

功率步进电动机电流波的仿射变换及其应用*

何镇陆
(华中工学院)

摘 要

本文应用近代解析几何学中仿射变换的概念,导出功率步进电动机电流波的仿射变换,因而可以直接从绕组的电流波形来换算步进电动机的力矩,并进一步导出矩频特性的仿射变换。电流波的仿射变换还可以用来分析多种驱动电源的特性,进而研究新的驱动方法。

一、电流波的仿射变换

1. 仿射变换波

我们引入近代解析几何学中仿射变换^[1]的概念,来研究步进电动机中仿射电流波的性质。

设给定波形如图1所示,其中 $I-t$ 平面有 A 波, $I-t'$ 平面有 B 波; B 波是 A 波在 $I-t$ 平面上沿 t 轴向 I 轴的均匀压缩。反之, A 波是 B 波在 $I-t'$ 平面上沿 t' 轴背离 I 轴的均

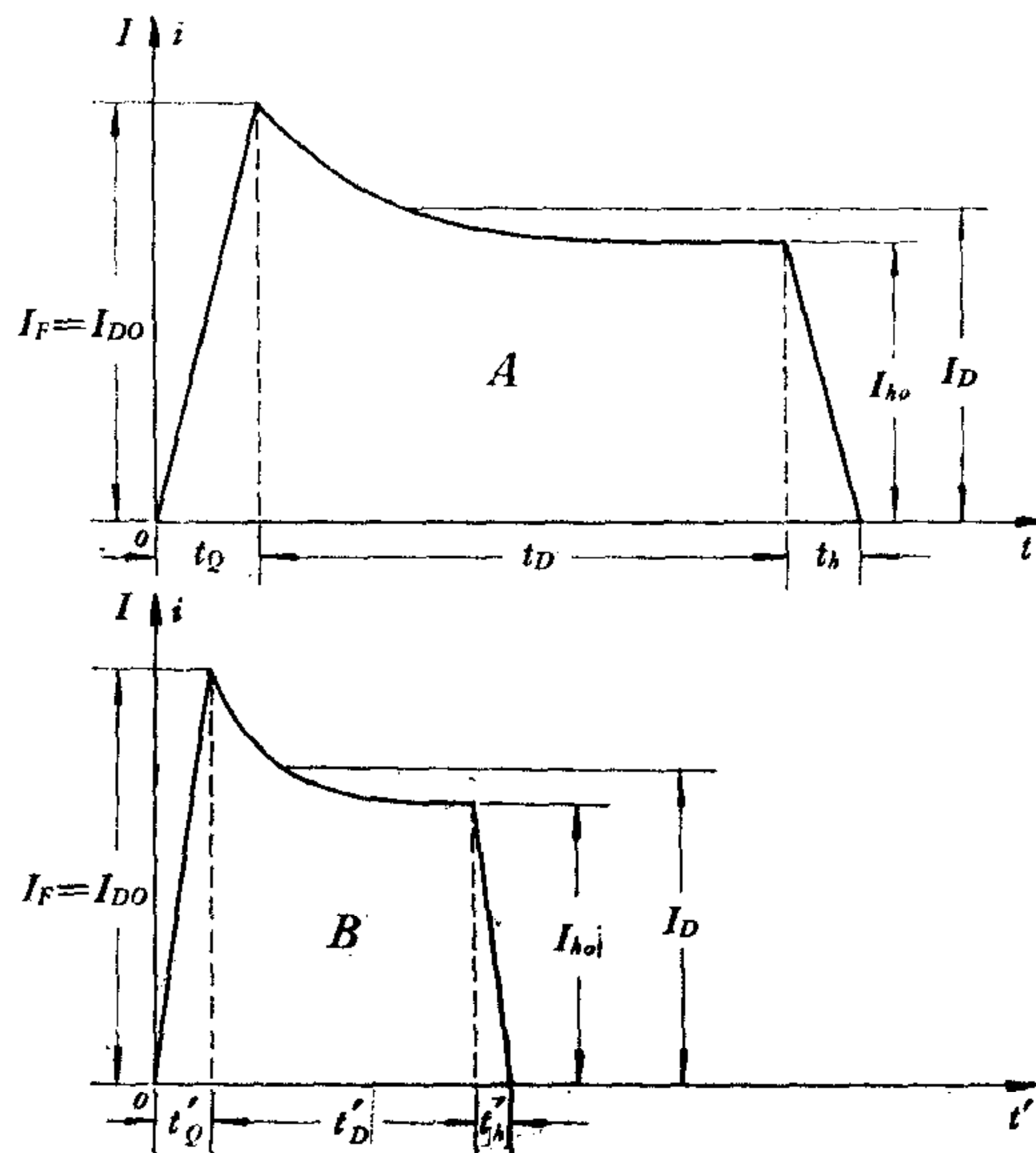


图1 仿射变换波及波形各量的时间关系

* 本文曾在中国自动化学会 1978 年年会宣读。

匀拉伸. 两个波从图形上看有如下特点:

1) 幅值相等的点一一对应, 记作

$$A(t) = B(t') \quad (1)$$

2) 幅值相等的点对应的坐标有如下关系:

$$t(A) = Kt(B) \quad (2)$$

或

$$t(B) = \frac{1}{K} t(A) = Jt(A)$$

式中 K 为拉伸系数, $J = \frac{1}{K}$ 为压缩系数, 显然 $K \geq 1$ 而 $J \leq 1$. 这样 A 波和 B 波之间, 就存在着仿射变换关系.

下面讨论步进电动机出现仿射变换电流波(以下简称仿射电流波)的可能性. 根据步进电动机的工作原理, 假如步进电动机处于恒频匀速运转状态, 定子和转子相对位置变化的周期和电流波的周期是相等的, 可表为

$$T = n_p T_p$$

式中 n_p 为运转拍数, T_p 为脉冲周期, 由于转速等于常数, 即转角和时间呈线性关系, 电流波 $i = i_t(t)$ 可以用转子和定子之间的相对位置 θ 表示, 记作 $i = i_\theta(\theta)$, 则

$$i = i_t(t) = i_\theta(\theta).$$

步进电动机绕组的电阻 r 为常数而电感 L 是 θ 的函数, 它仅决定于电机的结构, 与运行状态无关, 记作 $L = L(\theta)$.

步进电动机的电压平衡方程式可表为

$$\begin{aligned} U_G &= i_t(t)r + L(\theta) \frac{di_t(t)}{dt} + i_t(t) \frac{dL(\theta)}{dt} \\ &= i_\theta(\theta)r + L(\theta) \frac{di_\theta(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} + i_\theta(\theta) \frac{dL(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

因为步进电动机的角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

并令

$$i'_\theta(\theta) = \frac{di_\theta(\theta)}{d\theta}, \quad L'(\theta) = \frac{dL(\theta)}{d\theta}$$

故上式可改写为

$$\frac{U_G}{\omega} = \frac{r}{\omega} i_\theta(\theta) + L(\theta) i'_\theta(\theta) + i_\theta(\theta) L'(\theta) \quad (3)$$

令 $U_G/\omega = C_1$, $r/\omega = C_2$, 此处 C_1, C_2 均为常数, 则

$$U_G = C_1 \omega \quad (4)$$

$$r = C_2 \omega \quad (5)$$

如果带强迫电压驱动电源¹⁾中, 当 ω 变化时(此时相当于驱动电源控制频率 $f = \omega/$

1) 一般指晶体管驱动电源.

2π 作相应变化), 使 U_G 及 r 按关系式 (4) (5) 变化, 则方程式 (3) 在工作频率范围内完全不变; 因为只讨论匀速运转状态, 故微分方程 (3) 的初始条件 $\theta(0) = \theta_0$, $I(0) = I_0$ 在这些情况下均是相同的, 因此 (3) 式的解 $i_\theta(\theta)$ 在所讨论的情况下不变, 亦即 $i_\theta(\theta)$ 与频率变化无关. 如前所述, 因为此时 θ 与 t 呈线性关系, 故由 $i_\theta(\theta)$ 转换成满足 (4), (5) 式不同频率下的 $i_i(t)$ 时, 就形成相应于频率变化的仿射电流波.

在实际驱动电源的设计中, 当 ω 连续变化时, 要满足 (5) 式是困难的, 但由于功率步进电动机绕组的电阻很小, 接入驱动电路的又只是为了取得采样信号的检测电阻 (此电阻很小, 一般可以忽略) 因此易于满足下式^[2]

$$\frac{U_G}{U_D} \geq 9\alpha \quad (6)$$

这样就可以忽略步进电动机绕组电阻的影响, 把 (3) 式中含电阻 r 的项近似看成 0, 于是

$$\frac{U_G}{\omega} = L(\theta)i'(\theta) + i(\theta)L'(\theta) \quad (7)$$

同理当 ω 变化时, 使 U_G 的变化满足于 (4) 式, 亦即将 (7) 式左边分子分母同时乘上 S (S 为任意正数), 则 (7) 式的解 $i_\theta(\theta)$ 不变, 同样根据 $i_\theta(\theta)$ 可得到相应频率的仿射电流波 $i_i(t)$. 在实际应用中, (7) 式作以上处理的物理意义是, 在电压随频率成线性变化的驱动电源中, 将电压提高 S 倍, 则电流波仿射重现的频率也提高 S 倍, 显然这时仿射电流波随频率升高时的压缩系数 $J = \frac{1}{S}$.

2. 仿射电流波的力矩

步进电动机的电磁转矩是绕组电流和转子位置的函数 $M_d(i, \theta)$. 在矩形电流波供电情况下, 由于电流等于常数, 步进电动机每相转矩是 θ 的函数 $M(\theta)$, 它通常是近似的正弦波曲线. 对于反应式步进电动机, 如果不计各相绕组之间的互感 (目前从电机结构和驱动方式上, 均可做到这一点), 一相的电磁力矩可表示为^[3]

$$M(\theta) = \frac{1}{2} i^2(\theta) \frac{dL(\theta)}{d\theta} \quad (8)$$

如前所述, 匀速运转的步进电动机当电流波满足仿射变换关系时, $i(\theta)$ 曲线的形状不变, 故 $i(\theta)$ 与频率无关, 而 $L(\theta)$ 是由电机结构决定的, 亦与运行状态无关, 可见在上述条件下, (8) 式中 $M(\theta)$ 与频率无关.

步进电动机的输出转矩, 是各相矩角特性 $M(\theta)$ 工作部分平均值的总和. 假如起始通电角为 θ_0 , 通电时间为 $K_k \cdot 2\pi$, 其中 K_k 为通电的占宽系数 (参看图 2), 假如电动机相数为 m , 则平均转矩可表示为

$$M_d = \frac{m}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi K_k} M(\theta) d\theta \quad (9)$$

由于起始通电角 θ_0 是随负荷而变化的, 故 M_d 的数值也是随负荷而变化的. 但当负荷确定以后, 如果电流波是仿射波, 则 θ_0 不变, 因此 M_d 与频率变化无关. 步进电动机的最大输出力矩, (忽略内部摩擦力矩) 决定于平均输出转矩的最大值, 在上述条件下, 当 θ_0 为某一值 θ_{0M} 时 (此时 θ_{0M} 的值是确定的), 平均输出转矩达到最大值, 则 (9) 式写成

$$M_{dM} = \frac{m}{2\pi} \int_{\theta_{0M}}^{\theta_{0M} + 2\pi K_k} M(\theta) d\theta \quad (10)$$

同理 M_{dM} 与频率无关。

步进电动机的矩频特性是表示平均转矩最大值与运行频率的关系，它是步进电动机重要运行特性之一。在仿射电流波的情况下，由于平均最大转矩 M_{dM} 与频率无关，若忽略电机内部摩擦力矩，矩频特性就是一根水平线。

由于 $i_\theta(\theta)$ 曲线与 $M(I)$ 曲线不能用解析式表示，而实际上电动机绕组波形是非矩形波，因此可用图解法导出非矩形电流波供电时的 $M(\theta)$ 曲线。图 2 为实际非矩形电流波时求 $M(\theta)$ 曲线图解法。

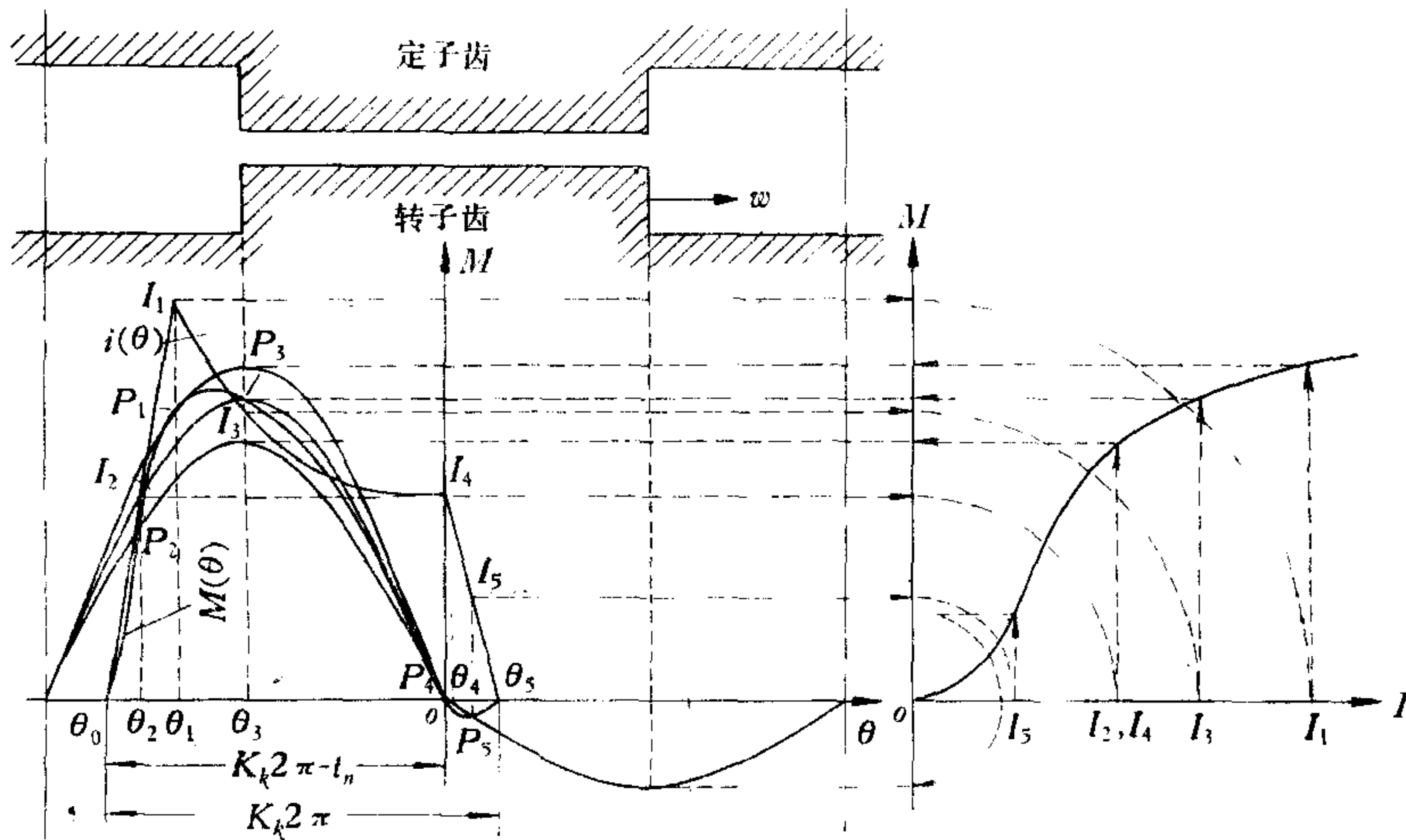


图 2 非矩形电流波情况下的 $M(\theta)$ 曲线图解

取 $\theta = \theta_1$ ，由电流波形曲线查得电流 I_1 ，由 $M(I)$ 曲线查得相应于 I_1 的力矩 M_1 ，则 M_1 就是以幅值为 I_1 的方波供电时，电动机的 $M_1(\theta)$ 正弦波曲线的最大值，由此可作 $M_1 \sin \theta$ 曲线，(如果 $M_1(\theta)$ 曲线要求精确，可由实验测得)，此曲线与 $\theta = \theta_1$ 直线交于 P_1 ，则 P_1 就是所求的 $M(\theta)$ 曲线上的一点，取 $\theta = \theta_2, \theta = \theta_3, \theta = \theta_4, \theta = \theta_5 \dots$ ，求得相应的 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$ 诸点，将这些点连接起来，就得到非矩形波电流供电情况下的 $M(\theta)$ 曲线。由波形图可看出，当电动机确定后， $M(I)$ 曲线已定，如果 $i_\theta(\theta)$ 曲线已知(因与 $i_i(t)$ 波形相同，故可从示波器测出)，则 $M(\theta)$ 曲线就可以用图解法求出。由图解法可看出如果 $i_i(t)$ 是仿射电流波，那么均可用同一 $i_\theta(\theta)$ 曲线表示，则步进电动机的力矩与频率无关，这个结论与上面用微分方程分析的结果一致。

3. 结论及其推论

结论：仿射电流波其力矩相等。

推论 1：如果脉冲频率连续变化时，步进电动机绕组中，出现连续的仿射电流波，则其矩频特性是与 f 轴平行的直线。

亦即具有连续仿射电流波的驱动，属于恒流驱动，它的力矩与频率无关。

推论 2：如果脉冲频率连续变化时，两个同类的电源中，出现一一对应的仿射电流波，则两者的矩频特性，存在着仿射变换关系。

简言之,电流波的仿射变换可以导致矩频特性的仿射变换,反之亦然。

二、电流波仿射变换的应用

1. 矩频特性的仿射变换

在设计步进电动机的驱动电源时,从步进电机结构及参数去计算新的矩频特性是很困难的。仿射变换则给出了简捷地换算矩频特性的方法,虽然它具有一定的近似性,但它可很快从出厂说明书的数据中,估算出要求的新的电源参数来。实验表明,对所给定的矩频特性进行仿射变换时,若 $K \leq 2$ 和 $J \geq \frac{1}{2}$, 误差约在 10% 以内。

例一、已知 1Kg-M 步进电动机在 $U_G = 80$ 伏供电情况下的矩频特性如图 3 所示,求 120 伏情况下的矩频特性。

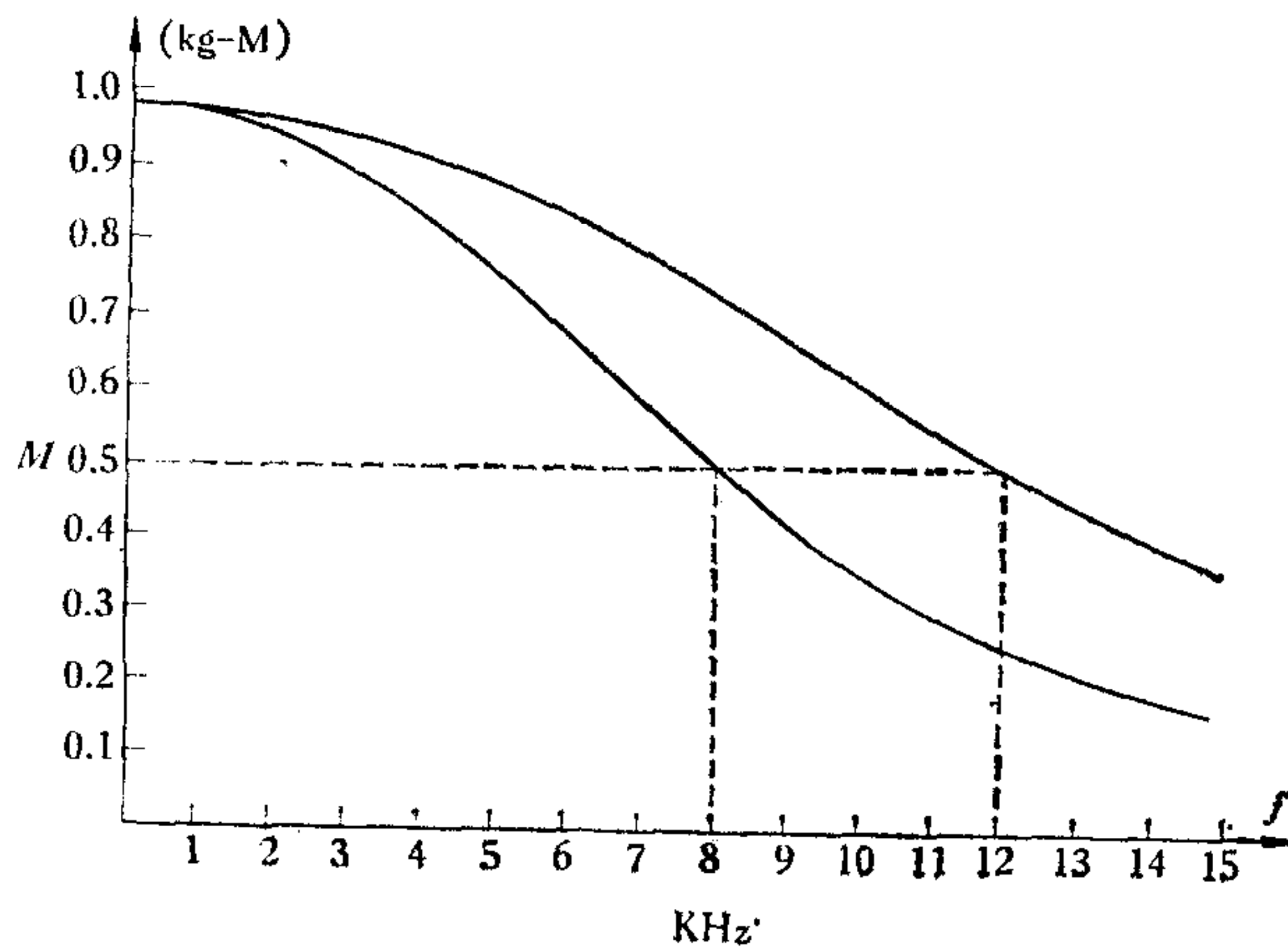


图 3 步进电动机矩频特性的仿射变换

解: 据上面的推论 2 将 80 伏的矩频特性在 $M-f$ 平面上,沿 f 轴方向均匀拉伸

$$K = \frac{120}{80} = 1.5$$

(倍)即为所求的新的矩频特性。

例二、生产机械要求在 $f = 16000$ Hz 时,1 Kg-M 步进电动机有 0.5 Kg-M 的力矩,求电源电压 U_G 。

解: 在 M 轴上找 $M = 0.5$ Kg-M 的点,查得此时相应的频率 $f_{0.5} = 8000$ Hz,所求的电源电压为

$$U_G = \frac{16000}{8000} \times 80 = 160 \text{ 伏}$$

2. 仿射变换电流波驱动电源

目前国内外使用的一些功率步进电动机的细分和平滑驱动电源^[4,5],在一定的频率范围内,当频率变化时,均能产生连续的仿射变换电流波,这些电流波形,其前沿和后沿,均是用阶梯波逼近预定的直线的办法^[4],使其获得时间为 $t_D = t_R = 1 T_{cp}$ 的前沿和后沿,因

此可视为仿射变换波。

另一例子,如图 4 所示,根据上面推论 1,在单一高压驱动电源中,如果控制电源电压,使绕组中始终保持同一仿射变换电流波,这种方法属于恒流驱动,步进电动机在一定的频段内,力矩保持不变。

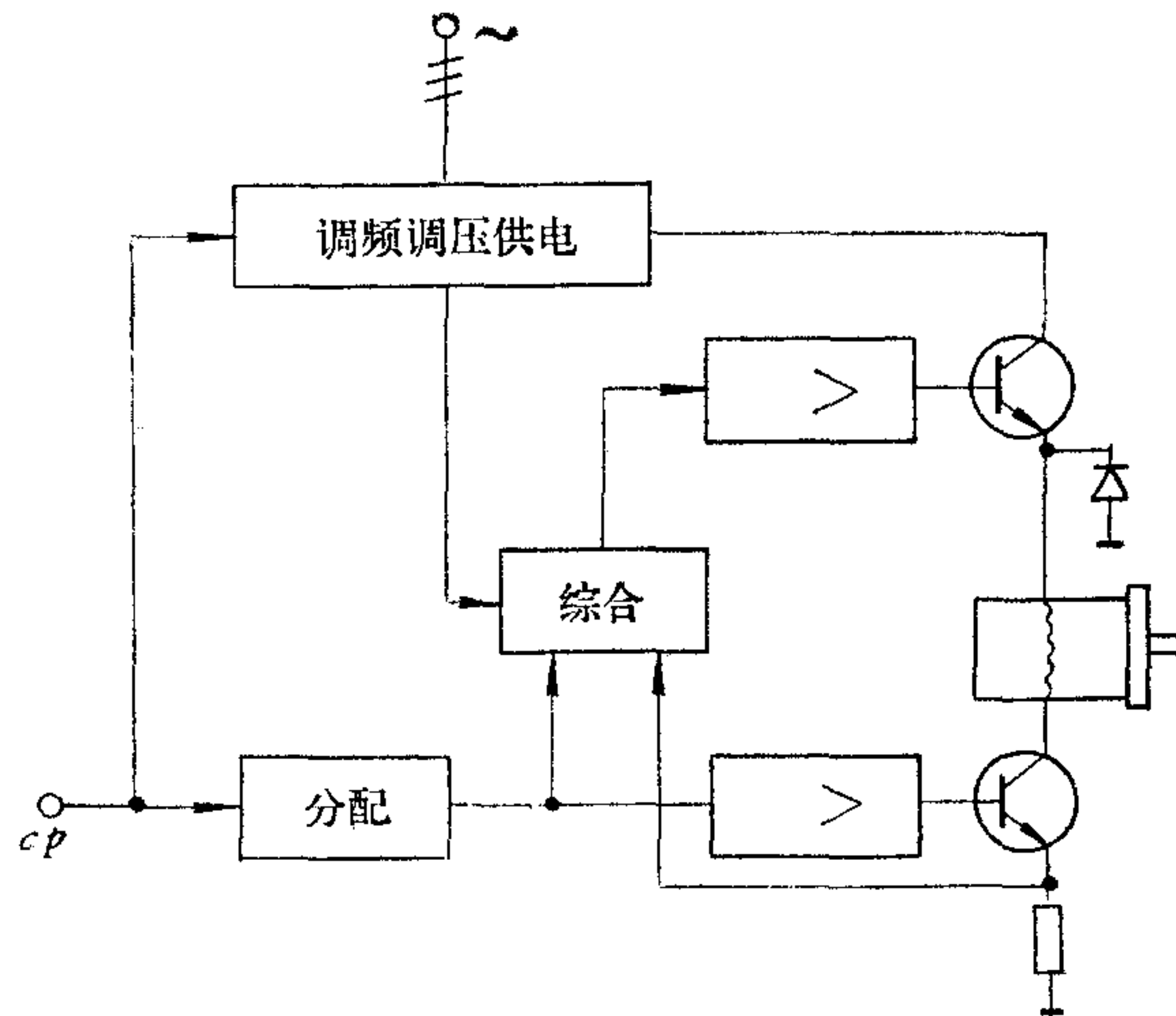


图 4 最优波形跟踪调频调压平滑驱动电源

如果在调压过程中,随频率变化的电压,始终使仿射波的前沿和后沿保持 $1 T_{cp}$ 时间,那么驱动系统除了具有力矩不随频率而变化的性质外,还具有平滑驱动的特性^[4]。这种使电动机力矩不随频率而变化,又同时具有平滑驱动性质的调频调压跟踪电流波形方法,称之为最优波形跟踪。

下面导出这种调频调压波形跟踪驱动电源的电压与频率之间的关系。如前所述,由于功率步进电动机的绕组电阻 r 很小,故易于满足 (6) 式,(若驱动电路采取单一高压驱动,则电源没有 U_D ,但可把 $I r$ 看作 U_D) 这样就可以忽略绕组电阻的影响。又由于在电流波的前沿和后沿期间,均受强迫电压 U_G 的作用,如忽略旋转电势的影响,可以把步进电动机中电流波的前沿和后沿看成直线,用式子表示为:

$$i_Q = \frac{U_G}{L} t,$$

$$i_h = I_{h0} - \frac{U_G}{L} t.$$

如图 1 所示,式中 i_Q 为前沿电流, i_h 为后沿电流, I_{h0} 为后沿电流的起点值,由此可解出电流波的前沿和后沿的时间,其表达式为:

$$t_Q = \frac{L I_F}{U_G} \quad (11)$$

$$t_h = \frac{L I_{h0}}{U_G} \quad (12)$$

式中 I_F 为前沿电流的终点值,它也是波顶电流 I_D 的起点值,据前所设

$$t_Q = t_h = 1 T_{cp}$$

$$t_Q = t_h = \frac{L}{U_G} I$$

令(11)(12)式中 $I_F = I_{h0} = I$, 则由上两式可得

$$T_{cp} = \frac{L}{U} I.$$

$$f = \frac{1}{T_{cp}} = \frac{U}{LI}$$

所以

$$U_G = LI f = Nf \quad (13)$$

亦即电压的调整要与频率成正比, 其比例常数 $N = LI$ 。这里必须着重指出, 由于旋转电势影响, 会使电流波顶下凹, 在带负荷情况下, 波顶终点值会降得很低, 并且此值会随负荷

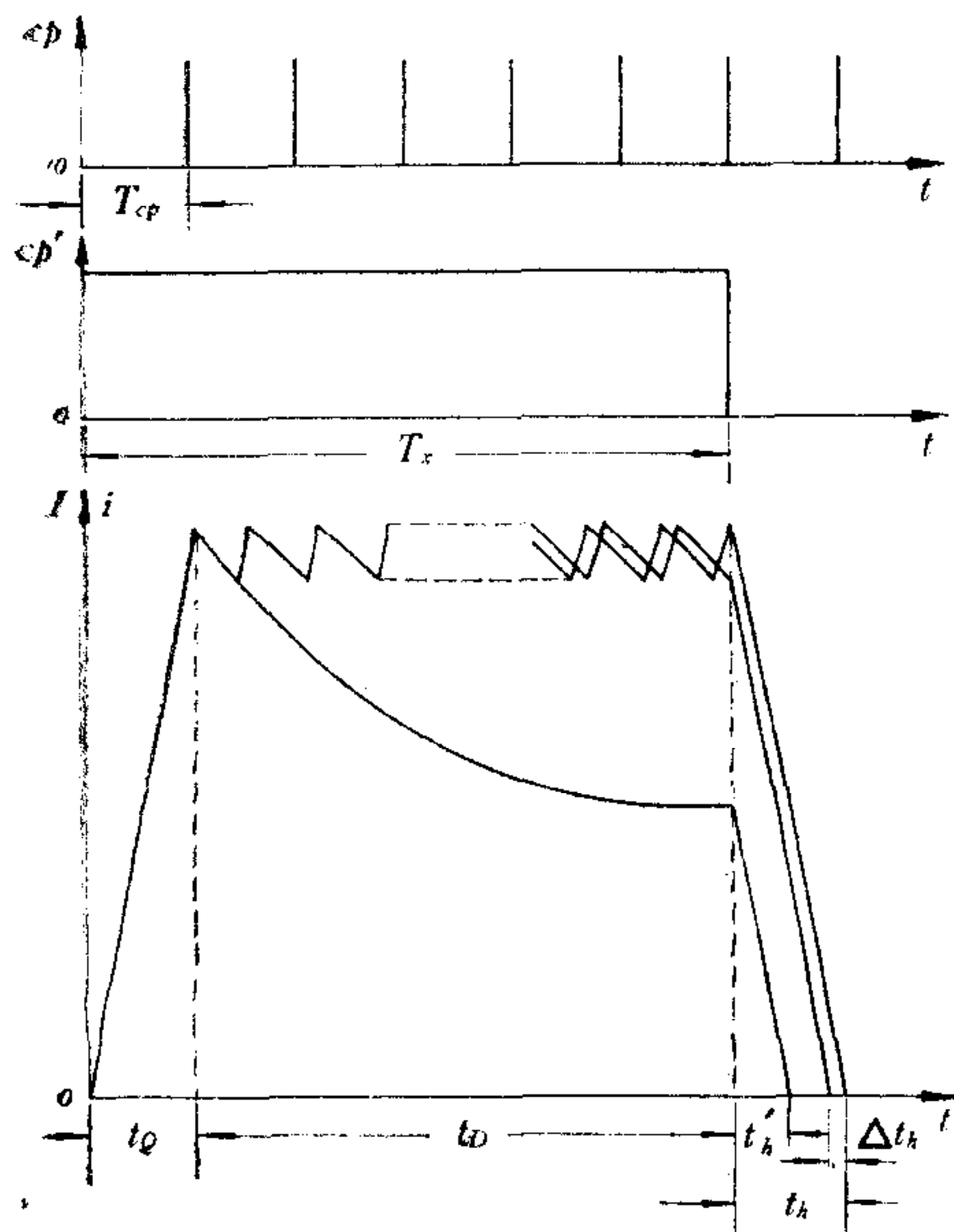


图5 用脉冲调整法(多次检测)
使 $t_Q \approx t_h \approx 1 T_{cp}$

变化而变化, 这样后沿时间 t_h 值不等于 $1 T_{cp}$ 而是小于 $1 T_{cp}$, 如图5所示, 此时驱动系统就不具平滑性质^[4], 为此利用脉冲调整法(即多次检测)^[2]补偿波顶的降落。如果电流波的峰点和谷点之差较小, 亦即补偿的频率较高, 这样波顶就近似地看成是直线, 这样其前沿和后沿就基本上满足

$$T_Q \approx T_h \approx 1 T_{cp}.$$

在一般情况下, 调频调压函数 $U = Nf$ 采取开环办法即可实现。如果前沿和后沿需要较准确地跟踪, 则可以利用现成的 cp 讯号和电流检测讯号进行校正。

用等幅变频正弦波电流供电的双极性驱动的步进电动机, 其正弦波就是仿射变换波, 因此利用正弦波电流供电时, 电动机具有仿射波供电时的一切优点。上述的平滑驱动, 是控制步进电动机绕组电流使其前沿和后沿获得 $t_Q = t_h = 1 T_{cp}$ 时

间, 使之在电动机中形成匀速旋转磁场而实现的^[4, 5], 如果用三相双极性调频调压正弦电流波电源供电, 则步进电动机中同样可以形成匀速旋转磁场, 电源同样具有平滑驱动的属性。

在平滑驱动时, 步进电动机的电流波形, 实质上也是空间的仿射变换波, 从理论上讲, 如果在任意时间(亦即在任意空间角度)的情况下停步(即锁住状态)和启动时, 均能保持这种电流波形的空间仿射变换性质, 那么这种步进电动机驱动电源, 同时也就具有细分驱动的属性。这些概念, 对于研究功率步进电动机平滑与细分驱动电源是必要的。

3. 驱动电源中仿射变换波的近似性

当驱动电源出现连续的等幅仿射变换电流波时, 步进电动机的矩频特性为平行于 f 轴的直线, 亦即 $M = \text{常数}$ 。但由于实际波形仿射性质的近似关系, 实测结果是矩频特性随频率升高而下斜的。

用阶梯波逼近仿射波时,由于频率升高,阶梯将逐渐模糊;用调频调压的平滑驱动电源,在低频时,由于电压低,绕组中的电阻影响较显著,而在高频时,电压高,电流波的前后沿就可以看成直线如图 6 所示这样从低频到高频的仿射性质,就不可能做到完全一致,对于电流波的波顶及每一阶梯的顶部,为了使其近似一根直线,可以用锯齿波进行逼近,以大致补偿由于旋转电势而引起的波顶降落。在高频运行情况下,电动机的机械摩擦损耗、风阻、铜耗、铁耗和介质损耗均要增加,它也会影响步进电动机的矩频特性。另外,在进行上述分析的时候,假定步进电动机是匀速旋转的,在此条件以外的情况,上述分析则不适用或是近似的。

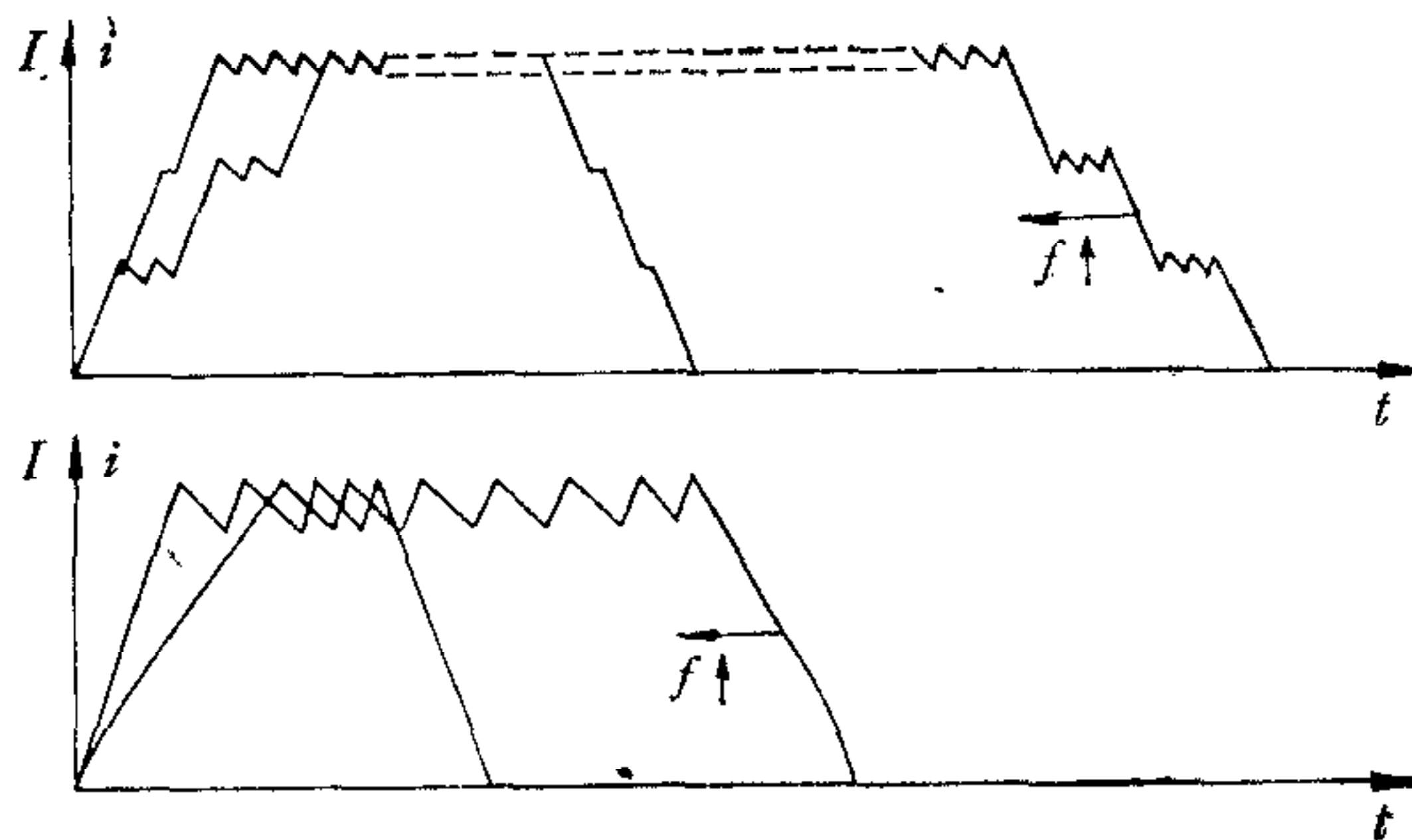


图 6 实际仿射电流波的近似性示意图

综合上述,在实际应用中,如果要使电动机的力矩与频率无关,就要设计适当的电路,使电源所产生的电流波形逼近所需的仿射变换波。要使电动机匀速旋转的属性向低频区扩展,就必须使低频区的电流波形也保持带平滑性质的仿射变换。对于上述这些要求,随着大功率电子学的发展,在工程上^[2, 4, 5]可以用近似的方法对所需要的仿射电流波进行精度越来越高的逼近。

参 考 文 献

- [1] A. Д. Александров и Т. Д., Математика, Её Содержание, Методы и значение/том 1/издательство академии наук СССР, (1956), 219—228.
- [2] 何镇陆,功率步进电动机中矩形电流的逼近和脉冲调整方法,华中工学院学报,1975年第1期,55—66.
- [3] G. Singh and S. N. Chen, Some Aspects of Modelling and Dynamic Simulation of Variable-Reluctance Step Motors. "Proceedings 2-d Annual Symposium on Incremental Motion Control Systems and Devices" April, 16—18, (1973).
- [4] 何镇陆,功率步进电动机平滑与细分驱动原理及高突跳自由平滑系统,华中工学院学报,1977年第1期,28—39.
- [5] “滑らか駆動の制御”, FUJITSU, 1974. 通卷 131 号, 99 页.

THE AFFINE TRANSFORMATION OF THE CURRENT WAVE OF POWER STEPPING MOTORS AND ITS APPLICATION

HE ZHEN-LU

(Huachung Institute of Technology)

ABSTRACT

Applying the concept of the affine transformation in modern analytic geometry, a affine transformation of the current wave of power stepping motors can be derived. This makes it possible to compute the torque of motor immediately by the current wave form input to the motor winding, and the affine transformation of the torque-frequency characteristic can be derived. The affine transformation of the current wave may also be used to analyse the characteristics of several types of motor driving circuits, this may lead to the development of some new driving methods.