第26卷 第3期 2000年5月
自动化学报 ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 26, No. 3 May, 2000

短文

工业过程广义稳态优化控制算法的收敛性研究[1)]

罗旭光* 万百五
(西安交通大学系统工程研究所 西安 710049)
(* E-mail: lxgnet@netease.com)

摘 要 根据Zangwill全局收敛理论,定义了求解工业过程广义稳态优化控制问题的算法赖以依托的点-集映射关系;在此基础上,证明了算法的解序列能够使得工业过程广义稳态优化控制问题的目标函数在其相应集合上是一个Zangwill函数,从而证明了工业过程广义稳态优化控制算法具有全局收敛性.

关键词 工业过程广义稳态,点-集映射,Zangwill函数,全局收敛性.

RESEARCH ON THE CONVERGENCE OF GENERALIZED STEADY-STATE OPTIMIZING CONTROL ALGORITHM FOR INDUSTRIAL PROCESSES

LUO Xuguang WAN Baiwu
(Systems Engineering Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract According to the Zangwill's global convergence theory, a point-to-set mapping which supports the algorithm solving the generalized steady-state optimizing control problem (GOP) is defined. In light of the definition, it is proved that the sequence of points generated by the algorithm can guarantee that the objective function of GOP problem is descent on its own set. Namely, the algorithm solving the generalized steady-state optimizing control problem is globally convergent.

Key words Generalized steady state of industrial process, point-to-set mapping, Zangwill function, global convergence.

1 引言

针对工业过程广义稳态的优化控制问题(GOP),文[1]给出了一种基于模型求解的

1)国家自然科学基金资助项目.
收稿日期 1998-03-09 收修改稿日期 1998-11-03

广义稳态优化控制算法(AMOP),并对仿真算例进行了数值计算.本文则根据 Zangwill 全局收敛理论[2],对文[1]给出的迭代算法 AMOP 的收敛性进行了深入分析.为了运用 Zangwill 全局收敛理论,首先对设定点与广义稳态之间的点-集映射关系进行了严密恰当地定义.在此基础上,证明了工业过程广义稳态优化控制算法 AMOP 在满足一定的条件下,具有全局收敛性,即总能够选择一个适当的增益 ε,使得由算法 AMOP 产生的解序列是可行的,它使目标函数在每一次迭代中均朝着减小的方向改变.

2　Zangwill 全局收敛理论

为了引入 Zangwill 全局收敛定理,首先给出如下若干定义.

定义1[2,3]. 设 A 是集合 $\boldsymbol{X}$ 上的一个算法,$\Gamma\subset\boldsymbol{X}$ 是 A 的一个解集,称 $\boldsymbol{X}$ 上的连续函数 $Z(\cdot)$是 A 在 $\boldsymbol{X}$ 上的 Zangwill 函数,如果满足

1)若 $x\notin\Gamma,y\in A(x)$,则 $Z(y)<Z(x)$;　2)若 $x\in\Gamma,y\in A(x)$,则 $Z(y)\leqslant Z(x)$.

定义2[3]. 设 $A:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ 是一个点-集映射,如果在点 $x\in\boldsymbol{X}$ 处,有 $x_k\to x,x_k\in\boldsymbol{X};y_k\to y,y_k\subset\boldsymbol{Y}$,使得 $y\in A(x)$,则称点-集映射 A 在 $x\in\boldsymbol{X}$ 处是闭的;如果它在 $\boldsymbol{X}$ 中每一点是闭的,则称点-集映射 A 在 $\boldsymbol{X}$ 上是闭的.

定理1[2,3](Zangwill 全局收敛定理). 设 A 是 $\boldsymbol{X}$ 上由一个点-集映射定义的迭代算法,给定初始点 $x_0\in\boldsymbol{X}$,由算法 A 产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$满足 $x_{k+1}\in A(x_k)$,又设算法 A 的解集为 $\Gamma\subset\boldsymbol{X}$. 如果1)所有的 x_k 均属于紧集 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{X}$,2)在 $\boldsymbol{X}$ 上存在一个 Zangwill 函数 $Z(\cdot)$,3)点-集映射 A 在点 $x\in\boldsymbol{X}$ 处是闭的,如果 $x\notin\Gamma$,则算法 A 的迭代运算要么停止在一个解 $\bar{x}\in\Gamma$ 上,要么$\{x_k\}$的任一收敛子列的极限是 A 的一个解.

3　广义稳态优化控制算法的全局收敛性

由定理1可知,一个迭代算法是否全局收敛,只须看该算法是否满足 Zangwill 全局收敛定理的三个条件.由于工业过程广义稳态优化控制问题 GOP 的复杂性,在进行迭代算法收敛性证明之前,还需引入如下两个引理.

引理1[3]. 设 $A:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ 是一个点-点映射,$B:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{Z}$ 是一个点-集映射,如果 A 在点 $x\in\boldsymbol{X}$ 处是连续的,B 在 $A(x)$处是闭的,则组合映射 $\boldsymbol{C}=B\cdot A$ 在点 $x\in\boldsymbol{X}$ 处是闭的.

定义3[3]. 设 $x\in\boldsymbol{X}$,称向量 $\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{X}$ 是在点 x 处的可行方向,如果存在一个 $\bar{\alpha}>0$,使得

$$x+\alpha\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{X},\forall\ \alpha\in[0,\bar{\alpha}].$$

引理2[3]. (Luenberger 最优性一阶必要条件). 设 $\boldsymbol{S}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的一个子集,$f\in\boldsymbol{C}^1$是 $\boldsymbol{S}$ 上的一个函数,如果 x 是 f 在 $\boldsymbol{S}$ 上的一个极小点,那么对于任意的可行方向 $\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{X}$,则有 $f'(x)\cdot\boldsymbol{d}\geqslant 0$.

定义4. 设广义稳态优化控制算法 AMOP 产生的映射为 $A:\boldsymbol{C}\ni v\to A(v)\subset 2^{C}$,

式中 $\boldsymbol{C}$ 是 GOP 问题的设定点容许集合.那么,映射 A 可进一步定义为

1)$\boldsymbol{u}:\boldsymbol{C}\ni v\to c(v)\subset\boldsymbol{C}$,

$$c(v)\ \hat{=}\operatorname{Arg}\min_{c\in C}(\bar{q}(c)-\lambda^T(v)\cdot c),\tag{1}$$

即对于$\forall\ v^L\in\boldsymbol{C}$,寻找一个$c^L$,使得$c^L\in c(v^L)\subset\boldsymbol{C}$;如果$c(v^L)$是一个单点集时,则意味着对于$\forall\ v\in\boldsymbol{C}$,有一个$c=c(v)\subset\boldsymbol{C}$,从而在$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$上确定了一个点$(v,c)$;

2)根据广义稳态优化控制算法 AMOP 的第3步,即

$$v^{L+1}=v^L+\varepsilon^L(c^L-v^L);\tag{2}$$

令$\tau\leqslant\varepsilon^L\leqslant B(v)$,$\tau>0$,其中$B(v)$是$v$的函数,从而有如下的点-集映射

$$w:\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}\ni(v,c)\rightarrow e(v)\subset 2^C,e(v)\hat{=}\{v+\varepsilon\cdot\boldsymbol{d}:\boldsymbol{d}=$$

$$c-v,\tau\leqslant\varepsilon\leqslant B(v),\tau>0\},\tag{3}$$

即对于给定的v^L和c^L,寻找一个v^{L+1},使得$v^{L+1}\in e(v)$;

3)根据上述对映射u和w的定义可知,由算法 AMOP 产生的映射A是两者的组合,即

$$A:\boldsymbol{C}\ni v\rightarrow A(v)\subset 2^C,A\hat{=}w\cdot u.$$

定理2. 对于文[1]提出的工业过程广义稳态优化控制问题(GOP),如果满足文[1]的假设1和假设2的条件,并且

1)设定点容许集合$\boldsymbol{C}=\{c\in\boldsymbol{R}^i:D(c)\leqslant 0\}$是紧集且是凸的,其中$D:\boldsymbol{R}^i\rightarrow\boldsymbol{R}^p$;

2)$q(\cdot)$关于c是可导的,并且$\nabla q(\cdot)$在$\boldsymbol{C}$上满足 Lipschitz 条件,即存在常数$\delta>0$,使得

$$\|\nabla q(c+h)-\nabla q(c)\|\leqslant\delta\|h\|,\quad\forall\ c,c+h\in\boldsymbol{C},$$

式中$\|\cdot\|$为欧氏范数;

3)$\bar{q}(v)\hat{=}Q(v,G_1(v),G_2(v))$,$\bar{q}(\cdot)$在$\boldsymbol{C}$上可导,并且$\nabla\bar{q}(\cdot)$在$\boldsymbol{C}$上一致单调,即存在常数$\alpha>0$,使得$\nabla(\bar{q}(c+h)-\nabla\bar{q}(c))\cdot h\geqslant\alpha\|h\|^2,\forall c,c+h\in\boldsymbol{C}$,则有

(i)如果选择

$$B(v)\hat{=}\min\left\{1,\frac{2\alpha}{\delta}-\beta\right\},0<\tau\leqslant 1,\beta>0,\tau+\beta\leqslant\frac{2\alpha}{\delta},\tag{4),(5}$$

那么,点-集映射A在$\boldsymbol{C}\backslash\boldsymbol{\Omega}$上是闭的,其中$\boldsymbol{\Omega}\subset\boldsymbol{C}$是广义稳态优化控制算法 AMOP 的解集,即

$$\boldsymbol{\Omega}\hat{=}\{v\in\boldsymbol{C}:v\in A(v)\};$$

(ii)由算法 AMOP 产生的解序列$\{v^L\}$满足过程约束条件,并且使得 GOP 问题的目标函数满足

$q(v^{L+1})<q(v^L)$,若$v^L\notin\boldsymbol{\Omega}$(或$v^L\in\boldsymbol{C}\backslash\boldsymbol{\Omega}$);$q(v^{L+1})\leqslant q(v^L)$,若$v^L\in\boldsymbol{\Omega},L=0,1,2,\cdots$.

证明.

(i)考虑映射u,由于C是紧集且是凸的,根据题设条件(3),$\nabla\bar{q}(\cdot)$在$\boldsymbol{C}$上一致单调,所以对于$\forall\ v\in\boldsymbol{C}$,$c(v)$是一个单点集,即有$c=c(v)$,因此$u$在$\boldsymbol{C}$上是一个点-点连续映射;再考虑映射$w$,因为$\alpha>0$,$v\in\boldsymbol{C}$,选择$\tau,\beta$使满足式(5),即$\tau+\beta\leqslant\frac{2\alpha}{\delta}$,则$\tau\leqslant\frac{2\alpha}{\delta}-\beta$.

根据式(4),得$\tau\leqslant B(v)$;另一方面,对于$\forall\ (v,c)\in\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C},c\neq v$,设

$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}\ni(v^L,c^L)\xrightarrow[L\to\infty]{}(v,c)\in\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C},c\neq v,e(v)\ni y^L=v^L+\varepsilon^L(c^L-v^L)\xrightarrow[L\to\infty]{}y$,并记$\boldsymbol{d}^L$

$=c^L-v^L$，则当 L 充分大时，有 $\|y^L-v^L\|/\|\boldsymbol{d}^L\| \xrightarrow[L\to\infty]{} \|y-v\|/\|\boldsymbol{d}\|=\varepsilon$，从而 $y=v+\varepsilon\cdot\boldsymbol{d}$.

又因为 $\tau\leqslant\varepsilon\leqslant\lim\limits_{L\to\infty}B(v^L)=B(v)=\min\{1,\frac{2\alpha}{\delta}-\beta\}$，根据式(3)，得 $y\in e(v)$. 再由定义2可知，映射 w 在点 (v,c) 处是闭的；而 $v\in\boldsymbol{C}$，$c\in\boldsymbol{C}$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上是任意的，所以 w 在 $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$ 上是闭的.

根据映射 u 的连续性和 w 的闭性，由引理1可知点-集映射 $A=w\cdot u$，　$c\neq v$，在 $v\in\boldsymbol{C}$ 是闭的，亦即映射 $A:\boldsymbol{C}\ni v\to A(v)\in 2^{C}$ 在 $\boldsymbol{C}\backslash\boldsymbol{\Omega}$ 上是闭的.

(ii)根据题设条件(2)以及 $\boldsymbol{C}$ 的凸性，可得下面不等式[4]

$$q(c+h)\leqslant q(c)+\nabla q(c)h+\frac{\delta}{2}\|h\|^2,\forall\ c,c+h\in\boldsymbol{C}. \tag{6}$$

设 $v^L\in\boldsymbol{C}$，$v^{L+1}\in\boldsymbol{C}$，则由式(2)和(6)，得

$$\begin{aligned}q(v^L)-q(v^{L+1})\geqslant&\nabla q(v^L)(v^L-v^{L+1})-\frac{\delta}{2}\|v^L-v^{L+1}\|^2=\\&\varepsilon^L\cdot\nabla q(v^L)(v^L-c^L)-\frac{\delta}{2}(\varepsilon^L)^2\|v^L-c^L\|^2,\end{aligned} \tag{7}$$

式中 $c^L\in c(v^L)$，因为 c^L 是 MOP 问题在给定 $v^L\in\boldsymbol{C}$ 时的最优点，因此 MOP 问题应满足 Luenberger 最优性一阶必要条件(引理2)，即

$$(\nabla q(c^L)-\lambda^T(v^L))(v^L-c^L)\geqslant 0. \tag{8}$$

根据算法 AMOP 的第1步，即 $\lambda^T(v^L)=\nabla\bar{q}(v^L)-\nabla q(v^L)$，代入式(8)中，得

$$\nabla q(v^L)(v^L-c^L)\geqslant(\nabla\bar{q}(v^L)-\nabla\bar{q}(c^L))(v^L-c^L).$$

再由题设条件(3)，上式可进一步化为

$$\nabla q(v^L)(v^L-c^L)\geqslant\alpha\|(v^L-c^L)\|^2. \tag{9}$$

将式(9)代入式(7)，得

$$\begin{aligned}q(v^L)-q(v^{L+1})\geqslant&\varepsilon^L\cdot\alpha\|v^L-c^L\|^2-\frac{\delta}{2}(\varepsilon^L)^2\|v^L-c^L\|^2=\\&\varepsilon^L(\alpha-\varepsilon^L)\|v^L-c^L\|^2.\end{aligned} \tag{10}$$

根据式(3)和(4)，有 $\varepsilon^L\leqslant\beta(v^L)\leqslant\frac{2\alpha}{\delta}-\beta$，从而

$$\alpha-\frac{\delta}{2}\varepsilon^L\geqslant\frac{\delta}{2}\beta. \tag{11}$$

将式(11)代入式(10)式，得

$$q(v^L)-q(v^{L+1})\geqslant\frac{\delta}{2}\beta\varepsilon^L\|v^L-c^L\|^2. \tag{12}$$

因为 $\delta\beta\varepsilon^L>0$，所以由解集 $\boldsymbol{\Omega}$ 的定义以及不等式(12)，可推得 $q(v^{L+1})\leqslant q(v^L)$. 并且

$$q(v^{L+1})<q(v^L),v^L\in\boldsymbol{C}\backslash\boldsymbol{\Omega},c^L\neq v^L,$$

即 $q(\cdot)$ 是广义稳态优化控制算法 AMOP 在 $\boldsymbol{C}$ 上的一个 Zangwill 函数.　　证毕.

定理2亦称为工业过程广义稳态优化控制算法 AMOP 的全局收敛定理. 从定理2的证明可以看出，由于集合 $\boldsymbol{C}$ 是紧的，当定理中的两个结论皆成立时，算法 AMOP 即满足了

Zangwill 全局收敛定理的三个条件.从而,文[1]给出的工业过程广义稳态优化控制算法 AMOP 具有全局收敛性.需要说明的是,由于定理2的条件(1)和(3)属构造性的,从理论上讲,在定义某一广义稳态优化控制问题时,就应当考虑使其成立;对于条件(2),在满足文[1]的假设1和假设2时,通常也可以使其得以满足.所以,算法 AMOP 的收敛性是极易得以保证的.

综上所述,本文根据 Zangwill 全局收敛理论,深刻分析了工业过程广义稳态优化控制算法 AMOP 的收敛性,定义了控制器设定点与广义稳态之间的点-集映射关系,证明了算法 AMOP 具有全局收敛性.

参 考 文 献

1 罗旭光,万百五.工业过程广义稳态优化控制研究.自动化学报,1999,**25**(1):38～44

2 Zangwill W I. Nonlinear Programming:A Unified Approach,Englewood Cliffs,NJ:Prentice-Hall,1969

3 Luenberger D G. Linear and Nonlinear Programming. Second edition,Reading,Mass.:Addison-Wesley,1984,167～195

4 Kantorovich L V,Akilov G P. Functional Analysis,Second edition,Oxford:Pergamon Press,1982,461～473

罗旭光,万百五 见本刊第25卷第1期.

(上接第331页).

序号	项目名称	主要内容	时间	人数	会期(天)	地点	联系人	备注
6	全国第三届 Java 技术及应用学术交流会	交流国内外 Java 技术及应用新进展,Java 技术及产品开发成果与经验,Java 技术在实时控制、企业管理、电子商务、技术网络等各领域应用成果及经验	8月	100	3	北京	龚炳铮、卢长顺 北京927信箱 邮编:100080 电话:62311294	同上
7	华东六省一市自动化学会学术年会	华东地区各省自动化学会例行学术年会	3季度	100	4	南昌	余思慧 南昌大学(南区)电力电子研究所 邮编:330029 电话:(0791)8304597	由江西省自动化学会主办,山东、安徽、江苏、福建、上海自动化学会协办
8	西南三省一市自动化学会学术年会暨新产品展示会	西南地区各省自动化学会例行学术年会	9月	200	4	成都	唐仕正 成都市体育场路2号西星大厦 邮编:610015 电话:(028)6629902	由四川省自动化与仪器仪表学会主办,云南、贵州、重庆自动化学会协办

(下转第391页)