描述控制过程的模糊算法,换句话说,也就是一个模糊模型.这种模型可以描述一类对象的控制规律,例如,锅炉的压力与加热的关系;汽轮机转速与阀门开度的关系;反应堆的热交换关系;卫星的姿态与作用力的关系;飞机或轮船的航向与舵的关系等等.

为了便于使用短字长(比如说 4 位字长)的微型计算机,我们把误差  $E$  的变化分为 14 个等级,其中包括  $-0$  (即误差从小于 0 方向变为 0) 和  $+0$  (即误差从大于 0 方向变为 0), 而把  $EC$  和  $u$  的变化分别分为 13 和 15 个等级,即空间  $U$  分别由 14, 13 和 15 个点构成.模糊变量  $E$ ,  $EC$  和  $u$  的赋值表是根据实际情况给出的,为了便于分析,我们假定如表 1, 2, 3 所示.

表 1 模糊变量  $E$  的赋值表

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1.0
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2
PS	0	0	0	0	0	0	0	0.3	0.8	1.0	0.5	0.1	0	0
PO	0	0	0	0	0	0	0	1.0	0.6	0.1	0	0	0	0
NO	0	0	0	0	0.1	0.6	1.0	0	0	0	0	0	0	0
NS	0	0	0.1	0.5	1.0	0.8	0.3	0	0	0	0	0	0	0
NM	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	1.0	0.8	0.4	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 2 模糊变量  $EC$  的赋值表

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1.0
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2
PS	0	0	0	0	0	0	0	0.9	1.0	0.7	0.2	0	0
O	0	0	0	0	0	0.5	1.0	0.5	0	0	0	0	0
NS	0	0	0.2	0.7	1.0	0.9	0	0	0	0	0	0	0
NM	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	1.0	0.8	0.4	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

应用上面叙述的模糊集合的运算规则,先由实际测量到的  $E$  算出  $EC$ ,再由第一条控制规则可以求出

$$u_1 = E \circ [(NB_E + NM_E) \times PB_u] \cdot EC \circ [(NB_{EC} + NM_{EC}) \times PB_u]. \quad (8)$$

其中,“ $\circ$ ”,“ $\times$ ”,“ $+$ ”和“ $\cdot$ ”分别表示组合、笛卡尔积、并和交等运算.但是  $E$  和  $EC$  都是实际测量到的确定数值,因此不是模糊的.它的从属函数值除了对应于所测量到的等级是 1 以外,其余的值都是零.这样(8)式的运算可以大大简化.

表3 模糊变量  $u$  的赋值表

	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7
PB	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1.0
PM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0
PS	0	0	0	0	0	0	0	0.4	1.0	0.8	0.4	0.1	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0.5	1.0	0.5	0	0	0	0	0	0
NS	0	0	0	0.1	0.4	0.8	1.0	0.4	0	0	0	0	0	0	0
NM	0	0.2	0.7	1.0	0.7	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
NB	1.0	0.8	0.4	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

现在假定测量到的误差  $E$  为第  $i$  等级,由  $E$  算出的  $EC$  为第  $j$  等级,则(8)式的运算可以简化为

$$u_1 = \min_x \{ \max [\mu_{NB_E}(i); \mu_{NM_E}(i)]; \max [\mu_{NB_{EC}}(j); \mu_{NM_{EC}}(j)]; \mu_{PB_u}(x) \}. \quad (9)$$

其中,  $\mu_{NB_E}(i), \mu_{NM_E}(i)$  是模糊集合  $NB_E$  和  $NM_E$  第  $i$  个元素的从属函数值,而  $\mu_{NB_{EC}}(j)$  和  $\mu_{NM_{EC}}(j)$  是模糊集合  $NB_{EC}$  和  $NM_{EC}$  第  $j$  个元素的从属函数值.

用同样的方法,可求出  $u_2, u_3, \dots, u_{21}$ . 根据(7)式,控制  $u$  为

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_{21}. \quad (10)$$

(10)式表明,控制  $u$  是一个模糊集合,然而实际作用在对象上的控制量是确切的,不可能是模糊的. 为了求得一个确定的控制量,就必须从模糊集合  $u$  中选择一个合适的控制等级. 选择的方法基本上有两种:(1)取从属函数曲线峰值对应的等级的平均值;(2)取从属函数曲线下面积的平分点所对应的等级.

显然(9)式和(10)式的运算都是一些逻辑运算,特别适合用数字计算机来完成. 但每测量一次  $E$  都要计算  $u_1, u_2, \dots, u_{21}$ , 然后再计算  $u$ , 这是很费时间的. 如果事先对不

表4 在 DJS-130 数字机上用 BASIC 语言计算出的模糊控制表

	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	
误差: $E$	-6	7	6	7	6	7	7	7	4	4	2	0	0	0
	-5	6	6	6	6	6	6	6	4	4	2	0	0	0
	-4	7	6	7	6	7	7	7	4	4	2	0	0	0
	-3	7	6	6	6	6	6	6	3	2	0	-1	-1	-1
	-2	4	4	4	5	4	4	4	1	0	0	-1	-1	-1
	-1	4	4	4	5	4	4	1	0	0	0	-3	-2	-1
	0	4	4	4	5	1	1	0	-1	-1	-1	-4	-4	-4
	+0	4	4	4	5	1	1	0	-1	-1	-1	-4	-4	-4
	+1	2	2	2	2	0	0	-1	-4	-4	-3	-4	-4	-4
	+2	1	2	1	2	0	-3	-4	-4	-4	-3	-4	-4	-4
	+3	0	0	0	0	-3	-3	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
	+4	0	0	0	-2	-4	-4	-7	-7	-7	-6	-7	-6	-7
	+5	0	0	0	-2	-4	-4	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
+6	0	0	0	-2	-4	-4	-7	-7	-7	-6	-7	-6	-7	

误差的变化:  $EC$

同  $i$  和  $j$ , 用计算机算好一个控制表格, 存储在计算机内, 每当测量到  $E$  时, 计算机只计算  $EC$ , 然后就用查表的方法, 找对应于  $E$  和  $EC$  的控制等级. 这就节省了大量的联机计算时间, 有可能实现计算机的联机实时控制和人机对话.

我们曾在 DJS-130 数字机上, 用 BASIC 语言实现上述模糊算法, 计算出控制表, 如表 4 所示. 在计算过程中, 采用第一种方法来选择控制等级.

### 三、典型对象的模糊控制器特性

我们用 BASIC 语言计算出表 4 所示的控制表以后, 就把它作为模糊控制器, 用来控制典型的对象. 为了便于和普通的控制器进行比较, 假定对象的传递函数为

$$\frac{Ke^{-\tau s}}{TS+1} \quad (11)$$

在工业上, 最常用的控制器是比例加积分控制器 ( $PI$  控制器), 如图 2 所示. 首先, 我们用连续系统的数字仿真程序<sup>[6]</sup>对  $PI$  控制器进行数字仿真, 寻找最佳参数. 我们取  $\tau = 0.64$ ,  $K = T = 1$ , 用试探方法求得  $K_p = 1$ ,  $T_s = 2$  时, 系统对单位阶跃响应的特性较好. 对这一组参数, 如果把时延  $\tau$  作一些变化, 发现系统特性对  $\tau$  的变化极其敏感. 若不重新调整参数, 系统就不能正常工作, 如图 3 所示. 其次, 我们用表 4 给出的控制表控制同样的对象, 如图 4 所示. 经过数字仿真, 用试探方法求得当  $\tau = 0.64$ , 采样时间  $t_s = 0.1$  (即每 0.1 秒控制一次)  $-0.3 \leq u \leq 2.3$  时, 系统对单位阶跃响应的特性较好. 和  $PI$  控制器相比较, 模糊控制器对单位阶跃响应具有速度较快, 超调量较小, 稳定时间较短等优点 (参看表 5 和图 5). 另一个最大的优点是对参数的变化不像  $PI$  控制器那样敏感, 当  $\tau$  从 0.64

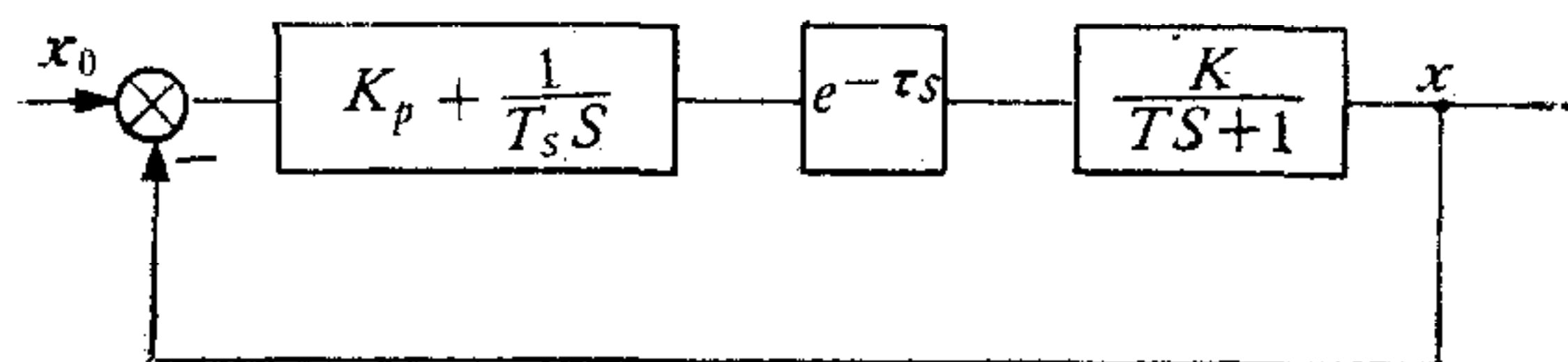


图 2  $PI$  控制器

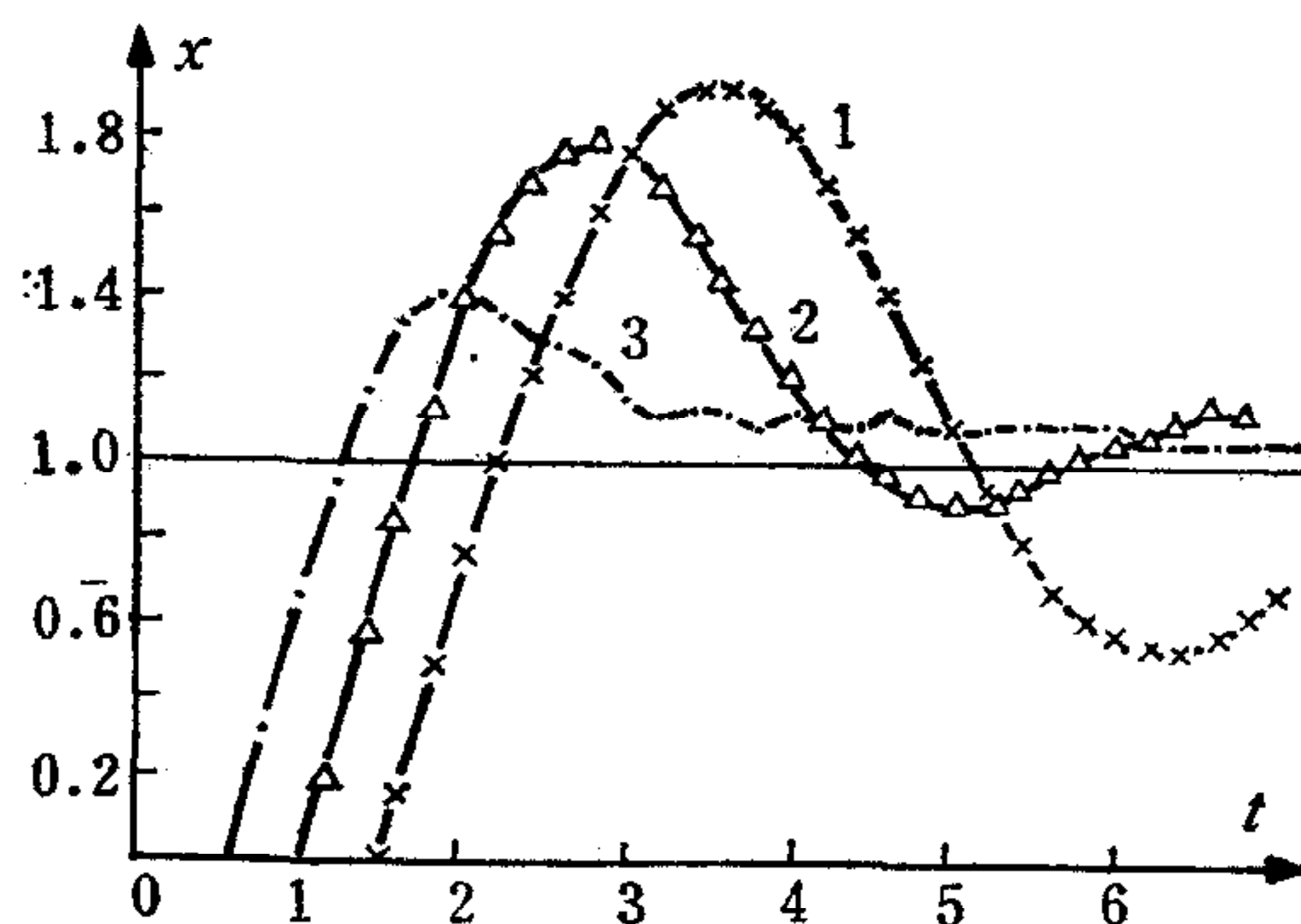


图 3 时延  $\tau$  对  $PI$  控制器特性的影响  
1.  $\tau = 1.5$ ; 2.  $\tau = 1.1$ ; 3.  $\tau = 0.64$

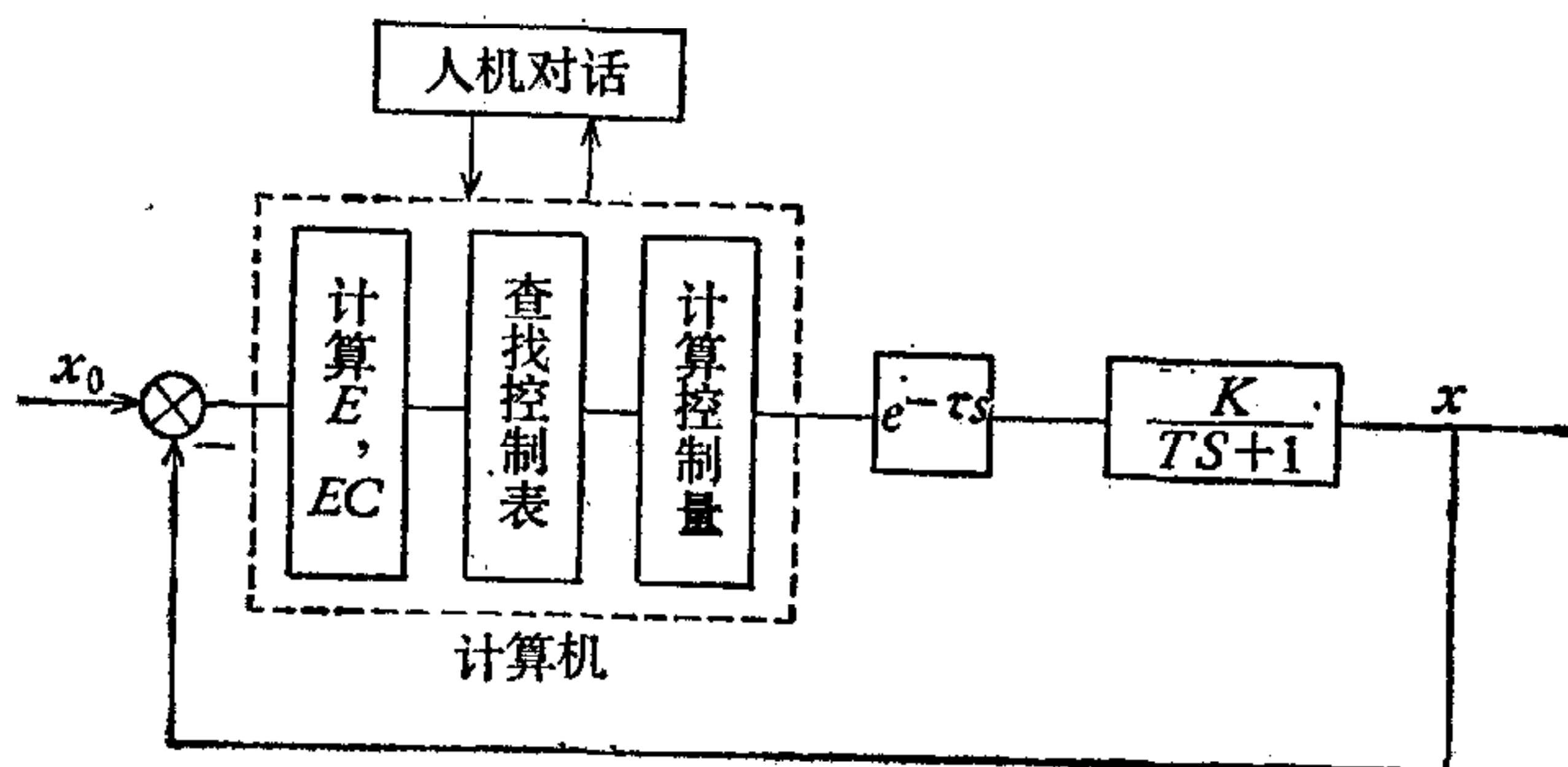


图 4 模糊控制器



变化到 1.5 时,仍然可以正常工作,如图 6 所示.

表 5 PI 控制器与模糊控制器几种性能的比较

控 制 器	时 延	最大超调量	精度达到 5% 以内的过渡过程时间
PI	0.64	40%	6.2 秒
模 糊	0.64	25%	3 秒

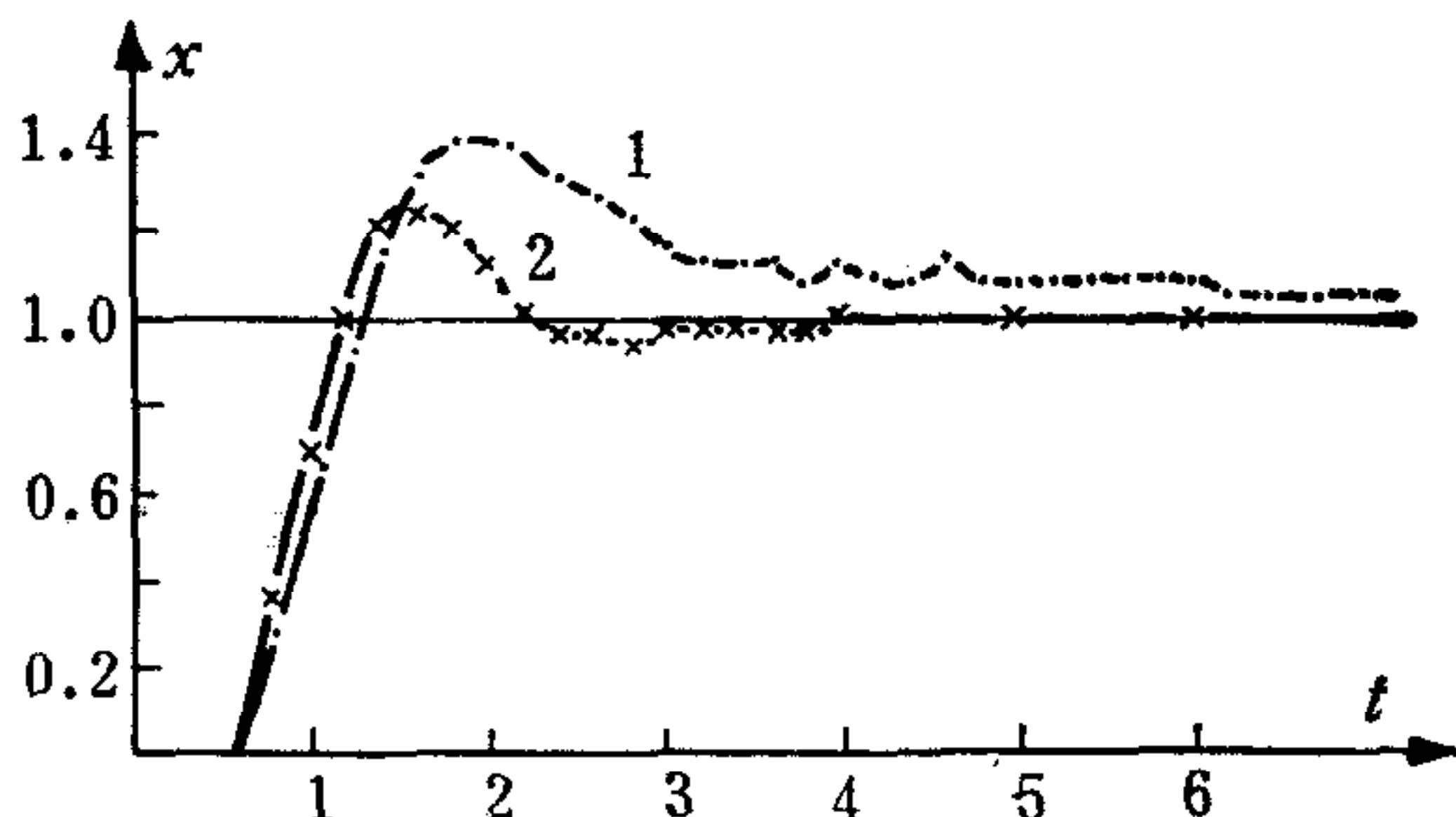


图 5 PI 控制器与模糊控制器特性的比较  
1. PI 控制  $\tau = 0.64, K_p = 1, T_s = 2,$   
2. 模糊控制  $\tau = 0.64, t_s = 0.1$

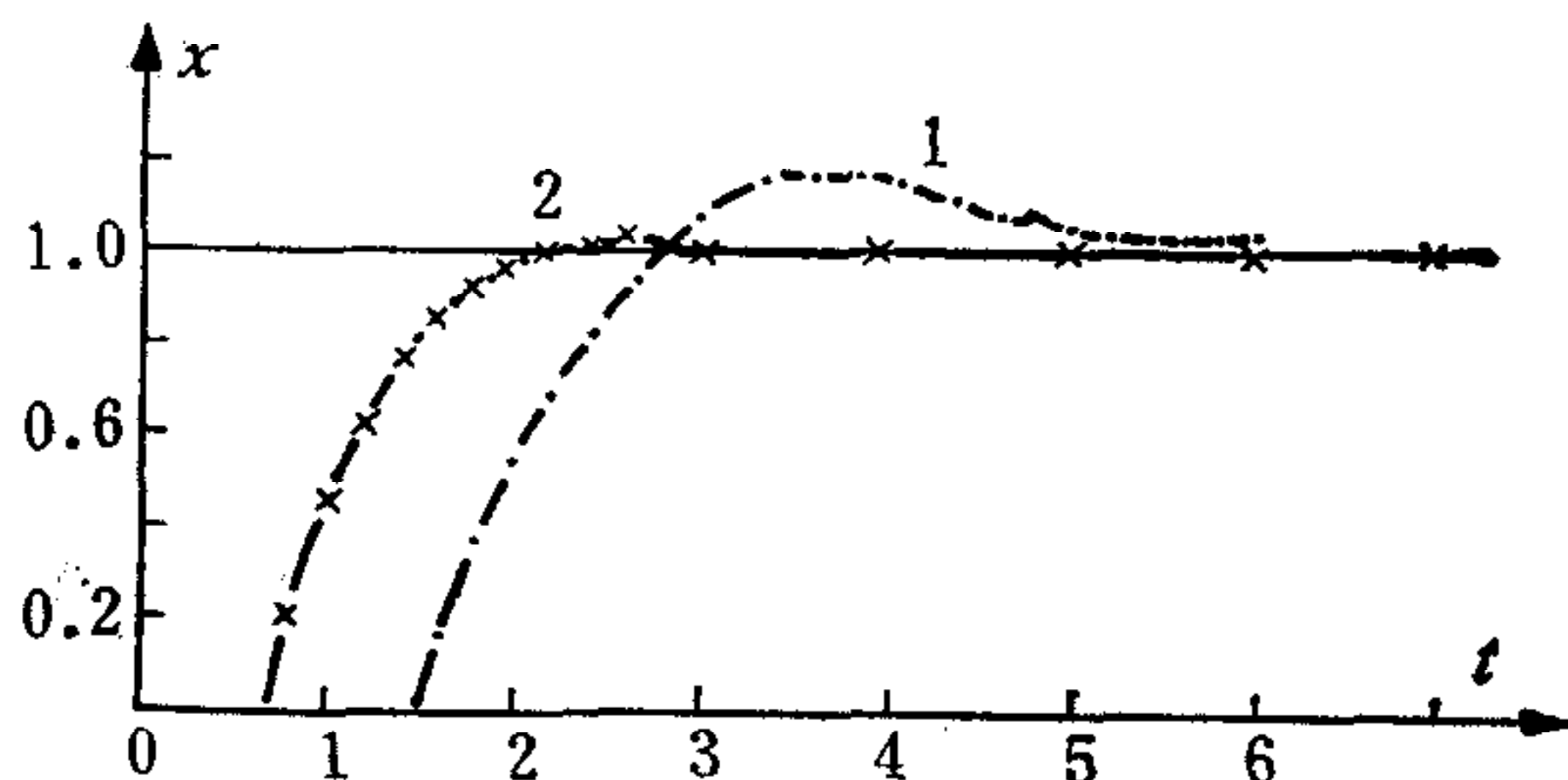


图 6 时延  $\tau$  对模糊控制器特性的影响  
1.  $\tau = 1.5;$  2.  $\tau = 0.64$

我们还用同样的控制表控制具有时延的两个积分环节的对象,数字仿真的结果由图 7 给出,采样时间为 0.2 秒.

我们使用的控制表比较粗糙,用 4 位字长的小型计算机或微处理机就能实现.字长增加,表格更加细致,效果会更好.如果用 8 位字长的微型计算机,则可以把控制等级细分为  $\pm 127$  个等级.这样构成的控制表,其控制效果就更好.因为是模糊控制,把等级分得过细也没有必要.因此,这种方法很适合用短字长的微型计算机作为系统控制用的计算机.

### 四、结 论

用模糊集合理论设计控制器时,并不要求建立被控对象的精确数学模型,而只需根据系统的模糊信息,用模糊条件语句写出控制规则,就能近似求出比较合适的控制作用.虽然信息源是模糊的,但分析的方法却是严格的,而且所得的结果也是近似于最佳的.同时,由于把计算机作为控制器的功能,最后归结为查找控制表,速度非常快,有可能实现计算机的联机实时控制,为一类缺乏精确数学模型的被控对象提供了设计和实现控制系统的另一种方法.

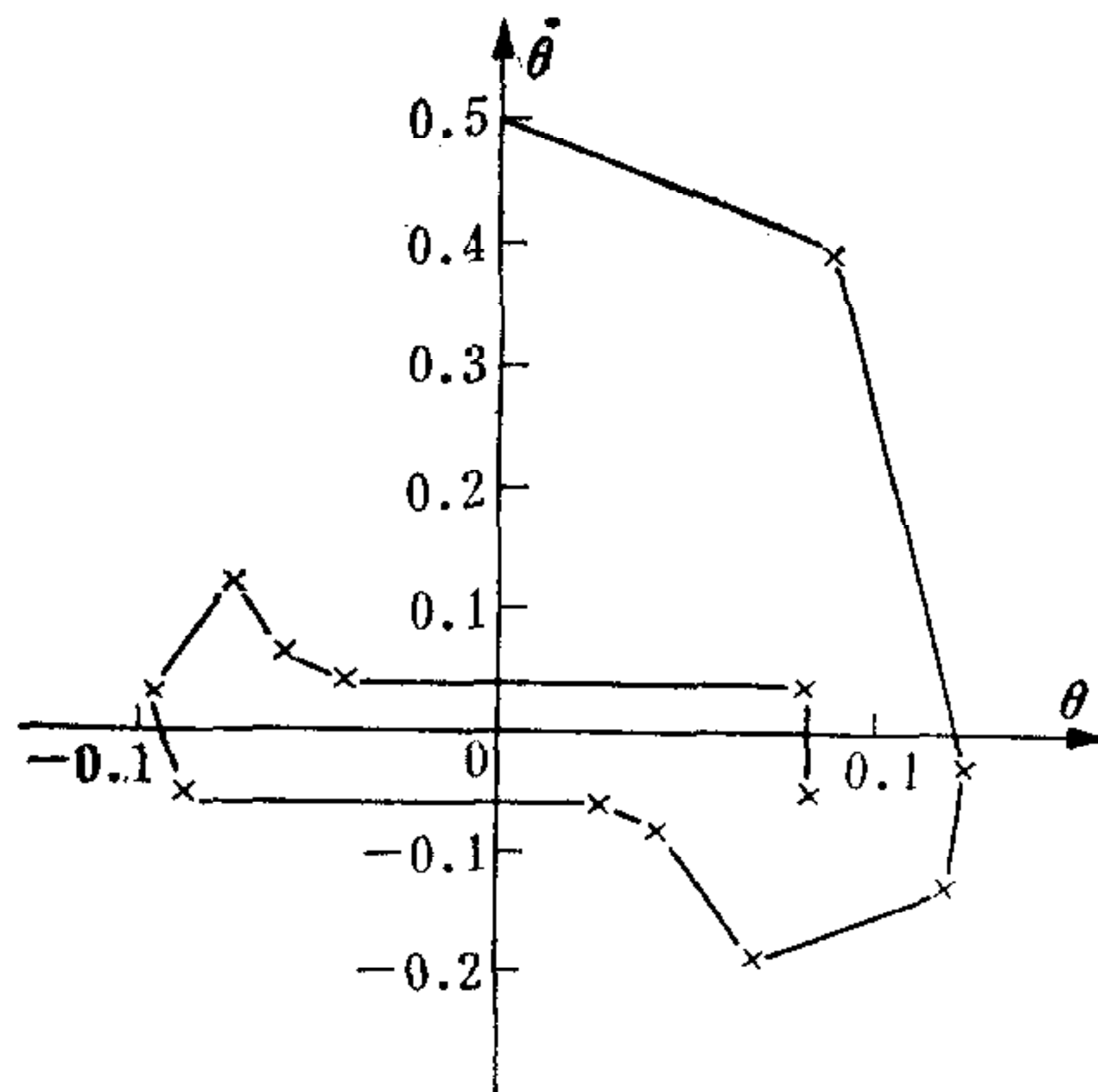


图 7 对象为两个积分环节的模糊控制结果

## 参 考 文 献

- [1] Zadeh, L. A., Fuzzy Sets, *Inform. Control*, 8(1965), 338—353.
- [2] Kaufmann, A., Introduction to Fuzzy Set Theory, Academic Press, N. Y. (1975).
- [3] Zadeh, L. A., Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes, *IEEE Trans. System Man Cybern.*, 1(1973), 28—44.
- [4] Mamdani, E. H. and Assilian. S., A Fuzzy Logic Controller for a Dynamic Plant, *Int. J. Man-machine Stud.*, 7(1975), 1—13.
- [5] Rutherford, D. A. and Bloore, C. G., The Implementation of Fuzzy Algorithms for Control, *Proc. IEEE* 64(1976), 572—573.
- [6] 刘志俊、李宝绶,连续系统的数字仿真方法,自动化学报, 5 (1979), 316—324.

## THE APPLICATION OF FUZZY SET THEORY TO THE DESIGN OF A CLASS CONTROLLERS

LI BAO-SHOU    LIU ZHI-JUN

(Beijing Institute of Control Engineering)

### ABSTRACT

The application of fuzzy set theory to the design of a class controllers which are lack of precise mathematical models is described in this paper. The fuzzy algorithm has been implemented in BASIC on DJS-130 computer. Some characteristics of fuzzy controller are simulated on digital computer and compared with PI controller. The results obtained from simulation show that the fuzzy controller has a faster step response, higher accuracy and less sensitive to parameter changes. A real time on-line fuzzy control system and man-machine interaction can be implemented by using a small digital computer, specially a microcomputer as the controller.