第26卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 26,No. 2
2000年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar. ,2000

短文

用滑动模态实现一类非完整动力学系统的指数镇定1)

王朝立 霍 伟
(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)

摘 要 对于基变量具有对称性的一类确定非完整动力学系统，直接基于该系统模型，利用滑动模态的方法设计了指数镇定控制器，得到了状态空间中的一个区域. 当系统初始状态位于该区域内时，系统状态是指数收敛的，而当初始状态不在该区域内时，可用非零的开环常值控制使系统状态在有限时间内进入这一区域. 因此，它是一种简洁的全局镇定律. 最后，用仿真结果验证了这一方法的有效性.

关键词 非完整动力学系统，滑动模态，镇定.

EXPONENTIAL STABILIZATION OF A NONHOLONOMIC DYNAMIC SYSTEM VIA SLIDING MODES

WANG Chaoli HUO Wei
(The Seventh Research Division, Beijing Univ. of Aero. and Astro., Beijing 100083)

Abstract Directly based on the system dynamic model, for certain nonholonomic dynamic systems with symmetry base variables a sliding mode approach is exploited to design the controller and obtain a region in the state space. If the initial states of the system belong to the region, the controller can exponentially stabilize the system; otherwise, any nonzero constant controls can be applied to make the states enter the region in a finite time. So this stabilizing law is a simple and global law. Finally, simulation result shows that the approach is effective.

Key words Nonholonomic dynamic system, sliding modes, stabilization.

1 引言

由于非完整控制系统不满足 Brockett 关于光滑反馈镇定的必要条件[1]，所以不能用光滑的纯状态反馈使其镇定. 目前研究的方法大致有三类，即非光滑控制器，时变光滑控

1)国家自然科学基金资助项目.
收稿日期 1998-05-05 收修改稿日期 1999-03-29

制器,或者这两类的混合[2]. 但这些控制器的设计均是基于所受非完整约束而导出的运动学模型,而没有考虑系统的动力学特性. 文献[3,4]讨论了非完整动力学系统的镇定问题,但不是直接基于动力学模型本身进行设计的,设计复杂且收敛速度慢. 本文采用滑动模态控制方法把文献[5]的运动学结果推广到了非完整动力学系统,通过直接基于系统模型本身设计控制器使系统状态指数镇定到平衡点.

2 问题的提出

在文献[5]中,Bloch 考虑了 Brockett 提出的第一个非完整积分器的例子

$$\dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{z} = yu - xv. \tag{1}$$

Bloch 只是对式(1)形式的非完整运动学模型给出了控制器设计. 然而实际系统是动力学的,对系统施加的是广义力而不是广义速度,况且他所建议的广义速度控制是不连续的,在实际动力学系统上难以实现. 基于以上原因,本文考虑运动学系统(1)加上积分器后而构成的如下动力学系统的指数镇定问题

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{z} = yu - xv, \\ \dot{u} = \tau_1, \dot{v} = \tau_2. \end{cases} \tag{2}$$

3 控制器设计

对系统(2)有如下结果

定理. 任给 $b>0$,取两正数 a,m 满足

$$4a > b^2, m \leqslant \frac{\sigma}{8}\left(\frac{b_2}{a} - 1\right), \tag{3}$$

其中 $\sigma=a+1-\sqrt{(a-1)^2+b^2}>0$. 设

$$A = b(x^2 + y^2) + 2(xu + yv), \quad S = z + \frac{1}{b}\dot{z} = z + \frac{1}{b}(yu - xv),$$

控制律为

$$\begin{aligned} \tau_1 &= - ax - bu - (by + 2v)m\mathrm{sign}(AS), \\ \tau_2 &= - ay - bv + (bx + 2u)m\mathrm{sign}(AS), \end{aligned} \tag{4}$$

则当初值属于由如下不等式

$$\left(\frac{b^2}{2a} - \frac{1}{2} - \frac{4m}{\sigma}\right)(x^2 + y^2) + \frac{b}{a}\left(1 - \frac{4m}{\sigma}\right)(xu + yv) + \left(\frac{1}{2a} - \frac{4m}{a\sigma}\right)(u^2 + v^2) > \frac{1}{m}|S|, \tag{5}$$

定义的区域 D 时,闭环系统(2)~(4)满足:x,y,u,v 均以速率 $b/2$指数镇定到原点;存在有限时间 T,当 $t\geqslant T$ 时,z 以速率 b 指数镇定到原点.

证明. 取

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = bP,$$

则由(3)式知 P 为正定阵,且满足 $\sigma I\leqslant P, P\geqslant PC+C^{\mathrm{T}}P=-Q$. 取子空间$(x,y,u,v)$上的

候选 Lyapunov 函数为

$$V=[x\quad u]P\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix}+[y\quad v]P\begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix}.$$

因 $P\geqslant\sigma I$,故

$$V\geqslant\sigma(x^2+y^2+u^2+v^2). \tag{6}$$

对沿闭环系统求导后化简可得 $\dot V=-bV$,从而 $V(t)=V_0e^{-bt}$. 其中 V_0为 V 在 $t=0$时的初值. 再根据(6)式知 $|\xi|^2\leqslant V=V_0e^{-bt}$,即 $|\xi|\leqslant\sqrt{\frac{V_0}{\sigma}e^{-bt}}$,其中 ξ 表示 x,y,u,v 中的任意一个,从而可推知 x,y,u,v 以速率 $b/2$指数镇定到原点.

另一方面,对 S 沿闭环系统求导得

$$\dot S=yu-xv+\frac{1}{b}(y\tau_1-x\tau_2)=-m|A|\mathrm{sign}(S),$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S^2)=2S\dot S=-2m|AS|\leqslant 0 \tag{7}$$

从而 S^2是非增的,故 $|S|$ 是非增的. 另一方面,若设 S_0为 $t=0$时 S 的初值,则对(7)式积分可得

$$|S|=|S_0|-m\int_0^t|A(\tau)|\mathrm{d}\tau.$$

利用式(5)可以证明存在有限时间 T 使得 $|S_0|<m\int_0^T|A(\tau)|\mathrm{d}\tau$. 由 $|S|$ 的非增性可知 $|S|$ 必于有限时间 T 后到达滑动面 $S=0$并保持其上,从而有

$$S(t)=z(t)+\frac{1}{b}\dot z(t)=0,\qquad t\geqslant T,$$

可知 T 时刻后 $z(t)$以速率 b 指数镇定到原点.

如果初值不属于区域 D,则可用任意非零常值控制(两个分量均不为零)使系统状态在有限时间内进入 D 中,因此定理中所描述的控制律可视为全局控制律.

4 仿真

选取 $b=1$,按(3)式取 $a=0.275$,$m=0.013$,可算出相应于(5)式初值应满足的不等式为

$$1.3(x^2+y^2)+1.1(xu+yv)+0.51(u^2+v^2)>\frac{1}{77}|z+yu-xv|.$$

取系统(2)的控制律为(4)式,设初值$[x_0\quad y_0\quad z_0]=[\pi/4\quad 20\quad 10]$,$[u_0\quad v_0]=[0\quad 0]$,易检验该初值满足上述条件. 图1和图2分别给出了 x,y,z,u,v 的指数响应曲线. 仿真结果证实了本文方法的正确性.

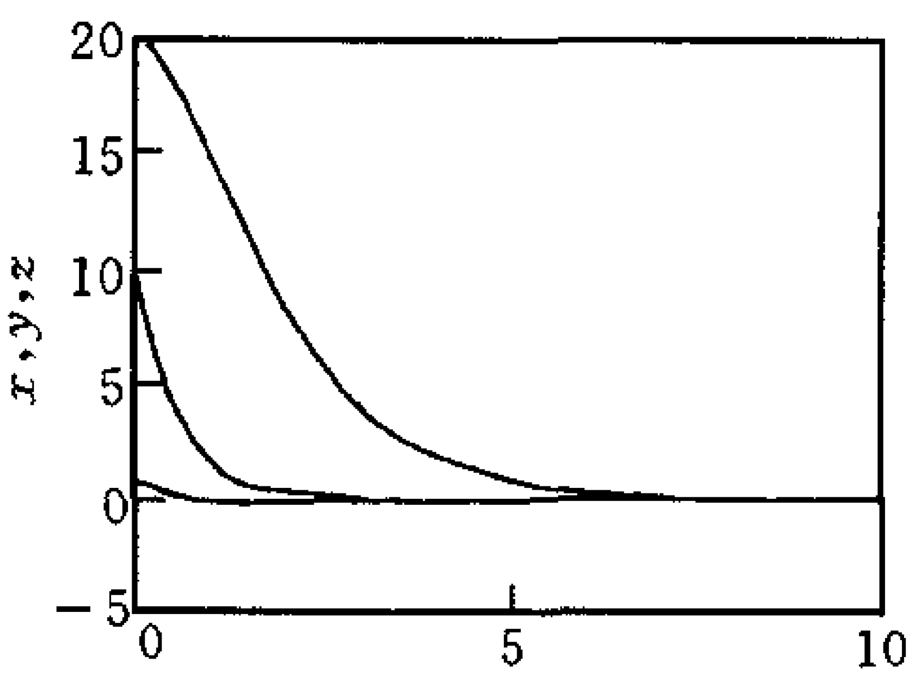

图1　x,y,z 三个分量的响应曲线

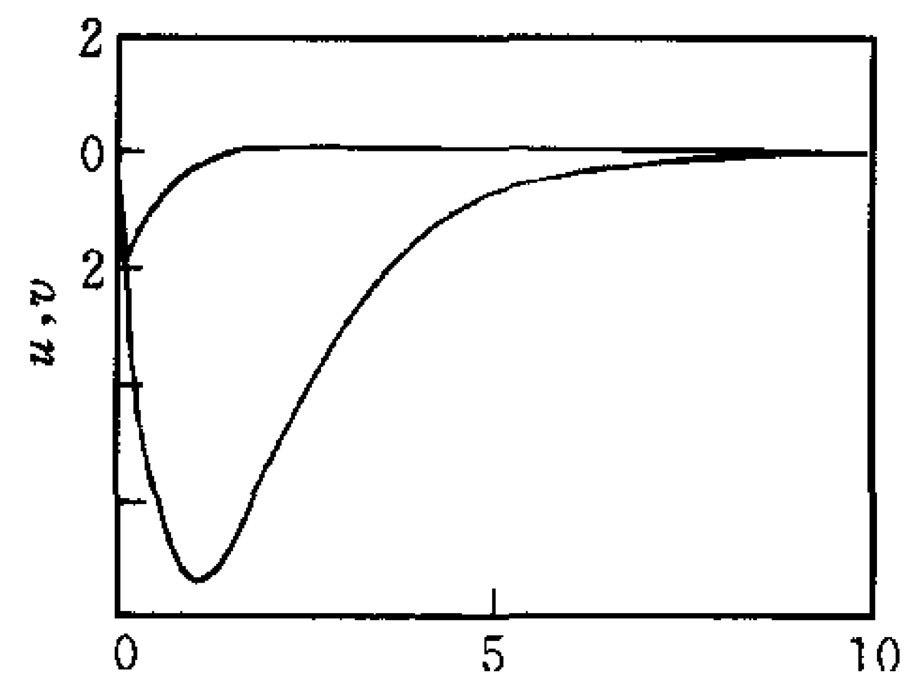

图2　u,v 两个分量的响应曲线

参 考 文 献

1 Brockett R W. Asymptotic Stability and Feedback Stabilization. In:Differential Geometric Control Theory. Boston: Birkhauser,1983,181～208

2 Kolmanovsky H Y,McClamroch N H. Development in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems*, 1995,December. 20～36

3 Kolmanovsky I,McClamroch H. Hybrid feedback laws for a class of cascade nonlinear control systems. *IEEE Trans* 1996,**AC**－**41**(9):1271～1282

4 M'closkey R T,Murray R M. Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *IEEE Trans*,1997,**AC**－**42**(5):614～628

5 Bloch A M,Drakunov S. Stabilization of a nonholonomic systems via sliding modes,In:Proc. 33rd IEEE CDC,Lake Buena Vista,FL,December,1994,2961～2963

王朝立　北京航空航天大学第七研究室博士生. 研究领域包括:机器人动力学与控制、鲁棒控制、非线性系统控制.

霍　伟　北京航空航天大学第七研究室主任、教授、博士生导师. 研究领域包括:机器人动力学与控制、智能控制、非线性系统控制等.