

不确定离散系统具有 H_∞ 性能界的鲁棒 LQG 状态反馈控制

吴淮宁

(北京航空航天大学自动控制系 北京 100083)

摘要 研究了含有范数有界参数不确定线性离散系统具有 H_∞ 性能界的鲁棒 LQG 状态反馈控制问题, 考虑了有限时域时变及无限时域时不变两种情形. 所得的控制器对于所有可容许的参数不确定都能满足给定的 H_∞ 性能界, 且为最坏情形 H_2 性能指标提供了一个最优上界. 对于无限时域时不变情形, 该控制器还能保证闭环系统渐近稳定. 结果仅需求解一含有一个尺度参数的 Riccati 方程.

关键词 线性离散系统, 鲁棒控制, 二次性能指标, H_∞ 优化, Riccati 方程.

ROBUST LQG STATE-FEEDBACK CONTROL WITH H_∞ PERFORMANCE BOUND FOR UNCERTAIN DISCRETE-TIME SYSTEMS

WU Huaining

(Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

Abstract The paper studies the problem of robust LQG state-feedback control with H_∞ performance bound for uncertain linear discrete-time systems that are subjected to norm-bounded parameter uncertainty. Both the cases of finite horizon time-varying and infinite horizon time-invariant are considered. The controller derived can satisfy a given H_∞ performance bound and provide an optimized bound for the worst-case H_2 performance index for all admissible parameter uncertainties, and also make the closed-loop systems asymptotically stable for the case of infinite horizon time-invariant. The obtained result only needs to solve a single parameter dependent Riccati equation.

Key words Linear discrete-time systems, robust control, quadratic performance index, H_∞ optimization, Riccati equation.

1 引言

对于含有未建模扰动的线性系统来说, 采用 H_∞ 优化方法来设计控制器是非常有效

的^[1]. 然而用其来处理参数不确定系统的鲁棒稳定问题时,则显得过于保守^[2]. 虽然近年来提出的 H_2 保价方法可以很好地解决含有参数不确定系统的最优鲁棒控制器的设计问题^[3,4],但是该方法没有考虑 H_∞ 干扰抑制,而且在大多场合,未建模扰动与参数不确定可能同时存在于控制系统当中. 因此,近年来一些学者对同时含有未建模扰动与参数不确定的系统鲁棒控制器的设计问题进行了研究,如文[5]与[6]分别用 Riccati 方程法和凸优化方法解决了一类凸有界结构参数不确定离散系统在未建模扰动作用下的鲁棒状态反馈控制问题;而文[7]则对含有范数有界参数不确定的系统在未建模动态作用下的鲁棒状态反馈控制问题进行了研究. 文[5~7]所考虑的 H_2 性能与 H_∞ 干扰抑制性能均对应于同样的输入输出,所得的控制器可使系统在满足给定的 H_∞ 干扰抑制水平条件下,其最坏情形 H_2 性能指标的一个上界达到最小. 这些方法容许我们设计时可以在最坏情形 H_2 性能与 H_∞ 性能之间进行折衷. 然而文[7]仅考虑了连续情形,而相应离散情形,至今还未见报道.

本文对含有范数有界参数不确定线性离散系统在未建模扰动作用下的鲁棒状态反馈控制问题进行了研究,考虑了有限时域时变及无限时域时不变两种情形. 给出了系统在满足给定的 H_∞ 干扰抑制水平条件下,其最坏情形 H_2 性能指标的一个上界,并导出了“最优的”状态反馈控制器优化了该界. 所得结果仅需求解一个含有一个尺度参数的修正 Riccati 方程.

2 问题描述

考虑如下不确定线性离散时变系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = (A_k + \Delta A_k)\mathbf{x}_k + (B_{1,k} + \Delta B_{1,k})\mathbf{u}_k + B_{2,k}\mathbf{w}_k, \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0, 0 \leq k \leq N-1, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = C_k\mathbf{x}_k + D_k\mathbf{u}_k. \quad (2)$$

这里 $\mathbf{x}_k \in R^n$ 为状态; $\mathbf{u}_k \in R^m$ 为控制输入; $\mathbf{w}_k \in R^p$ 为干扰; $\mathbf{z}_k \in R^q$ 为系统输出; $A_k, B_{1,k}, B_{2,k}, C_k$ 与 D_k 为描述名义系统的已知有界实时变矩阵; \mathbf{x}_0 为初态; 而 $\Delta A_k, \Delta B_{1,k}$ 表示系统的参数不确定. 假定可容许的参数不确定满足

$$\Delta A_k = H_k F_k E_{1,k}, \quad \Delta B_{1,k} = H_k F_k E_{2,k}, \quad (3)$$

其中 $F_k \in R^{i \times j}$ 为一个未知的实时变矩阵, 满足

$$F_k^T F_k \leq I_j, \quad (4)$$

而 $H_k, E_{1,k}$ 与 $E_{2,k}$ 为适当维数的已知有界实矩阵. 假定 $D_k^T D_k > 0$.

定义如下有限时域最坏情形 H_2 性能指标和 H_∞ 性能指标

$$J_2(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N) = \sup_{F_k} \mathbf{E} \{ \|\mathbf{z}\|_{2,[0,N-1]}^2 + \|\mathbf{x}_N\|_{R_N}^2 \}, \quad (5)$$

$$J_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N) = \sup_{0 \neq (\mathbf{w}, \mathbf{x}_0) \in (l_2[0,N-1], R^n)} \left\{ \frac{\|\mathbf{z}\|_{2,[0,N-1]}^2 + \|\mathbf{x}_N\|_{R_N}^2}{\|\mathbf{w}\|_{2,[0,N-1]}^2 + \|\mathbf{x}_0\|_{R_0}^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

其中 $R_0 = R_0^T > 0$ 与 $R_N = R_N^T \geq 0$ 分别为初态 \mathbf{x}_0 与终态 \mathbf{x}_N 的给定加权矩阵, $\|\mathbf{y}\|_R$ 与 $\|\mathbf{y}\|_{2,[0,N-1]}^2$ 分别表示为 $\mathbf{y}^T R \mathbf{y}$ 与 $\sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i$, $l_2[0,N-1]$ 表示为在区间 $[0,N-1]$ 上平方可加的向量序列所构成的空间, $\mathbf{E}\{\cdot\}$ 表示期望.

具有 H_∞ 性能界的鲁棒 LQG 状态反馈控制问题是: 确定一个状态反馈控制律

$$\mathbf{u}_k = K_k \mathbf{x}_k, \quad (7)$$

使得以下条件成立.

1) 若将 \mathbf{w}_k 视为一个平方可加的干扰信号, \mathbf{x}_0 视为一个未知初态, 给定 $\gamma > 0$, 则由(6)式定义的 H_∞ 性能指标满足

$$J_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N) < \gamma; \quad (8)$$

2) 若将 \mathbf{w}_k 视为一个白噪声过程, 对于 $0 \leq k, l \leq N-1$ 满足: 当 $k=l$ 时, $E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_l^T\} = I_p$; 当 $k \neq l$ 时, $E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_l^T\} = 0$. 而将 \mathbf{x}_0 视为一个满足 $E\{\mathbf{x}_0\} = 0, E\{\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T\} = X_0 \geq 0$ 的随机向量, 且与 \mathbf{w}_k 互不相关, 则由(5)式定义的最坏情形 H_2 性能指标的一个上界达到最小.

由(1), (2)及(7)式构成的闭环系统可写为

$$\mathbf{x}_{k+1} = (A_{c,k} + H_k F_k E_{c,k}) \mathbf{x}_k + B_{2,k} \mathbf{w}_k, \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (9)$$

$$\mathbf{z}_k = C_{c,k} \mathbf{x}_k, \quad (10)$$

其中 $A_{c,k} = A_k + B_{1,k} K_k, E_{c,k} = E_{1,k} + E_{2,k} K_k, C_{c,k} = C_k + D_k K_k$. 这样(5)式可化为

$$J_2(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N) = \sup_{F_k} \text{tr} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} C_{c,k}^T C_{c,k} \tilde{Q}_k + R_N \tilde{Q}_N \right\}, \quad (11)$$

其中 $\text{tr}\{\cdot\}$ 表示矩阵的迹, 且 $\tilde{Q}_k = E\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T\}$ 满足矩阵差分方程

$$\tilde{Q}_{k+1} = \tilde{A}_{c,k} \tilde{Q}_k \tilde{A}_{c,k}^T + B_{2,k} B_{2,k}^T, \quad \tilde{Q}_0 = X_0, \quad (12)$$

其中 $\tilde{A}_{c,k} = A_{c,k} + H_k F_k E_{c,k}$. 考虑如下矩阵差分方程

$$\tilde{P}_k = \tilde{A}_{c,k}^T \tilde{P}_{k+1} \tilde{A}_{c,k} + C_{c,k}^T C_{c,k}, \quad \tilde{P}_N = R_N, \quad (13)$$

则(11)式可改写为

$$J_2(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N) = \sup_{F_k} \text{tr} \left\{ \tilde{P}_0 X_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{P}_{k+1} B_{2,k} B_{2,k}^T \right\}. \quad (14)$$

令 $\bar{B}_k = [\gamma^{-1} B_{2,k} \quad \sqrt{\epsilon} H_k]$, 引入如下表达:

$$\begin{aligned} S_1(P_{k+1}) &= P_{k+1} + \gamma^{-2} P_{k+1} B_{2,k} (I - \gamma^{-2} B_{2,k}^T P_{k+1} B_{2,k})^{-1} B_{2,k}^T P_{k+1} \\ &= (P_{k+1}^{-1} - \gamma^{-2} B_{2,k} B_{2,k}^T)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(P_{k+1}) &= \epsilon A_{c,k}^T S_1(P_{k+1}) H_k [I - \epsilon H_k^T S_1(P_{k+1}) H_k]^{-1} H_k^T S_1(P_{k+1}) A_{c,k} + \\ &\quad \epsilon^{-1} E_{c,k}^T E_{c,k} - [A_{c,k}^T S_1(P_{k+1}) H_k F_k E_{c,k} + E_{c,k}^T F_k^T H_k^T S_1(P_{k+1}) A_{c,k} + \\ &\quad E_{c,k}^T F_k^T H_k^T S_1(P_{k+1}) H_k F_k E_{c,k}], \end{aligned}$$

$$S_2(P_{k+1}) = P_{k+1} + P_{k+1} \bar{B}_k (I - \bar{B}_k^T P_{k+1} \bar{B}_k)^{-1} \bar{B}_k^T P_{k+1} = (P_{k+1}^{-1} - \bar{B}_k \bar{B}_k^T)^{-1}.$$

引理1. 考虑闭环系统(9), (10)式, 给定 $\gamma > 0$ 及状态反馈增益 K_k , 若存在一个标量 $\epsilon > 0$, 使得 Riccati 差分方程

$$P_k = A_{c,k}^T S_2(P_{k+1}) A_{c,k} + \epsilon^{-1} E_{c,k}^T E_{c,k} + C_{c,k}^T C_{c,k}, \quad P_N = R_N \quad (15)$$

有一个满足 $P_0 < \gamma^2 R_0$ 的有界时变解 $P_k = P_k^T \geq 0$, 且

$$I - \bar{B}_k^T P_{k+1} \bar{B}_k > 0 \quad (16)$$

成立, 则 $J_\infty(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N) < \gamma$. 此时最坏情形 H_2 性能指标满足

$$J_2(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N) \leq J_F = \text{tr} \left\{ P_0 X_0 + \sum_{k=0}^{N-1} P_{k+1} B_{2,k} B_{2,k}^T \right\}, \quad (17)$$

称 J_F 为有限时域 H_2 性能保证界.

证明. 由有限时域离散情形有界实引理(见文[8]中定理3.1)可知, 方程(15)有一个满足 $P_0 < \gamma^2 R_0$ 且(16)式成立的有界时变解 $P_k = P_k^T \geq 0$ 等价于存在一个满足 $Q_0 < \gamma^2 R_0$ 的

有界时变矩阵 $Q_k = Q_k^T > 0$, 使得

$$A_{c,k}^T S_2(Q_{k+1}) A_{c,k} - Q_k + \epsilon^{-1} E_{c,k}^T E_{c,k} + C_{c,k}^T C_{c,k} < 0, \quad Q_N = R_N, \quad (18)$$

且 $I - \bar{B}_k^T Q_{k+1} \bar{B}_k > 0$ 成立. 由于 $S_2(Q_{k+1}) = (Q_{k+1}^{-1} - \gamma^{-2} B_{2,k} B_{2,k}^T - \epsilon H_k H_k^T)^{-1} = [S_1^{-1}(Q_{k+1}) - \epsilon H_k H_k^T]^{-1}$, 因 $S_2(Q_{k+1}) > 0$, 容易得出 $S_1(Q_{k+1}) > 0$ 及 $I - \epsilon H_k^T S_1(Q_{k+1}) H_k > 0$, 且由 $S_1(Q_{k+1}) > 0$ 可知 $I - \gamma^{-2} B_{2,k}^T Q_{k+1} B_{2,k} > 0$.

令 $U(Q_{k+1}) = \epsilon^{\frac{1}{2}} [I - \epsilon H_k^T S_1(Q_{k+1}) H_k]^{-\frac{1}{2}} H_k^T S_1(Q_{k+1}) A_{c,k} - \epsilon^{-\frac{1}{2}} [I - \epsilon H_k^T S_1(Q_{k+1}) \cdot H_k]^{\frac{1}{2}} F_k E_{c,k}$, 显然 $U^T(Q_{k+1}) U(Q_{k+1}) = M(Q_{k+1}) - \epsilon^{-1} E_{c,k}^T (I_j - F_k^T F_k) E_{c,k} \geq 0$, 由(4)式可知 $M(Q_{k+1}) \geq 0$. 利用等式 $S_2(Q_{k+1}) = S_1(Q_{k+1}) + \epsilon S_1(Q_{k+1}) H_k [I - \epsilon H_k^T S_1(Q_{k+1}) H_k]^{-1} H_k^T S_1(Q_{k+1})$, 可将(18)式化为

$$\tilde{A}_{c,k}^T S_1(Q_{k+1}) \tilde{A}_{c,k} - Q_k + C_{c,k}^T C_{c,k} + M(Q_{k+1}) < 0, \quad Q_N = R_N. \quad (19)$$

显然 $\tilde{A}_{c,k}^T S_1(Q_{k+1}) \tilde{A}_{c,k} - Q_k + C_{c,k}^T C_{c,k} < 0$, 由有界实引理可知 $J_\infty(u, w, x_0, x_N) < \gamma$.

同(19)式的推导一样, 可以将(15)式改写为

$$P_k = \tilde{A}_{c,k}^T S_1(P_{k+1}) \tilde{A}_{c,k} + C_{c,k}^T C_{c,k} + M(P_{k+1}), \quad P_N = R_N. \quad (20)$$

令 $Y_k = P_k - \tilde{P}_k$, 则用(20)式减去(13)式可得

$$Y_k = \tilde{A}_{c,k}^T Y_{k+1} \tilde{A}_{c,k} + \gamma^{-2} \tilde{A}_{c,k}^T P_{k+1} B_{2,k} (I - \gamma^{-2} B_{2,k}^T P_{k+1} B_{2,k})^{-1} B_{2,k}^T P_{k+1} \tilde{A}_{c,k} + M(P_{k+1}), \quad Y_N = 0,$$

显然 $Y_k \geq 0$, 因而(17)式成立. 证毕.

3 有限时域最优鲁棒控制器设计

现在来推导使得(17)式中 H_2 性能保证界 J_F 达到最小意义上的最优状态反馈增益 K_k . 令 $\bar{C}_k = [C_k^T \quad \epsilon^{-\frac{1}{2}} E_{1,k}^T]^T$, $\bar{D}_k = [D_k^T \quad \epsilon^{-\frac{1}{2}} E_{2,k}^T]^T$, $V_k = B_{1,k}^T S_2(P_{k+1}) B_{1,k} + \bar{D}_k^T \bar{D}_k$, 则有如下定理.

定理1. 存在一个 K_k 使得 J_F 在(15)式有一个满足 $P_0 < \gamma^2 R_0$ 且(16)式成立的有界时变解 $P_k = P_k^T \geq 0$ 的约束下达到最小, 当且仅当存在一个 $\epsilon > 0$, 使得方程

$$P_k = A_k^T S_2(P_{k+1}) A_k - [A_k^T S_2(P_{k+1}) B_{1,k} + \bar{C}_k^T \bar{D}_k] V_k^{-1} [B_{1,k}^T S_2(P_{k+1}) A_k + \bar{D}_k^T \bar{C}_k] + \bar{C}_k^T \bar{C}_k, \quad P_N = R_N \quad (21)$$

有一个满足 $P_0 < \gamma^2 R_0$ 的有界时变解 $P_k = P_k^T \geq 0$, 且

$$I - \bar{B}_k^T P_{k+1} \bar{B}_k > 0 \quad (22)$$

成立. 此时

$$K_k = -V_k^{-1} [B_{1,k}^T S_2(P_{k+1}) A_k + \bar{D}_k^T \bar{C}_k], \quad (23)$$

且

$$J_F = \text{tr} \{ P_0 X_0 + \sum_{k=0}^{N-1} P_{k+1} B_{2,k} B_{2,k}^T \}. \quad (24)$$

证明. 必要性. 容易看出 J_F 的最小化等价于 P_k 在正半定意义上的最小化. 将(15)式对 K_k 进行配方可得

$$P_k = A_k^T S_2(P_{k+1}) A_k - [A_k^T S_2(P_{k+1}) B_{1,k} + \bar{C}_k^T \bar{D}_k] V_k^{-1} [B_{1,k}^T S_2(P_{k+1}) A_k + \bar{D}_k^T \bar{C}_k] + \bar{C}_k^T \bar{C}_k + \{ K_k + V_k^{-1} [B_{1,k}^T S_2(P_{k+1}) A_k + \bar{D}_k^T \bar{C}_k] \}^T V_k \{ K_k +$$

$$V_k^{-1}[B_{1,k}^T S_2(P_{k+1})A_k + \bar{D}_k^T \bar{C}_k], P_N = R_N. \quad (25)$$

由上式可知,只有当 K_k 满足(23)式时, P_k 才能达到最小,此时(15)式化为(21)式,且由(16)式可得(22)式.

充分性. 假定(21)式有一个满足 $P_0 < \gamma^2 R_0$ 的有界时变解 $P_k = P_k^T \geq 0$, 且(22)式成立, 令 K_k 由(23)式给出, 将(21)式加上零项

$$0 = \{K_k + V_k^{-1}[B_{1,k}^T S_2(P_{k+1})A_k + \bar{D}_k^T \bar{C}_k]\}^T V_k \{K_k + V_k^{-1}[B_{1,k}^T S_2(P_{k+1})A_k + \bar{D}_k^T \bar{C}_k]\}, \quad (26)$$

然后经整理可得(15)式, 这说明该 P_k 也是(15)式的解, 且(16)式成立, 很容易验证由(23)式给出的 K_k 满足优化的必要条件. 显然此时(24)式成立. 证毕.

由引理1及定理1很容易得到如下定理.

定理2. 考虑系统(1), (2)式, 给定 $\gamma > 0$, 如果存在一个标量 $\epsilon > 0$, 使得方程(21)式有一个满足 $P_0 < \gamma^2 R_0$ 的有界时变解 $P_k = P_k^T \geq 0$, 且(22)式成立, 则由(23)式给出的状态反馈增益 K_k 可使 $J_\infty(u, w, x_0, x_N) < \gamma$, 且能保证最坏情形 H_2 性能指标满足

$$J_2(u, w, x_0, x_N) \leq \text{tr} \left\{ P_0 X_0 + \sum_{k=0}^{N-1} P_{k+1} B_{2,k} B_{2,k}^T \right\}.$$

从该定理可知, 若定理中条件成立, 则由(23)式给出的 K_k 会使闭环系统满足给定的 H_∞ 性能指标, 且为最坏情形 H_2 性能指标提供了一个最优上界.

4 无限时域时不变情形

现在来研究无限时域时不变稳态情形具有 H_∞ 性能界的鲁棒 LQG 状态反馈控制器的设计问题, 也即 $k \rightarrow \infty$ 的情形. 假定 $A, B_1, B_2, C, D, H, E_1$ 与 E_2 均为常数矩阵, 且 $D^T D > 0$, 不确定矩阵 F_k 满足 $F_k^T F_k \leq I_j, 0 \leq k < \infty$. 问题可以描述为: 确定一个时不变控制律 $u_k = Kx_k$ 满足以下设计要求:

1) 对于所有可容许的参数不确定, 闭环系统是渐近稳定的.

2) $\|G_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$, 其中 $G_{zw}(z) = C_c[zI - (A_c + HF_k E_c)]^{-1} B_2$ 为 w_k 到 z_k 的闭环传递函数, $\|G_{zw}(z)\|_\infty \triangleq \sup_{\theta \in (-\pi, \pi]} \sigma[G_{zw}(e^{j\theta})]$, 这里 $\sigma[\cdot]$ 表示最大奇异值, $\gamma > 0$ 为给定的干扰抑制水平.

3) 最坏情形 H_2 性能指标

$$J_2(K) = \sup_{F_k} \lim_{k \rightarrow \infty} E\{z_k^T z_k\} \quad (27)$$

的一个上界达到最小.

若 \tilde{A}_c 是渐近稳定的, 则(27)式可化为

$$J_2(K) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{F_k} E\{x_k^T C_c^T C_c x_k\} = \sup_{F_k} \text{tr}\{\tilde{P} B_2 B_2^T\}, \quad (28)$$

其中 $\tilde{P} = \tilde{P}^T \geq 0$ 满足 Lyapunov 方程

$$\tilde{P} = \tilde{A}_c^T \tilde{P} \tilde{A}_c + C_c^T C_c. \quad (29)$$

引理2. 考虑闭环系统(9), (10)式的时不变情形, 给定 $\gamma > 0$, 如果存在一个 $\epsilon > 0$, 使得代数 Riccati 方程

$$P = A_c^T S_2(P) A_c + \epsilon^{-1} E_c^T E_c + C_c^T C_c \quad (30)$$

有一个稳定解 $P=P^T \geq 0$ (也即 $A_c + \bar{B}(I - \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P A_c$ 是渐近稳定的), 且

$$I - \bar{B}^T P \bar{B} > 0 \quad (31)$$

成立, 则对于所有可容许的参数不确定闭环系统都渐近稳定, 且 $\|G_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$. 此时最坏情形 H_2 性能指标满足

$$J_2(K) \leq J_I = \text{tr}\{PB_2 B_2^T\}, \quad (32)$$

称 J_I 为无限时域 H_2 性能保证界.

证明. 与引理1的证明类似, 运用无限时域时不变离散情形严格有界实引理^[9], 容易证明, 若(30)式有一个满足(31)式的稳定解 $P=P^T \geq 0$, 则 \tilde{A}_c 渐近稳定, 且 $\|G_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$. 同引理1一样, 可得 $Y = \tilde{A}_c^T Y \tilde{A}_c + \gamma^{-2} \tilde{A}_c^T P B_2 (I - \gamma^{-2} B_2^T P B_2)^{-1} B_2^T P \tilde{A}_c + M(P)$, 这里 $Y = P - \tilde{P}$, 因为 \tilde{A}_c 渐近稳定, 所以 $Y = \sum_{i=0}^{\infty} (\tilde{A}_c^i)^T [\gamma^{-2} \tilde{A}_c^T P B_2 (I - \gamma^{-2} B_2^T P B_2)^{-1} B_2^T P \tilde{A}_c + M(P)] \tilde{A}_c^i \geq 0$, 因而(32)式成立. 证毕.

下面的定理给出了使得无限时域 H_2 性能保证界 J_I 达到最小的状态反馈增益 K .

定理3. 存在一个 K 使得 J_I 在(30)式有一个满足(31)式的稳定解 $P=P^T \geq 0$ 的约束下达到最小, 当且仅当存在一个 $\epsilon > 0$, 使得方程

$$P = A^T S_2(P) A - [A^T S_2(P) B_1 + \bar{C}^T \bar{D}] V^{-1} [B_1^T S_2(P) A + \bar{D}^T \bar{C}] + \bar{C}^T \bar{C} \quad (33)$$

有一个稳定解 $P=P^T \geq 0$ (也即 $[I + \bar{B}(I - \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P] \{A - B_1 V^{-1} [B_1^T S_2(P) A + \bar{D}^T \bar{C}]\}$ 是渐近稳定的), 且

$$I - \bar{B}^T P \bar{B} > 0 \quad (34)$$

成立. 此时

$$K = -V^{-1} [B_1^T S_2(P) A + \bar{D}^T \bar{C}], \quad (35)$$

且

$$J_I = \text{tr}\{PB_2 B_2^T\}. \quad (36)$$

证明. 该定理的证明基本上与定理1的证明相同. 容易看出 J_I 的最小化等价于 P 在正半定意义上的最小化, 将(30)式的右边对 K 进行配方可知: 只有当 K 满足(35)式时, P 达到最小, 此时(30)式化为(33)式, 且由(31)式可得(34)式, 此时 $A_c + \bar{B}(I - \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P A_c$ 的渐近稳定性意味着 $[I + \bar{B}(I - \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P] \{A - B_1 V^{-1} [B_1^T S_2(P) A + \bar{D}^T \bar{C}]\}$ 的渐近稳定性. 很容易证明反过来定理也是成立的. 证毕.

由引理2以及定理3可得有如下定理.

定理4. 考虑系统(1), (2)式的时不变情形, 给定 $\gamma > 0$. 若存在一个 $\epsilon > 0$, 使得方程(33)式有一个稳定解 $P=P^T \geq 0$, 且(34)式成立, 则对于所有可容许的参数不确定, 由(35)式给出的状态反馈增益 K 可使闭环系统渐近稳定, 且 $\|G_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$, 同时能保证最坏情形 H_2 性能指标满足

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{F_k} E\{z_k^T z_k\} \leq \text{tr}\{PB_2 B_2^T\}.$$

该定理说明, 在满足定理所给条件下, 由(35)式给出的 K 能够保证闭环系统渐近稳定, 且 $\|G_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$, 同时为最坏情形 H_2 性能指标提供了一个最优上界.

可以看出, 定理4为同时含有范数有界参数不确定及未建模扰动的线性离散系统提供了一种鲁棒状态反馈控制器的设计方法, 它容许设计时可以在 H_2 性能保证界与 H_∞ 干扰

抑制性能之间进行权衡. 显然, 在给定 $\gamma > 0$ 的前提下, 为了得到最优的 H_2 性能保证界, 需要搜索尺度参数 ϵ . 另外, 当系统不含参数不确定时 (也即 $H=0, E_1=0, E_2=0$), 定理4中的控制器就化为文[10]中的混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器. 而当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时, 定理4中的控制器就化为文[3]中的最优保价状态反馈控制器.

5 仿真示例

考虑如下不确定线性离散系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0.7065 + \delta_k & 0.3380 \\ 0.5879 & 0.9573 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0.0852 \\ -0.3369 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k + \begin{bmatrix} 0.2002 \\ 0.2557 \end{bmatrix} \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k. \end{aligned}$$

这里 \mathbf{w}_k 是未知干扰, δ_k 为模型的不确定参数, 满足 $|\delta_k| \leq 0.15$. 取 $H = [1 \ 0]^T$, $E_1 = [0.15 \ 0]$, $E_2 = 0$. 考虑无限时域情形, 且要求给定的 H_∞ 干扰抑制水平 $\gamma = 3.5$.

用 Matlab 软件中 Toolbox 工具来进行仿真, 首先看看不考虑 H_∞ 干扰抑制性能时 (也即 $\gamma \rightarrow \infty$), 由定理4给出的状态反馈控制器的性能, 可以发现当 $\epsilon \in (0.0, 0.0297]$ 时, (33)式存在一个满足(34)式的正半定对称解, 且 $\epsilon = 0.0109$ 时, H_2 性能保证界达到其最小值 4.3098. 此时使得闭环系统渐近稳定的控制律为 $\mathbf{u}_k = [3.2481 \ 3.2129] \mathbf{x}_k$, 且奇异值 $\sigma[G_{zw}(e^{j\omega})]$ 与频率 ω 的关系如图1所示, 其中实线、虚线及点线分别为 $\delta_k = 0, \delta_k = -0.15$ 以及 $\delta_k = 0.15$ 的情形.

逐渐减小 γ 值, 可以得到不同 γ 值所对应的最优 H_2 性能保证界 (如表1所示), 其中 $\Delta(\epsilon)$ 为使得(33)式有一个满足(34)式的正半定对称解的 ϵ 取值区间, ϵ^* 为使得 H_2 性能保证界达到最小的 ϵ 值, $J(\epsilon^*)$ 为最优 H_2 性能保证界. 从表1可以看出: 随着 γ 值的减小, 相应 ϵ 的取值区间不断缩小, 且最优 H_2 性能保证界增大. 这说明提高干扰衰减水平需要牺牲最优 H_2 性能保证界作为代价. 虽然可以得到 γ 的最优值近似为 3.395, 但由于要求的 H_∞ 干扰抑制水平为 $\gamma = 3.5$, 因此无需为进一步提高 H_∞ 干扰抑制水平而牺牲最优 H_2 性能保证界.

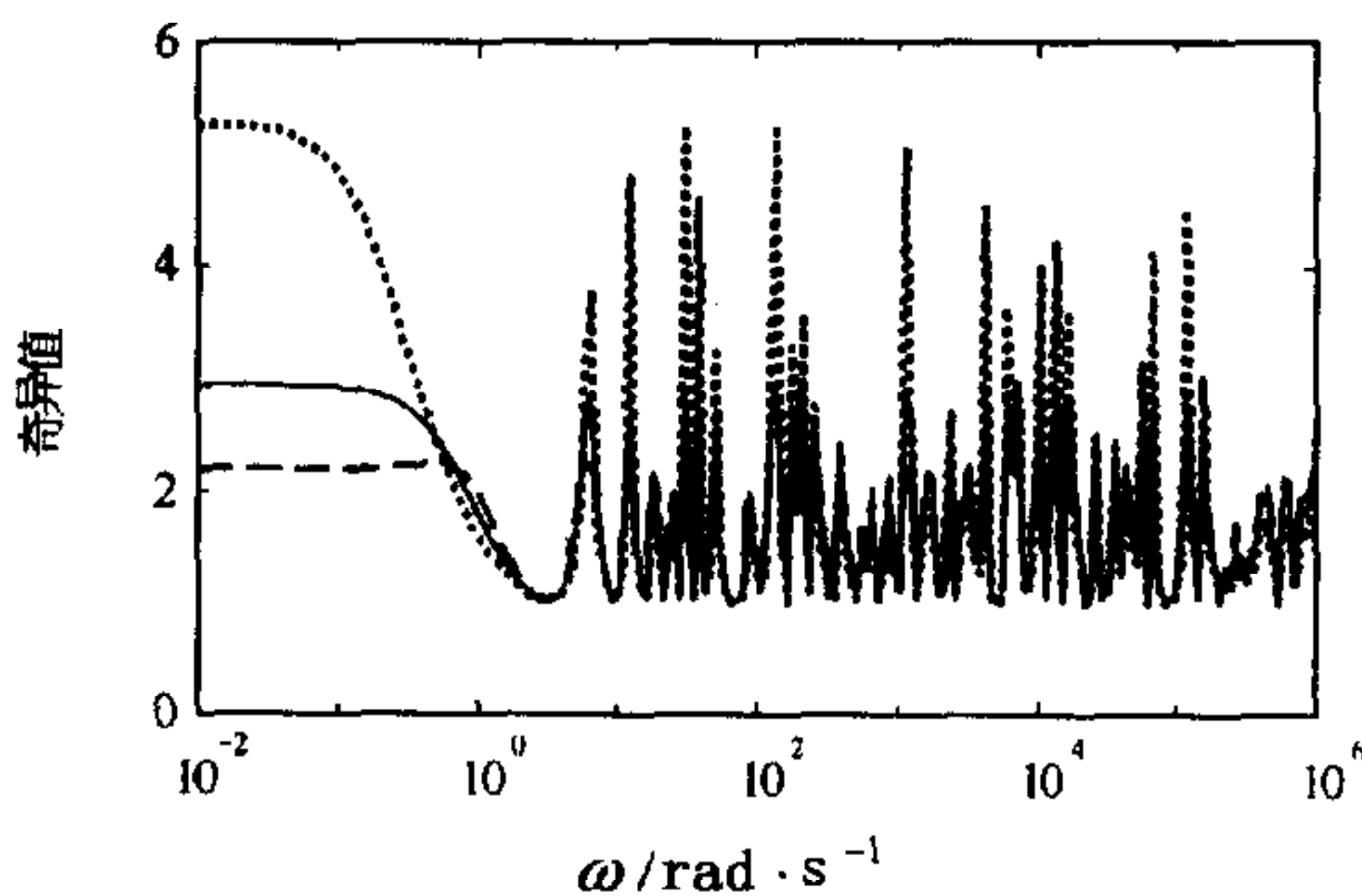


图1 $\gamma \rightarrow \infty$ 时, 闭环传函 $G_{zw}(z)$ 的奇异值

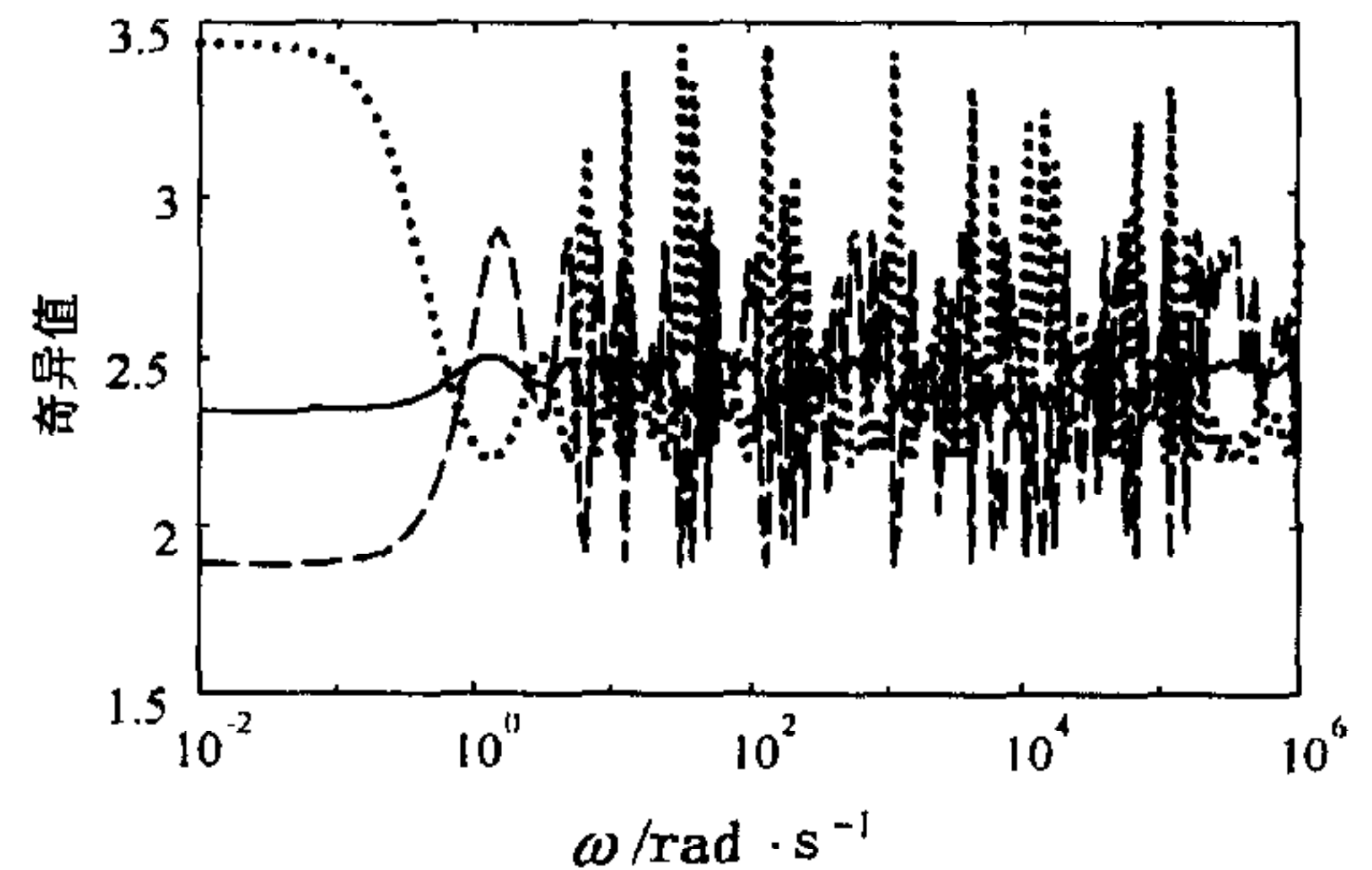


图2 $\gamma = 3.5$ 时, 闭环传函 $G_{zw}(z)$ 的奇异值

表1 不同 γ 值所对应的最优 H_2 性能保证界

γ 值	∞	10	5	4	3.5	3.4
$\Delta(\epsilon)$	(0.0, 0.0297]	[0.0006, 0.0273]	[0.0008, 0.0206]	[0.0016, 0.0152]	[0.0033, 0.0095]	[0.0051, 0.0064]
ϵ^*	0.0109	0.0106	0.0102	0.0098	0.0095	0.0064
$J(\epsilon^*)$	4.3098	4.5094	5.2553	6.0237	6.9021	7.5207

当 $\gamma=3.5$ 时,可以发现当 $\epsilon \in [0.0033, 0.0095]$ 时, (33) 式存在一个满足 (34) 式的正半定对称解, 且 $\epsilon=0.0095$ 时, H_2 性能保证界达到其最小值 6.9021, 此时使得闭环系统渐近稳定的控制律为 $u_k = [5.3459 \quad 5.2072]x_k$, 且奇异值 $\sigma[G_{zw}(e^{j\omega})]$ 与频率 ω 的关系如图 2 所示, 其中实线、虚线及点线分别为 $\delta_k=0$ 、 $\delta_k=-0.15$ 以及 $\delta_k=0.15$ 的情形.

6 结论

本文解决了一类含有范数有界参数不确定线性离散系统的具有 H_∞ 性能界的鲁棒 LQG 状态反馈控制问题, 并考虑了有限时域时变及无限时域时不变两种情形. 给出了系统在满足给定的 H_∞ 干扰抑制水平条件下, 其最坏情形 H_2 性能指标所要求的一个上界, 并导出了“最优的”状态反馈控制器优化了该界. 所得的控制器对于所有可容许的参数不确定都能保证满足给定的 H_∞ 干扰抑制水平, 并为最坏情形 H_2 性能指标提供了一个最优上界, 而且对于无限时域时不变情形, 还能保证闭环系统渐近稳定. 本文的方法容许设计时在 H_2 性能保证界与 H_∞ 干扰抑制性能之间进行权衡. 最后仿真结果也验证了方法的有效性.

参 考 文 献

- Francis B A. A course in H_∞ Control Theory. New York: Springer-Verlag, 1987
- Kwakernaak H. Robust control and H_∞ -optimization; tutorial paper. *Automatica*, 1993, **29**(2): 255~273
- Petersen I R, McFarlane D C, Rotea M A. Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain linear systems. *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, 1998, **8**(8): 649~657
- Geromel J C, Peres P L D, de Souza S R. H_2 guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *Int. J. Contr.*, 1993, **57**(4): 853~864
- Bambang R T, Shimemura E, Uchida K. Discrete-time H_2/H_∞ robust control with state feedback. In: Proc. Amer. Contr. Conf. Boston, MA, 1991. 1172~1173
- Geromel J C, Peres P L D, de Souza S R. A convex approach to the mixed H_2/H_∞ control problem for discrete-time uncertain systems. *SIAM J. Contr. Optim.*, 1995, **33**(6): 1816~1833
- 吴淮宁, 尤昌德. 具有 H_∞ 性能界的鲁棒 LQG 控制. 西安交通大学学报, 1997, **31**(12): 26~32
- Xie L, de Souza C E, Wang Y. Robust control of discrete time uncertain dynamical systems. *Automatica*, 1993, **29**(4): 1133~1137
- De Souza C E, Xie L. On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback H_∞ controllers. *Syst. Contr. Lett.*, 1992, **18**(1): 61~71
- Haddad W M, Bernstein D S, Mustafa D. Mixed-norm H_2/H_∞ regulation and estimation; the discrete-time case. In: Proc. Amer. Contr. Conf. Boston, MA, 1991. 1159~1164

吴淮宁 1972年生, 1992年毕业于山东建材学院自动化系, 获学士学位. 同年进入西安交通大学信控系自控专业学习, 1997年6月获博士学位. 1997.8至1999.7在北京理工大学电子工程系做博士后. 现为北京航空航天大学自动控制系副教授. 主要研究方向为 H_∞ 控制与估计, 鲁棒控制与滤波, 自适应信号处理.