第6卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 6, No. 1
1980 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1980

变参数线性自动控制系统的外干扰完全补偿理论*

林 金
（北京控制工程研究所）

摘 要

本文在总结设计经验基础上提出一种高精度变参数线性系统的综合理论。利用干扰补偿或系统的相坐标和相速度多路反馈，通过解一组伏尔戴勒 I 型积分方程可以求出干扰补偿网络的脉冲过渡函数，满足变参数线性系统的“过程不变性”指标要求。利用干扰补偿或系统的相坐标和相速度多路反馈，通过解系统的共轭方程组可以求出干扰补偿的变参数控制规律，满足线性变参数系统的“终端不变性”指标要求。

引 言

近代技术的进展对高精度自动控制系统提出了日益增长的要求．大型的复杂的综合性系统不只是考虑单一的控制指标，而是对系统的多个相座标同时进行不同方式的控制，分别满足这种或那种意义上最优的指标，在系统运行的各个阶段上控制的要求也是不同的．因此，对一个综合性系统的控制精度和稳定性的研究、设计、检测、试验等方面牵涉到许多专门技术领域．本文只是我们在总结对一类具体系统的设计经验基础上提出的一种消除外干扰影响，以满足高精度指标的系统综合理论．任何系统在运行过程中不可避免地受到始终不断作用的外界干扰因素的影响，这样我们的控制对象在相空间中的运动就偏离预定的轨道或状态．对于干扰变化规律我们事先不可能准确地掌握．通过在运行过程中直接测量干扰变化规律或者利用微分方程本身作为干扰测量工具，即通过系统的相座标和相速度间接测量干扰，我们给出干扰补偿网络和权函数的理论综合方法，达到对外干扰完全补偿的目的，使系统满足“过程不变性”和“终端不变性”的指标要求．

问 题 的 提 法

我们的控制对象的特性随时间而变化，假设控制对象的运动规律由下列变参数的线性微分方程组所描述：

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j+\sum_{k=1}^{m}b_{ik}(t)u_k+f_i(t),\ (i=1,\cdots,n) \tag{1}$$

或者用向量形式

* 本文曾在中国自动化学会 1978 年年会上宣读．修改稿于 1979 年 2 月 14 日收到．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(t) \tag{1'}$$

$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量，由 n 个相座标 $(x_1, \cdots, x_n)$ 决定；$A(t)$ 为已知时间函数的 $n \times n$ 正方矩阵，反映各个相座标之间在不同时刻存在的相互作用关系；$\boldsymbol{u}$ 为 m 维控制向量 $(u_1, \cdots, u_m)$；$B(t)$ 为 $n \times m$ 长方矩阵，表征控制向量对状态向量在不同时刻的作用关系；$\boldsymbol{f}(t)$ 为 n 维干扰向量，要求 $f(t)$ 为幅值有界的正则函数.

如果 $\boldsymbol{f}(t)$ 及 $\boldsymbol{u}(t)$ 为给定的时间函数，并且已知控制对象的初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$，则 (1) 或 (1′) 唯一地决定控制对象在 n 维相空间中的轨道. 但是 $\boldsymbol{f}(t)$ 的变化规律是不由我们所掌握的，故 $\boldsymbol{x}(t)$ 受 $\boldsymbol{f}(t)$ 变化的影响，不能保持预定的轨道. 例如民航客机总是力图保持水平等高的飞行状态，但大气紊流和阵风的影响迫使飞行偏离预定的规范. 我们的任务在于设计 $\boldsymbol{u}$ 的规律，控制在相空间中的运动轨道，尽量减小以至消除干扰作用所产生的不利影响.

控制器本身(如机电、液压系统)具有本征的运动特性，如具有一定的时间常数，所以我们设计的控制器运动规律用以下微分方程组来描述:

$$\frac{du_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} d_{jk}(t)u_k + \sum_{i=1}^{n} c_{ji}(t)x_i + U_j(t), \quad j = 1, \cdots, m \tag{2}$$

或用向量形式

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = D(t)\boldsymbol{u} + C(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{U}(t) \tag{2'}$$

$D(t)$ 为 $m \times m$ 正方矩阵，反映控制器本征的运动特性和控制器座标之间的相互作用；$C(t)$ 为 $m \times n$ 长方矩阵，即通常的偏差反馈控制规律；$\boldsymbol{U}(t)$ 为我们将要讨论的补偿向量.

可以有这样的问题提法：$\boldsymbol{U}(t) = 0$，即不进行干扰补偿，对 $\boldsymbol{f}(t)$ 只加以幅值有界的限制条件

$$|\boldsymbol{f}(t)| \leqslant M$$

这样，我们将选择反馈矩阵 $C(t)$ 来使干扰造成的影响趋于最小. 例如当我们的控制泛函为第一个相坐标 $\bar{x}_1(t)$ 偏离标准轨道 $\bar{x}_1(t)$ 差值平方的积分

$$\int_{t_0}^{t_k} [x_1(t) - \bar{x}_1(t)]^2 dt$$

或者 x_1 在终端的取值 $x_1(t_k)$

$$I = I(\boldsymbol{x}(t), C(t), \boldsymbol{f}(t)).$$

每当我们已经选定反馈矩阵 $C(t)$ 后，泛函指标 I 由初始条件和干扰变化规律唯一地决定，从动态准确度考虑，我们可以针对每一个已选定的矩阵 $C(t)$ 选取最不利的干扰变化规律 $f(t)$ 使泛函 I 达到最大值

$$I = \max_{\boldsymbol{f}(t)} I(\boldsymbol{x}, C(t), \boldsymbol{f}(t))$$

这一类问题切合 Б. В. Булгаков 干扰积累理论和 Л. С. Понтрягин 极大值原理问题的提法. 这样，每一个矩阵 $C(t)$ 将对应一个最不利干扰规律造成的最大偏差

$$\max_{\boldsymbol{f}(t)} I(\boldsymbol{x}, C(t), \boldsymbol{f}(t)),$$

我们的任务是设计矩阵 $C(t)$，使这一最不利 $\boldsymbol{f}(t)$ 干扰规律造成的最大偏差趋于极小

$$I = \min_{C(t)} \max_{f(t)} I(\boldsymbol{x},\ C(t),\ \boldsymbol{f}(t))$$

这种最优化问题的提法由于我们把选择范围限制在反馈矩阵 $C(t)$ 之内，所以即使我们找到 $C(t)$ 满足了 min max 的最优化条件，但是任意变化的 $f(t)$ 规律总还是会引起一定的 I，$C(t)$ 最优化条件不能完全消除外干扰的影响．因此，我们在控制规律 (2′) 中引入干扰补偿向量 $\boldsymbol{U}(t)$．

这样，我们在充分利用选择 $C(t)$ 这一自由度来满足稳定性和精度的基本要求外，我们将通过补偿向量的引进来完全消除外干扰的影响．

过程不变性问题

把 (1′) 和 (2′) 联立起来我们就得到描绘整个系统的微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(t)$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = C(t)\boldsymbol{x} + D(t)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{U}(t),$$

或者

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{Vmatrix} = P(t)\begin{Vmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix}\boldsymbol{f}(t)\\ \boldsymbol{U}(t)\end{Vmatrix} \tag{3}$$

$$P(t) = \begin{Vmatrix}A(t) & B(t)\\ C(t) & D(t)\end{Vmatrix},$$

在我们进行补偿向量设计之前我们已经出于稳定性和精度的各种考虑选定了 $C(t)$ 矩阵，因此对我们来说在 (3) 中 $P(t)$ 是已知的 $(n+m)\times(n+m)$ 变系数矩阵．

在系统 (3) 中我们将通过 m 维控制向量 $\boldsymbol{u}$ 来控制一个 m 维的指标向量 $\boldsymbol{I}$ 使之满足过程不变性的设计要求．过程不变性要求设计 m 维补偿向量 $\boldsymbol{U}(t)$，驱动系统的状态向量在 $n+m$ 维的相空间运动，在任意干扰的作用下使指标 $\boldsymbol{I}(t)=0$

$$\boldsymbol{I}(t) = \xi(t)\begin{Vmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{u}(t)\end{Vmatrix} = 0$$

$\xi(t)$ 为给定的 $m\times(m+n)$ 指标矩阵．

初始条件 $(\boldsymbol{x}(t_0),\ \boldsymbol{u}(t_0))$ 的影响另作考虑．过程不变性的要求是指 $\boldsymbol{I}(t)$ 对干扰的不变性，系统的状态向量在相空间中的轨道将随初始条件而变化，另外在不同的规律的干扰作用下相轨道一般说来也是不同的，然而各种轨道都满足同一指标的不变性要求．

微分方程 (3) 的通解可以借助矩阵子 $\Omega_{t_0}^t(P)$ 表示[1]

$$\begin{Vmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{u}(t)\end{Vmatrix} = \Omega_{t_0}^t(P)\begin{Vmatrix}\boldsymbol{x}(t_0)\\ \boldsymbol{u}(t_0)\end{Vmatrix} + \Omega_{t_0}^t(P)\int_{t_0}^t [\Omega_{t_0}^t(P)]^{-1}\begin{Vmatrix}\boldsymbol{f}(\tau)\\ \boldsymbol{U}(\tau)\end{Vmatrix} d\tau, \tag{4}$$

矩阵子 $\Omega_{t_0}^t(P)$ 则可用乘积积分形式表示

$$\Omega_{t_0}^t(P) = \widehat{\int_{t_0}^t}(E + P\,dt) = \lim_{\Delta t_k\to 0}[E + P(\tau_n)\Delta t_n]\cdots[E + P(\tau_1)\Delta t_1],$$

近似计算时可利用公式

$$\Omega_{t_0}^t(P) = [E + P(\tau_n)\Delta t_n]\cdots[E + P(\tau_2)\Delta t_2][E + P(\tau_1)\Delta t_1] + (*)$$

或者

$$\Omega_{t_0}^t(P) = e^{P(\tau_n)\Delta t_n}\cdots e^{P(\tau_2)\Delta t_2}e^{P(\tau_1)\Delta t_1} + (*).$$

引入柯西矩阵 $G(t, \tau)$

$$G(t, \tau) = \Omega_{t_0}^t(P)[\Omega_{t_0}^\tau(P)]^{-1}$$

则系统状态由下式表示

$$\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{u}(t)\end{matrix}\right\| = G(t, t_0)\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{x}(t_0)\\ \boldsymbol{u}(t_0)\end{matrix}\right\| + \int_{t_0}^t G(t, \tau)\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{f}(\tau)\\ \boldsymbol{U}(\tau)\end{matrix}\right\| d\tau, \tag{5}$$

过程不变性指标

$$\boldsymbol{I}(t) = \xi(t)\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{u}(t)\end{matrix}\right\| = \boldsymbol{I}_0(t) + \boldsymbol{I}_1(t), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{I}_0(t) = \widetilde{G}(t, t_0)\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{x}(t_0)\\ \boldsymbol{u}(t_0)\end{matrix}\right\|, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{I}_1(t) = \int_{t_0}^t \widetilde{G}(t, \tau)\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{f}(\tau)\\ \boldsymbol{U}(\tau)\end{matrix}\right\| d\tau, \tag{8}$$

$$\widetilde{G}(t, \tau) = \xi(t)G(t, \tau). \tag{9}$$

$\widetilde{G}(t, \tau)$ 为 $m \times (n + m)$ 矩阵，$\boldsymbol{I}_0(t)$ 将另加考虑，我们现在讨论 $\boldsymbol{I}_1(t)$. 为了完全补偿外干扰的影响，满足指标 $\boldsymbol{I}_1(t)$ 对外干扰的过程不变性要求，我们引入

$$\boldsymbol{U}(\tau) = \int_{t_0}^\tau K(\tau, s)\boldsymbol{f}(s)ds \tag{10}$$

$K(\tau, s)$ 为待求的 $m \times n$ 补偿矩阵。

我们现将矩阵 (9) 改写成以下形式

$$\widetilde{G}(t, \tau) = \|\widetilde{G}_f(t, \tau)\widetilde{G}_U(t, \tau)\| \tag{11}$$

$\widetilde{G}_f(t, \tau)$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\widetilde{G}_U(t, \tau)$ 为 $m \times m$ 矩阵.

将 (10), (11) 代入 (8)

$$\boldsymbol{I}_1(t) = \int_{t_0}^t [\widetilde{G}_f(t, \tau)\boldsymbol{f}(\tau) + \widetilde{G}_U(t, \tau)\int_{t_0}^\tau K(\tau, s)\boldsymbol{f}(s)ds]d\tau$$

变换积分次序后得到

$$\boldsymbol{I}_1(t) = \int_{t_0}^t [\widetilde{G}_f(t, \tau) + \int_\tau^t \widetilde{G}_U(t, s)K(s, \tau)ds]\boldsymbol{f}(\tau)d\tau. \tag{12}$$

由于干扰向量的变化规律是任意的，所以指标向量 $\boldsymbol{I}_1(t)$ 对任意干扰的不变性，要求下列矩阵方程对所有的 t 和 τ 成立

$$\widetilde{G}_f(t, \tau) + \int_\tau^t \widetilde{G}_U(t, s)K(s, \tau)ds \equiv 0 \tag{13}$$

矩阵恒等于零的条件相当于每个矩阵元素恒等于零，所以 (13) 决定 $m \times n$ 个伏尔戴勒 I 型积分方程组，由此可以求得待定的 $m \times n$ 补偿矩阵 $K(t, \tau)$.

由于

$$\widetilde{G}_f(\tau, \tau) = \xi(\tau)G(\tau, \tau) = \xi(\tau) \not\equiv 0$$

所以积分方程的解 $K(t, \tau)$ 可能存在于广义函数类中。

干扰或者直接测量，或者可以通过系统的相座标和相速度间接测量

$$f(t)=\dot{x}-A(t)x-B(t)u \tag{14}$$

这样得到的控制规律形式为

$$\frac{du}{dt}=C(t)x+D(t)u+\int_{t_0}^{t}K(t,\tau)[\dot{x}-A(\tau)x-B(\tau)u]d\tau \tag{15}$$

如果系统的初始条件并不处于我们所需要的状态，则我们除设计对干扰的补偿向量外，还需要设计在某种意义上最优的过渡轨道，将系统的初始状态引渡到给定的状态．对于线性系统满足这种最优化问题提法的控制必定是"继电器式"的，当这种"继电器式"的最优控制把系统引导到给定状态之后，由于系统处于不断作用的干扰影响下，所以干扰将不断使系统偏离给定的状态．这时"继电器式"的控制将失去其"最优"的意义，在这种情况下最切合问题实质的提法是对干扰影响的完全补偿，使系统状态满足不变性要求，绝对稳定在给定的指标上．可见对于一个复杂的综合性系统不仅同时要求对多种指标进行控制，而且在运行的不同阶段上要求多种方式的控制．

终端不变性问题

重要的一类问题只要求控制系统在终端时刻的状态，指标向量取决于系统在终端时刻 t_k 的相座标．终端不变性问题的提法是要求完全补偿外干扰在整个运行过程中所累积的对终端指标 $I(t_k)$ 的影响．自然可以把终端不变性的问题归结为过程不变性的问题，若我们可以使系统的某一个座标在运动过程的每时每刻都是保持不变的，则在终端时刻自然也是不变的．但我们看到，求出满足过程不变性要求的补偿网络涉及需要解伏尔戴勒 I 型积分方程的问题．所以如果当任务只要求我们控制终端的指标时，我们尽可能切合问题的提法，简化系统的设计．例如，运载火箭要将卫星送入预定的轨道面，对运载火箭控制系统的要求完全没有必要使轨道倾角在主动段的每一时刻都严格保持为不变的（过程不变性），而恰恰是要求卫星在进入轨道时刻亦即运载火箭终止工作的终端时刻的轨道倾角是严格不变的，这就是终端不变性问题的提法．满足终端不变性要求的设计比过程不变性的设计难度和计算量都显著降低．

系统在 t_k 时刻的状态由下式表示

$$\left\|\begin{matrix}x(t_k)\\ u(t_k)\end{matrix}\right\|=G(t_k,t_0)\left\|\begin{matrix}x(t_0)\\ u(t_0)\end{matrix}\right\|+\int_{t_0}^{t_k}G(t_k,\tau)\left\|\begin{matrix}f(\tau)\\ U(\tau)\end{matrix}\right\|d\tau \tag{16}$$

这里我们感兴趣的是在整个控制过程中不同时刻所加的干扰作用和控制作用引起的在 t_k 时刻系统的响应 $G_{ij}(t_k,\tau)$．

$G_{ij}(t_k,\tau)$ 满足矩阵方程

$$\frac{d}{d\tau}G^*(t_k,\tau)=-P^*(\tau)G^*(t_k,\tau) \tag{17}$$

$P^*(\tau)$ 为 $P(\tau)=\left\|\begin{matrix}A(\tau) & B(\tau)\\ C(\tau) & D(\tau)\end{matrix}\right\|$ 的转置矩阵，$G^*(t_k,\tau)$ 为 $G(t_k,\tau)$ 之转置[1)]

1)以下带＊者均表示转置．

终端条件

$$G^*(t_k, t_k) = E. \tag{18}$$

E 为单位矩阵.

终端指标

$$\boldsymbol{I}(t_k) = \boldsymbol{I}_0(t_k) + \boldsymbol{I}_1(t_k), \tag{19}$$

$$\boldsymbol{I}_0(t_k) = \tilde{G}(t_k, t_0) \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{x}(t_0) \\ \boldsymbol{u}(t_0) \end{matrix} \right\|, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{I}_1(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} \tilde{G}(t_k, \tau) \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{f}(\tau) \\ \boldsymbol{U}(\tau) \end{matrix} \right\| d\tau, \tag{21}$$

$$\tilde{G}(t_k, \tau) = \xi_k G(t_k, \tau), \tag{22}$$

ξ_k 为 $m \times (n + m)$ 终端指标矩阵.

显然, $\tilde{G}^*(t_k, \tau)$ 满足共轭矩阵方程

$$\frac{d\tilde{G}^*(t_k, \tau)}{d\tau} = -P^*(\tau)\tilde{G}^*(t_k, \tau), \tag{23}$$

终端条件

$$\tilde{G}^*(t_k, t_k) = \xi_k^*. \tag{24}$$

初始条件的影响将另作处理.

干扰向量及补偿向量的影响都反映在 (21) 中,现将矩阵 $\tilde{G}(t_k, \tau)$ 改写成以下形式

$$\tilde{G}(t_k, \tau) = \| \tilde{G}_f(t_k, \tau) \tilde{G}_U(t_k, \tau) \| \tag{25}$$

$\tilde{G}_f(t_k, \tau)$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\tilde{G}_U(t_k, \tau)$ 为 $m \times m$ 矩阵.

于是

$$\boldsymbol{I}_1(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} [\tilde{G}_f(t_k, \tau)\boldsymbol{f}(\tau) + \tilde{G}_U(t_k, \tau)\boldsymbol{U}(\tau)] d\tau,$$

选择补偿向量形式如下

$$\boldsymbol{U}(\tau) = K(\tau)\boldsymbol{f}(\tau), \tag{26}$$

$K(\tau)$ 为待求的 $m \times n$ 补偿矩阵

$$\boldsymbol{I}_1(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} [\tilde{G}_f(t_k, \tau) + \tilde{G}_U(t_k, \tau)K(\tau)]\boldsymbol{f}(\tau) d\tau, \tag{27}$$

由此得到对任意外干扰 $\boldsymbol{f}(\tau)$ 的完全补偿条件

$$\tilde{G}_f(t_k, \tau) + \tilde{G}_U(t_k, \tau)K(\tau) \equiv 0, \tag{28}$$

从以上条件我们求得补偿矩阵

$$K(\tau) = -[\tilde{G}_U(t_k, \tau)]^{-1}\tilde{G}_f(t_k, \tau), \tag{29}$$

干扰测量通过 (14), 我们得到将相速度和相座标通过变系数矩阵反馈满足终端不变性条件的控制规律

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = K(t)\dot{\boldsymbol{x}} + R(t)\boldsymbol{x} + S(t)\boldsymbol{u} \tag{30}$$

$$R(t) = C(t) - K(t)A(t)$$

$$S(t) = D(t) - K(t)B(t).$$

初始条件的影响可以在控制规律中加一个常值的补偿向量 $\boldsymbol{U}_0$ 消去，$\boldsymbol{U}_0$ 由下式决定

$$\boldsymbol{U}_0 = -\left[\int_{t_0}^{t_k} \tilde{G}_U(t_k, \tau)d\tau\right]^{-1} \tilde{G}(t_k, t_0)\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{x}(t_0)\\ \boldsymbol{u}(t_0)\end{matrix}\right\|. \tag{31}$$

参　考　文　献

[1] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц ГИТТЛ, (1953).
[2] 钱学森，工程控制论，科学出版社，(1958).
[3] Теория инвариантности и её применения в автоматических устройствах, труды совещания, Москва, (1959).

THEORY OF FULL COMPENSATION OF EXTERNAL PERTURBATION FOR THE TIME-VARYING PARAMETER LINEAR SYSTEMS

Lin Jin
(*Beijing Institute of Control Engineering*)

Abstract

In this paper a theory for designing high-precision time-varying parameter linear systems is discussed. By means of perturbation compensation or multiple feedback of phase coordinates and phase velocities through solving a set of Volterra integral equations we may get the impulse response functions of the perturbation compensation networks, satisfying the condition of "process invariance". By solving the adjoint equations of the system we may get the control law of perturbation compensation, satisfying the condition of "terminal invariance".