一类模糊神经网络的函数逼近能力1)

赵明洁 诸 静
（浙江大学电机系 杭州 310027）

摘 要 根据多元Fourier变换理论提出一种多元函数的积分变换方法. 据此讨论一类模糊神经网络作为函数逼近器时的逼近误差与其结构关系，得到模糊神经网络的逼近误差与其隐含层的节点数成反比的结论. 并论证了模糊神经网络的函数逼近精度与输入变量数无关.

关键词 多元Fourier变换，函数积分变换，模糊神经网络.

THE APPROXIMATION ABILITY OF FUZZY NEURAL NETWORKS

ZHAO Mingjie ZHU Jing
(*Department of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract A new theorem on an integral transform of multi-variable functions is presented based on the multi-variable Fourier transform theory. Using this theorem, the relationship between the approximation error and the structure of the fuzzy function approximator is discussed. And the approximation accuracy, which is inversely proportional to the number of hidden units of the fuzzy function approximator, is obtained. This result shows that the approximation accuracy is independent of the input dimensions.

Key words Multi-variable Fourier transform, integral transform, fuzzy neural networks.

1 引言

多层前馈神经网络具有逼近任意连续函数的能力[1,5]和便于学习的BP算法，但其网络的连接权值和神经元阈值等参数的物理意义不明确，这些参数的初值只能随机选取，因此网络的训练时间较长，且容易陷入局部极小点. 而模糊神经网络参数的物理意义明确，参数初值的选择可以和实际系统联系起来，能较好地克服多层前馈网络的缺点，而且模糊神经网络也能逼近任意连续函数，故近年来引起越来越多学者的重视.

考虑一类三层结构的模糊神经网络，采用单点模糊化，加权平均解模糊以及和-积模

1) 国家自然科学基金资助项目.
收稿日期 1998-09-29 收修改稿日期 1999-02-20

糊推理方法[2],并取规则库中模糊集合的隶属函数为高斯函数. 考虑到一般情况下,规则前提部的模糊集合在整个论域均匀分布,故模糊神经网络的输入输出表达式可写为

$$N(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{L}\theta_l \cdot \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_{il}^2(x_i - m_{il})^2\Big). \quad (\boldsymbol{x} \in R^n). \tag{1}$$

这里称(1)式所示的模糊神经网络为模糊函数逼近器,简称模糊逼近器. 由于本文主要讨论模糊逼近器的函数逼近能力,故在下面的讨论中假设目标函数是已知的.

2　多元函数的 Fourier 变换和积分表示

2.1　多元 Fourier 变换及其性质

定义1.　设函数 $f \in L^2(R^n)$,则其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n) = \int_{R^n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\cdot\exp(-j\cdot\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

记 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{w}=[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_n]^{\mathrm{T}}$,$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$. 则上式可简写为

$$\hat{f}(\boldsymbol{w}) = \int_{R^n} f(\boldsymbol{x})\cdot\exp(-j\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

关于多元 Fourier 变换,有以下性质,其证明与单变量情形类似[3].

引理1. 设函数 $f,g\in L^2(R^n)$,定义 f,g 的内积为:$(f,g)=\int_{R^n} f(\boldsymbol{x})g^*(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$,其中 $g^*(\boldsymbol{x})$表示 $g(\boldsymbol{x})$的共轭复数. 则$(\hat{f},\hat{g})=(2\pi)^n(f,g)$,(Parseval 恒等式).

对 n 维矢量 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$,$n$ 元函数 $f(\boldsymbol{x})$及多重指标 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\geqslant 0$是整数,约定下列记号

$$D(\boldsymbol{a}) = \mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},\quad \Pi(\boldsymbol{a}) = a_1a_2\cdots a_n,$$
$$\boldsymbol{x}^\beta = x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n},\quad \partial^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1}\partial_{x_2}^{\beta_2}\cdots\partial_{x_n}^{\beta_n},\quad |\beta| = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n.$$

引理2.　设 $\boldsymbol{b}\in R^n$,$g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$,则 $\hat{g}(\boldsymbol{w})=\exp(j\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\hat{f}(\boldsymbol{w})$.

引理3.　设函数 $f(\boldsymbol{x})\in L^2(R^n)$的各阶偏导数存在,且 $g(\boldsymbol{x})=\partial^\beta f(\boldsymbol{x})\in L^2(R^n)$,则

$$\hat{g}(\boldsymbol{w}) = j^{|\beta|}\boldsymbol{w}^\beta\hat{f}(\boldsymbol{w}). \tag{3}$$

2.2　多元函数的积分表示

定义2. 称定义在 R^n 上的函数对(φ,ψ)为相容函数对,如果(φ,ψ)满足下列条件:

1) $\varphi,\psi\in L^2(R^n)\cap L^1(R^n)$且有界,从而其 Fourier 变换 $\hat{\varphi},\hat{\psi}$ 存在;

2) $\int_{R^n}|\hat{\varphi}^*(\boldsymbol{w})\hat{\varphi}(\boldsymbol{w})(\Pi(\boldsymbol{w}))^{-1}|\mathrm{d}\boldsymbol{w}<\infty$ 且 $C_{\varphi,\psi}=\int_{R^n}\hat{\varphi}^*(\boldsymbol{w})\hat{\psi}(\boldsymbol{w})\,|(\Pi(\boldsymbol{w})|^{-1}|\mathrm{d}\boldsymbol{w}\neq 0$.

定义3.　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in R^n$,$A=D(\boldsymbol{a})$,$f(\boldsymbol{x})\in L^1(R^n)$或有界,称下式定义的$2n$ 元函数 T_f 为函数 f 关于相容函数对(φ,ψ)的积分变换

$$T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = C_{\varphi,\psi}^{-1}\int_{R^n}\varphi^*(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

由 $f(\boldsymbol{x})\in L^1(R^n)$或有界,以及 $\varphi\in L^1(R^n)$且有界,可知 $T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$存在且为有界函数,但 $T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$未必在 R^{2n}上绝对可积. 下述定理1给出了积分变换的逆变换.

定理1.　设函数 $f(\boldsymbol{x})\in L^1(R^n)$,或 $f(\boldsymbol{x})$有界,且其关于相容函数对(φ,ψ)的积分变换 $T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in L^1(R^{2n})$,则

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{R^{2n}} \psi(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \mathrm{d}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{b}. \tag{5}$$

证. 由 T_f 绝对可积及 ψ 有界，(5)式右边 $\int_{R^{2n}} \psi(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\mathrm{d}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{b}$ 的积分有定义，且以下证明中的积分顺序可交换：

$$\int_{R^{2n}} \psi(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \mathrm{d}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{b} = C_{\varphi,\psi}^{-1} \int_{R^{2n}} \psi(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) \int_{R^n} \varphi^*(A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}) f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{b} =$$

$$C_{\varphi,\psi}^{-1} \int_{R^{2n}} f(\boldsymbol{y}) \left(\int_{R^n} \psi(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) \varphi^*(A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}) \mathrm{d}\boldsymbol{b} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

把上式中的 $\psi(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$，$\varphi(A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b})$ 看作 $\boldsymbol{b}$ 的函数，则由 Parseval 恒等式和引理2有

$$\int_{R^{2n}} \psi(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \mathrm{d}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{b} =$$

$$(2\pi)^{-n} C_{\varphi,\psi}^{-1} \int_{R^{2n}} f(\boldsymbol{y}) \left(\int_{R^n} \hat{\psi}(\boldsymbol{w}) \hat{\varphi}^*(\boldsymbol{w}) \exp(-j\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} A(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{w} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{y} =$$

$$(2\pi)^{-n} C_{\varphi,\psi}^{-1} \int_{R^{2n}} f(\boldsymbol{y}) \hat{\psi}(\boldsymbol{w}) \hat{\varphi}^*(\boldsymbol{w}) \left(\int_{R^n} \exp(-j\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} W(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{a} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{w}\mathrm{d}\boldsymbol{y} =$$

$$C_{\varphi,\psi}^{-1} \int_{R^{2n}} f(\boldsymbol{y}) \hat{\psi}(\boldsymbol{w}) \hat{\varphi}^*(\boldsymbol{w}) \delta(W(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) \mathrm{d}\boldsymbol{w}\mathrm{d}\boldsymbol{y} =$$

$$C_{\varphi,\psi}^{-1} \int_{R^n} \hat{\psi}(\boldsymbol{w}) \hat{\varphi}^*(\boldsymbol{w}) |\det W|^{-1} \mathrm{d}\boldsymbol{w} \cdot \int_{R^n} f(\boldsymbol{y}) \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}).$$

其中 $W = D(\boldsymbol{w})$，上述推导后两个等号分别用到公式 $\delta(W\boldsymbol{x}) = |\det W|^{-1} \cdot \delta(\boldsymbol{x})$[4]以及常数 $C_{\varphi,\psi}$的定义.

3 模糊逼近器的函数逼近误差

3.1 模糊逼近器的函数逼近误差与其结构的关系

考察(1)式，令 $\boldsymbol{a}_l = [\lambda_{1l}, \lambda_{2l}, \cdots, \lambda_{nl}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{m}_l = [m_{1l}, m_{2l}, \cdots, m_{nl}]^{\mathrm{T}}$，$A_l = D(\boldsymbol{a}_l)$. 则(1)式可写成 $N(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{L} \theta_l \cdot \exp(-(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_l)^{\mathrm{T}} A_l^{\mathrm{T}} A_l (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_l))$. 取 $\psi(\boldsymbol{x}) = \exp(-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})$，则

$$N(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=1}^{L} \theta_l \cdot \psi(A_l \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_l), \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{b}_l = -A_l \boldsymbol{m}_l$. 比较(5)，(6)两式，可知(6)式是(5)式的积分近似. 故只要适当选取参数 $\theta_l, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{b}_l$，且当 L 足够大时，就可以由 $N(\boldsymbol{x})$以任意小的误差来近似函数 $f(\boldsymbol{x})$.

对绝对可积或有界函数 $f(\boldsymbol{x})$，取含 L 个隐含层节点的逼近器来近似，设其输入输出函数为 $N_L(\boldsymbol{x})$，定义近似误差为

$$E_L = \|N_L - f\|_\mu^2 = \int_{R^n} [N_L(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})]^2 \mu(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{7}$$

上式中 $\mu(\boldsymbol{x})$是加权函数，满足归一化条件 $\int_{R^n} \mu(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$.

讨论 E_L 与隐含层节点数 L 的关系，设 $T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in L^1(R^{2n})$，由 $f(\boldsymbol{x}) \in R$ 和定理1有

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{R^{2n}} \mathrm{Re}T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \psi(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) \mathrm{d}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{b} = \int_{R^{2n}} c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \psi(A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \mathrm{d}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{b}, \tag{8}$$

其中 $c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \gamma \cdot \mathrm{sign}(\mathrm{Re}T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))$，$p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \gamma^{-1} \cdot |\mathrm{Re}T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$，

$$\gamma = \int_{R^{2n}} |\mathrm{Re}T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \mathrm{d}\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{b}.$$

由 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \geqslant 0$ 及 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 在 R^{2n} 上的积分等于1，可把 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 看作随机矢量 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的概率密度函数. 固定(8)式中的 $\boldsymbol{x}$，把 $c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\psi(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$ 看作 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的函数，由(8)式可知其数学期望为 $E[c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\psi(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})]=f(\boldsymbol{x})$. 由 $\psi(\boldsymbol{x})=\exp(-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) \leqslant 1$ 及 $c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的定义得：$\mathrm{Var}[c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\psi(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})]=\gamma^2 E[\psi^2(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})]-(E[c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\psi(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})])^2 \leqslant \gamma^2 - f^2(\boldsymbol{x})$，其中 $\mathrm{Var}[c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\psi(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})]$ 表示 $c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\psi(A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$ 的方差. 考察如下函数

$$N_L(\boldsymbol{x}) = L^{-1} \cdot \sum_{l=1}^{L} c(\boldsymbol{a}_l,\boldsymbol{b}_l)\psi(A_l\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_l), \tag{9}$$

式中 $A_l = D(\boldsymbol{a}_l)$，$(\boldsymbol{a}_l,\boldsymbol{b}_l)$ 是相互独立的随机矢量，且都具有概率密度函数 $p(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，则 $N_L(\boldsymbol{x})$ 的数学期望 $E[N_L(\boldsymbol{x})]$ 和方差 $\mathrm{Var}[N_L(\boldsymbol{x})]$ 分别是

$$\mathrm{E}[N_L(\boldsymbol{x})] = f(\boldsymbol{x}), \tag{10}$$

$$\mathrm{Var}[N_L(\boldsymbol{x})] = L^{-1} \cdot \mathrm{Var}[c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\psi(A\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})] \leqslant L^{-1}(\gamma^2 - f^2(\boldsymbol{x})), \tag{11}$$

则
$$\mathrm{E}\left[\int_{R^n} (N_L(x) - f(\boldsymbol{x}))^2 \mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right] = \int_{R^n} \mathrm{E}[(N_L(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}))^2]\mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$

$$\int_{R^n} \mathrm{Var}[N_L(\boldsymbol{x})]\mu(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant L^{-1}(\gamma^2 - \|f\|_\mu^2) \leqslant L^{-1}\gamma^2. \tag{12}$$

不等式(12)说明 $\|N_L - f\|_\mu^2$ 的数学期望的上界为 $L^{-1}(\gamma^2 - \|f\|_\mu^2)$，从而一定存在一个形如(9)式的 $N_L(\boldsymbol{x})$，使得 $\|N_L - f\|_\mu^2 \leqslant L^{-1}(\gamma^2 - \|f\|_\mu^2) \leqslant L^{-1}\gamma^2$，由此得

定理2. 设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 满足定理1的条件，则必存在模糊逼近器 $N_L(\boldsymbol{x})$ 满足

$$E_L = \|N_L - f\|_\mu^2 \leqslant L^{-1}(\gamma^2 - \|f\|_\mu^2), \tag{13}$$

其中 L 是模糊逼近器的隐含层节点数，γ 如(8)式定义.

推论. 模糊逼近器的逼近误差与加权函数 $\mu(\boldsymbol{x})$ 有关，但其上界 $L^{-1}\gamma^2$ 与 $\mu(\boldsymbol{x})$ 无关.

3.2 模糊逼近器的存在条件

定理2说明模糊逼近器的函数逼近误差与其隐含层节点数成反比，该结论是在下述两个条件下得到的：1) 对 $\psi(\boldsymbol{x})=\exp(-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})$ 存在函数 φ，使得 (φ,ψ) 为相容函数对，从而相应的积分变换 T_f 存在；2) 目标函数 $f(\boldsymbol{x}) \in L^1(R^n)$ 或有界，且 $T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in L^1(R^{2n})$. 考虑定义在 R^n 上的分段函数：

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \exp(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}/(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - 1)), & \text{if } \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < 1, \\ 0, & \text{if } \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant 1. \end{cases}$$

由于 $\rho(\boldsymbol{x})$ 在其分段处 $(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1)$ 的各阶偏导数存在且连续，故 $\rho(\boldsymbol{x})$ 的各阶偏导数存在. 令函数 $\varphi(\boldsymbol{x}) = \partial^{(2,2,\cdots,2)}\rho(\boldsymbol{x})$，则可以证明 (φ,ψ) 是一个相容函数对.

定理3. (φ,ψ) 是一个相容函数对.

证明. 只要证 (φ,ψ) 满足相容函数对的两个条件.

1) 由于 $\rho(\boldsymbol{x})$ 仅在 R^n 的单位球内不为零，由 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的定义，$\varphi(\boldsymbol{x})$ 也仅在单位球内不为零，故 $\varphi \in L^2(R^n) \cap L^1(R^n)$. 又由 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的连续性知 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 有界，$\psi(\boldsymbol{x})$ 显然满足条件1).

2) 设 $\phi(\boldsymbol{x}) = \partial^{(1,1,\cdots,1)}\rho(\boldsymbol{x})$，则 $\phi \in L^2(R^n)$. 由引理3知 $\hat{\varphi}(\boldsymbol{w}) = (-1)^n(\Pi(\boldsymbol{w}))^2\hat{\rho}(\boldsymbol{w})$，$\hat{\phi}(\boldsymbol{w}) = j^n\Pi(\boldsymbol{w})\hat{\rho}(\boldsymbol{w})$，再由 Cauchy 不等式及 Parseval 恒等式知

$$\int_{R^n} |\hat{\varphi}^*(\boldsymbol{w})\hat{\psi}(\boldsymbol{w})(\Pi(\boldsymbol{w}))^{-1}|\mathrm{d}\boldsymbol{w} = \int_{R^n} |j^n\Pi(\boldsymbol{w})\hat{\rho}^*(\boldsymbol{w})\hat{\psi}(\boldsymbol{w})|\mathrm{d}\boldsymbol{w} \leqslant$$

$$\left(\int_{R^n}|j^n\Pi(\boldsymbol{w})\hat{\rho}(\boldsymbol{w})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{w}\cdot\int_{R^n}|\hat{\psi}(\boldsymbol{w})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{w}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$(2\pi)^n\left(\int_{R^n}|\phi(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\int_{R^n}|\psi(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

再按定义2中$C_{\varphi,\psi}$算式计算知，条件$C_{\varphi,\psi}\neq 0$也满足. 故(φ,ψ)是一个相容函数对.

对上述相容函数对(φ,ψ)，目标函数$f(\boldsymbol{x})$应满足什么条件才能使$T_f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$绝对可积是一个较复杂的问题. 本文仅对单变量情况给出以下充分条件.

在单变量情形下，$\psi(t)=\exp(-t^2)$，$\varphi(t)=\rho''(t)$，即$\varphi(t)$是$\rho(t)$的二阶导数，其中$\rho(t)=\begin{cases}\exp(t^2/(t^2-1)), & \text{if } t^2<1,\\ 0, & \text{if } t^2\geqslant 1.\end{cases}$ 相应的 Fourier 变换为 $\hat{\psi}(\omega)=\sqrt{\pi}\exp(-\omega^2/4)$，$\hat{\varphi}(\omega)=-\omega^2\hat{\rho}(\omega)$. 由 Fourier 变换的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}t^k\varphi(t)\mathrm{d}t=(-j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega})^k\hat{\varphi}(\omega)|_{\omega=0}$ 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^k\varphi(t)\mathrm{d}t=0,\quad(k=0,1).\tag{14}$$

定理4. 设单变量函数$f(t)$连续可导，且满足条件：1)具有紧支撑，即存在$C>0$；当$|t|\geqslant C$时，$f(t)=0$；2)存在常数$M>0,\alpha>0$，使得，$|f'(t_1)-f'(t_2)|<M|t_1-t_2|^\alpha$，则$f(t)$关于上述$(\varphi,\psi)$的积分变换$T_f(a,b)\in L^1(R^2)$，$(a,b\in R)$.

证明．
$$|T_f(a,b)|=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(ax+b)f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)f(\frac{y-b}{a})\mathrm{d}y\right|=$$
$$\left|\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)[f(\frac{-b}{a})+\frac{y}{a}f'(\frac{\delta y-b}{a})]\mathrm{d}y\right|=$$
$$\left|\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\ \frac{y}{a}[f'(\frac{\delta y-b}{a})-f'(\frac{-b}{a})]\mathrm{d}y\right|\leqslant$$
$$\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}M\left|\frac{y}{a}\right|^{1+\alpha}|\varphi(y)|\mathrm{d}y=\frac{C_1}{|a|^{2+\alpha}},$$

式中C_1为常数，$0\leqslant\delta\leqslant 1$，且其中用到拉格朗日定理及(14)式. 又当$|t|\geqslant C$时，$f(t)=0$；当$|t|\geqslant 1$时，$\varphi(t)=0$. 故对固定的$a$，当$|b|\geqslant C\cdot|a|+1$时，$T_f(a,b)=0$. 所以，$\int_{-\infty}^{+\infty}|T_f(a,b)|\mathrm{d}b=\int_{-1-C|a|}^{1+C\cdot|a|}|T_f(a,b)|\mathrm{d}b\leqslant 2C_1|a|^{-2-\alpha}(1+C\cdot|a|)$，又易知$\int_{-\infty}^{+\infty}|T_f(a,b)|\mathrm{d}b$关于$a$有界，故$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|T_f(a,b)|\mathrm{d}b\mathrm{d}a<\infty$，即$T_f(a,b)\in L^1(R^2)$.

4 结论

本文主要讨论一类模糊神经网络作为函数逼近器时的性能. 通过多元函数的积分表示，详细剖析了模糊逼近器的结构，从网络结构角度说明模糊逼近器可以任意精度逼近一个多元函数. 借用积分表示方法以及随机编码思想和统计理论，证明了用模糊逼近器近似一类多元函数时，误差上限与模糊逼近器隐含层的节点数成反比，而与自变量维数无关. 这个结论为确定模糊逼近器的结构提供了较好的指导，当精度要求提高时，模糊逼近器的规模随之线性增长，而非指数增长，所以模糊逼近器的结构不会太复杂. 由于自然界实际存在的信号函数大多能满足定理1的条件，因此本文的结论对相当广泛的一类函数都成

立.通过构造较简单的相容函数对，利用本文结论有助于发现一些新的模糊神经网络的训练算法.

参 考 文 献

1 Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 1989, **2**: 303～314

2 Wang L X. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Fuzzy Syst.*, 1993, **1**(2): 146～155

3 崔锦泰.小波分析导论.西安：西安交通大学出版社.1995

4 张恭庆，林源渠.泛函分析讲义.北京：北京大学出版社.1987

5 Noboru. M. An integral representation of functions using three-layered networks and their approximation bounds. *Neural Networks*, 1996, **9**(6): 947～956

赵明洁　1975年生，1996年毕业于浙江大学电机系，现在该大学攻读硕士学位.主要研究兴趣为非线性系统的模糊集成控制、计算机集成控制系统和智能控制等.

诸　静　1938年生，1962年毕业于浙江大学电机工程学系.现为该大学教授、博士生导师.主要研究方向为复杂系统智能控制、计算机集成控制系统和机器人控制等.

2001年 IFAC 部分学术活动

Title	2001	Place	Deadline	Further Information
IFAC Workshop Advances in Automotive Control	March 28—30	Karlsruhe Germany	30 June 2000	Prof. U. Kiencke e-mail: kiencke@iiit. etec. uni-karlsruhe. de
IFAC/CIGR Workshop Artificial Intelligence in Agriculture	June 4—6	Budapest Hungary	15 Nov. 2000	Prof. I. Farkas e-mail: ifarkas@fft. gau. hu
IFAC Symposium 6th Dynamics and Control of Process Systems-DYCOPS 6	June 4—6	Cheju Island Korea, Rep.	15 Sept. 2000	Mr. En Sup Yoon e-mail: esyoon@pslab. snu. ac. kr
IFAC Workshop 4th On-Line Fault Detection and Supervision in the Chemical Process Industries	June 8—9	Seoul Korea, Rep.	15 Sept. 2000	Mr. En Sup Yoon e-mail: esyoon@pslab. snu. ac. kr
American Control Conference-ACC01 (in cooperation with IFAC)	June 18—20	Arlington Virginia, USA		Bruce H. Krogh e-mail: krogh@des. ece. cmu. edu
IFAC Conference Computer Applications in Biotechnology-CAB 8	June 24—27	Quebec City Canada	1 Sept. 2000	Prof. Michel Perrier e-mail: Michel. Perrier @urcpc. polymtl. ca
IFAC Symposium Nonlinear Control Systems-NOLCOS 2001	July 4—6	St. Petersburg Russia	15 Nov. 2000	Prof. A. L. Fradkov e-mail: nolcos@ccs. ipme. ru

（下转第225）