

# 粒子群优化算法模型分析<sup>1)</sup>

潘峰 陈杰 甘明刚 蔡涛 涂序彦

(北京理工大学信息科学技术学院自动控制系 北京 100081)  
(E-mail: panfeng@bit.edu.cn, andropanfeng@126.com)

**摘要** 粒子群优化算法在优化问题中体现出良好的性能,但目前还没有对其运动特性,尤其是参数的选择与当粒子群体陷入局部极值点导致的早熟收敛情况的详细分析.分析了 PSO 算法中的三种粒子模型(Gbest, Pbest, Commom 模型)的运动特性,给出了 Gbest 模型和 Pbest 模型在没有新息获取时,单信息条件下的最大搜索空间.进一步证明了在减少了 Lipschitz 条件约束的条件下,Common 模型渐进稳定的充分条件,将算法中惯量因子的取值范围扩大到  $(-1, 1)$ ,并从物理上进行了解释.

**关键词** 粒子群优化算法,单信息最大搜索空间,渐进稳定性,充分条件,Lipschitz 条件  
**中图分类号** TP18

## Model Analysis of Particle Swarm Optimizer

PAN Feng CHEN Jie GAN Ming-Gang CAI Tao TU Xu-Yan

(Department of Automatic Control, School of Information Science and Technology,  
Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)  
(E-mail: panfeng@bit.edu.cn)

**Abstract** Particle swarm optimizer (PSO) exhibits good performance for optimization problems. However, there is little analysis about the kinetic characteristic, parameter selection and the situation where algorithm falls into stagnate to cause premature convergence. In the paper, the kinetic characteristic of three models of PSO (Gbest, Pbest, Common model) are analyzed. The largest covering space (LCS) of the Gbest model and the Pbest model are deduced without new information. Furthermore, under the condition that the Lipschitz constraint is reduced, the sufficient conditions for asymptotic stability of parameters are proved. And the inertia weight  $w$  value is enhanced to  $(-1, 1)$ .

**Key words** Particle swarm optimizer (PSO), the largest covering space (LCS), asymptotic stability, sufficient condition, Lipschitz constraint

## 1 引言

Kennedy 和 Eberhart<sup>[1]</sup> 于 1995 年提出了基于群体智能的并行优化算法——粒子群优化方法 (Particle swarm optimizer, PSO). 在模式分类, 优化计算, 以及在控制器的参数优化等方面, PSO 体现出良好的性能. PSO 算法的第  $i$  个粒子在第  $d$  维空间的运动方程, 可以由一组差分方程以及约束条件来共同描述, 如公式 (1)(2)

$$\mathbf{v}_{id}^{k+1} = w \cdot \mathbf{v}_{id}^k + c_1 \cdot \text{rand}_{gd} \cdot (\mathbf{p}_{gd}^k - \mathbf{x}_{id}^k) + c_2 \cdot \text{rand}_{id} \cdot (\mathbf{p}_{id}^k - \mathbf{x}_{id}^k) \quad (1)$$

1) 高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划 (20010248) 资助

Supported by the Teaching and Research Award Program for Outstanding Young Teacher in Higher Education Institute of MOE, P. R. China (20010248)

收稿日期 2005-3-10 收修改稿日期 2005-12-22

Received March 10, 2005; in revised form December 22, 2005

$$\mathbf{x}_{id}^{k+1} = \mathbf{x}_{id}^k + \eta \cdot \mathbf{v}_{id}^{k+1} \quad (2)$$

$$|\mathbf{v}_{id}^k| \leq V_{\max} \quad (3)$$

式中  $w$  是惯量因子;  $\eta$  为速度比例约束因子;  $\mathbf{x}_{id}^k$  是粒子的当前的位置向量;  $\mathbf{v}_{id}^k$  是粒子运动速度向量,  $\mathbf{p}_{id}^k$  为粒子个体位置最优值;  $\mathbf{p}_{gd}^k$  为群体位置最优值;  $c_1, c_2$  是加速因子,  $rand_{id}, rand_{gd}$  是在  $[0,1]$  之间的随机数. 粒子在搜索空间中不断通过自身信息  $\mathbf{p}_{id}^k$  和群体信息  $\mathbf{p}_{gd}^k$  向目标点运动. 这种显式的描述使得算法中粒子运动的物理含义相对于其他计算智能的方法而言更容易理解. 但作为一个由若干粒子个体组成的群体复杂系统, 以及算法中存在的各种待定参数和约束条件, 使得 PSO 算法在简单的物理框架下, 却又体现出复杂的运动特性.

许多学者对 PSO 算法的参数选择做过很多研究工作, Shi<sup>[2]</sup> 给出了  $V_{\max}$  在  $[2, X_{\max}]$  单独取值, 速度惯量  $w$  在  $[0.1, 1.05]$  范围内取值时的 PSO 系统优化试验仿真结果. 加速因子  $c_1, c_2$  通常选取为 2, Riget<sup>[3]</sup> 采用的是随时间递减的  $w$  取值更新策略, Clerc<sup>[4]</sup> 建议  $(c_1 + c_2)/2$  的取值为 1.494. 惯量因子  $w$ , 取值一般在  $(0,1)$  之间, Clerc 建议的取值为 0.729, 同时 Clerc 与 Kennedy 将 PSO 算法的作为线性时不变动态系统进行了参数稳定性分析.

本文根据 PSO 算法中粒子的更新公式和性质, 将粒子分为三类动态模型进行分析. 在三种模型条件下得到算法中粒子的运动特性, 以及参数稳定性充分条件. 这三种模型分别为

- 1) Gbest 模型. 指的是那些既是群体最优, 又是个体最优的粒子.
- 2) Pbest 模型. 包括那些不是群体最优, 但是为个体最优的粒子.
- 3) Common 模型. 包括所有既不是群体最优, 又不是个体最优的粒子.

## 2 PSO 的 Gbest 模型分析

为分析方便对 (1), (2) 进行整理简化得

$$\mathbf{v}_{id}^{k+1} = w \cdot \mathbf{v}_{id}^k - \varphi^{k+1} \cdot \mathbf{x}_{id}^k + \varphi^{k+1} \cdot \mathbf{p} \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_{id}^{k+1} = \mathbf{x}_{id}^k + \eta \cdot \mathbf{v}_{id}^{k+1} \quad (5)$$

(3) 式作为每次迭代过程中速度向量限幅, 实际上是保证了系统的输入输出有界, 速度比例约束因子  $\eta$  按比例放大或缩小位置更新量, 为了证明和推导的方便, 在此也将其取值为 1, 不失一般性. 经过变换后表示为粒子动态系统的 Lipschitz 条件

$$|\mathbf{x}_{id}^{k+1} - \mathbf{x}_{id}^k| \leq V_{\max} \quad (6)$$

其中加速度因子  $\varphi^{k+1} = \varphi_1^{k+1} + \varphi_2^{k+1}$ ,  $\varphi_i^{k+1} = c_i \cdot rand_i$ ,  $\mathbf{p} = (\varphi_1^{k+1} \cdot \mathbf{p}_{gd} + \varphi_2^{k+1} \cdot \mathbf{p}_{id}) / (\varphi_1^{k+1} + \varphi_2^{k+1})$  是系统的外部输入, 则 (4) 式和 (5) 式经整理可表示为如下形式

$$\mathbf{x}_{id}^{k+1} = (1 + w - \varphi^{k+1}) \cdot \mathbf{x}_{id}^k - w \cdot \mathbf{x}_{id}^{k-1} + \varphi^{k+1} \cdot \mathbf{p} \quad (7)$$

对 PSO 的三种模型的分析包括了: 模型动态方程和单信息最大搜索空间. 先给出以下概念的定义.

**定义 1.** 单信息最大搜索空间, 定义为在当前的群体最优信息和个体最优信息条件下, 在没有新的信息获取时, 粒子运动从当前运动状态开始, 可以达到的最大的距离, 记作  $\sigma_i$ .

**定义 2.** Gbest 模型, 定义为 PSO 粒子在  $k$  时刻, 既是群体最优粒子  $\mathbf{p}_{gd}^k$ , 又是个体最优粒子  $\mathbf{p}_{id}^k$ , 即  $\mathbf{x}_{gd}^k = \mathbf{p}_{gd}^k = \mathbf{p}_{id}^k$ .

根据定义 2, 结合式 (7) 可以得到 Gbest 模型的动态方程如下

$$\mathbf{x}_{gd}^{k+1} = (1+w) \cdot \mathbf{x}_{gd}^k - w \cdot \mathbf{x}_{gd}^{k-1} \quad (8)$$

(8) 式的特征方程和特征根分别为

$$D(z) = z^2 - (1+w) \cdot z + w, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = w$$

假设在  $k$  时刻是  $i$  粒子成为群体最优粒子的初始时刻, 即

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_g^k) < f(\mathbf{x}_{g_i}^k), & \forall k_i < k \\ f(\mathbf{x}_g^k) < f(\mathbf{x}_j^k), & \forall j \neq g \end{cases}$$

其中,  $f(\cdot)$  为适应度评价函数,  $\mathbf{x}_g^k = (\mathbf{x}_{g1}^k, \mathbf{x}_{g2}^k, \dots, \mathbf{x}_{gN}^k)$ ,  $\mathbf{v}_g^k = (\mathbf{v}_{g1}^k, \mathbf{v}_{g2}^k, \dots, \mathbf{v}_{gN}^k)$ , 则可以得到模型在初始条件为:  $\mathbf{x}_{gd}^k, \mathbf{v}_{gd}^k$  情况下的单信息最大搜索空间引理.

**引理 1.** Gbest 模型粒子的单信息最大搜索空间由下式决定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{gd}^{k+n} = \mathbf{x}_{gd}^k + \mathbf{v}_{gd}^k (1 - \varphi_1^{k+n} - \varphi_2^{k+n}) \cdot \frac{w^2}{1-w} \quad (9)$$

**证明.**

第一步, 先给出 Gbest 模型的迭代描述如式 (10), 并证明之.

$$\mathbf{x}_{gd}^{k+n} = \mathbf{x}_{gd}^k + w \cdot \mathbf{v}_{gd}^k (w^{n-1} + (1 - \varphi_1^{k+n} - \varphi_2^{k+n}) \cdot \sum_{j=1}^{n-2} w^j + \prod_{j=2}^n (1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j})) \quad (10)$$

对 (4) 式和 (8) 式进行整理可以表达成 (11) 式的形式

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{gd}^{k+1} = w \cdot \mathbf{v}_{gd}^k \\ \mathbf{x}_{gd}^{k+1} = \mathbf{x}_{gd}^k + \varphi^{k+1} \cdot (\mathbf{p}_{gd}^k - \mathbf{x}_{gd}^k) + \mathbf{v}_{gd}^{k+1} \end{cases} \quad (11)$$

根据 (11) 式用数学归纳法证明 (10) 式, 同时考虑到定义 2 的初始条件  $\mathbf{x}_{gd}^k = \mathbf{p}_{gd}^k = \mathbf{p}_{id}^k$ .

1) 当  $n = 1$  时

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{gd}^{k+1} = w \cdot \mathbf{v}_{gd}^k \\ \mathbf{x}_{gd}^{k+1} = \mathbf{x}_{gd}^k + \mathbf{v}_{gd}^{k+1} \end{cases}$$

则 (10) 式成立

2) 假设当  $n = m$  时 (10) 式成立则有

$$\mathbf{x}_{gd}^{k+m} = \mathbf{x}_{gd}^k + w \cdot \mathbf{v}_{gd}^k (w^{m-1} + (1 - \varphi_1^{k+m} - \varphi_2^{k+m}) \cdot \sum_{j=1}^{m-2} w^j + \prod_{j=2}^m (1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j}))$$

3) 现证明当  $n = m + 1$  时 (10) 式也成立.

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{gd}^{k+m+1} = w^{m+1} \cdot \mathbf{v}_{gd}^k \\ \mathbf{x}_{gd}^{k+m+1} = \mathbf{x}_{gd}^{k+m} + \mathbf{v}_{gd}^{k+m+1} + \varphi_1^{k+m+1} (\mathbf{p}_{gd}^{m+1} - \mathbf{x}_{gd}^{k+m}) + \varphi_2^{k+m} (\mathbf{p}_{id}^{m+1} - \mathbf{x}_{gd}^{k+m+1}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{gd}^{k+m+1} &= \mathbf{x}_{gd}^k + w \cdot \mathbf{v}_{gd}^k (w^{m-1} + (1 - \varphi_1^{k+m} - \varphi_2^{k+m}) \cdot \sum_{j=1}^{m-2} w^j + \prod_{j=2}^m (1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j})) + \\
&\quad w^{m+1} \cdot \mathbf{v}_{gd}^k - (\varphi_1^{k+m+1} + \varphi_2^{k+m+1}) \cdot w \cdot \mathbf{v}_{gd}^k (w^{m-1} + (1 - \varphi_1^{k+m} - \\
&\quad \varphi_2^{k+m}) \cdot \sum_{j=1}^{m-2} w^j + \prod_{j=2}^m (1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j})) \\
\mathbf{x}_{gd}^{k+m+1} &= \mathbf{x}_{gd}^k + w \cdot \mathbf{v}_{gd}^k (w^m + w^{m-1} - (\varphi_1^{k+m+1} + \varphi_2^{k+m+1}) \cdot w^{m-1} + \\
&\quad (1 - \varphi_1^{k+m} - \varphi_2^{k+m}) \cdot \sum_{j=1}^{m-2} w^j - (\varphi_1^{k+m+1} + \varphi_2^{k+m+1}) \cdot (1 - \varphi_1^{k+m} - \\
&\quad \varphi_2^{k+m}) \cdot \sum_{j=1}^{m-2} w^j + \prod_{j=2}^m (1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j}) - (\varphi_1^{k+m+1} + \varphi_2^{k+m+1}) \cdot \prod_{j=2}^m (1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j})) \\
\mathbf{x}_{gd}^{k+m+1} &= \mathbf{x}_{gd}^k + w \cdot \mathbf{v}_{gd}^k (w^m + w^{m-1} \cdot (1 - \varphi_1^{k+m+1} + \varphi_2^{k+m+1}) + (1 - \varphi_1^{k+m+1} + \varphi_2^{k+m+1}) \cdot (1 - \\
&\quad \varphi_1^{k+m} - \varphi_2^{k+m}) \cdot \sum_{j=1}^{m-2} w^j + (1 - \varphi_1^{k+m+1} + \varphi_2^{k+m+1}) \cdot \prod_{j=2}^m (1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j})) \\
\mathbf{x}_{gd}^{k+m+1} &= \mathbf{x}_{gd}^k + w \cdot \mathbf{v}_{gd}^k (w^m + (1 - \varphi_1^{k+m+1} + \varphi_2^{k+m+1}) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} w^j + \prod_{j=2}^{m+1} (1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j}))
\end{aligned}$$

所以 (10) 式成立.

第二步, 在 (10) 的基础上推导 (9) 式的结论.

为表述方便, 设

$$\chi = w^{n-1} + (1 - \varphi_1^{k+n} - \varphi_2^{k+n}) \cdot \sum_{j=1}^{n-2} w^j + \prod_{j=2}^n (1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j})$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 因为  $0 < w < 1$ , 所以  $\chi$  右边第一项为:  $\lim_{n \rightarrow \infty} w^{n-1} = 0$ . 由于  $\chi$  右边第二项为等比数列求和, 所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varphi_1^{k+n} - \varphi_2^{k+n}) \cdot \sum_{j=1}^{n-2} w^j = (1 - \varphi_1^{k+n} - \varphi_2^{k+n}) \cdot \frac{w}{1-w}$$

$\chi$  右边第三项极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=2}^{n+1} (1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j}) = 0$$

上式的结果为 0 时因为  $\varphi_i^j$  为 (0,1) 之间均匀分布的随机数, 则  $(1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j})$  为 (-3,1) 之间均匀分布的随机数, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P((1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j}) \neq 0) = 0$ , 即总存在某个时刻  $(1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j})$  的取值为 0, 则作为阶乘项的该部分值为 0. 综合以上三个分析, 可以得到最后结果如下

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{gd}^{k+n} = \mathbf{x}_{gd}^k + (1 - \varphi_1^{k+n} - \varphi_2^{k+n}) \cdot \frac{w^2}{1-w} \cdot \mathbf{v}_{gd}^k \quad \square$$

当标准 PSO 算法中  $w$  在 (0,1) 间取值,  $\varphi_1^{k+j} + \varphi_2^{k+j}$  在 (0,4) 间取值, 并且假设  $\mathbf{x}_{gd}^k = 5$ ,  $\mathbf{v}_{gd}^k = 3$ , Gbest 的最大搜索空间如图 1 所示. 引理 1 表明, Gbest 模型下的粒子, 由于自身

包括了群体的最优信息,因此在搜索的过程中,逐渐趋向于以初始最优时刻位置向量  $\mathbf{x}_{gd}^k$  为中心的区域内,其范围正比于初始速度向量  $\mathbf{v}_{gd}^k$ . 其中这个区域覆盖曾经搜索过的空间的概率要大于开拓新的搜索区域的概率,这是由于  $(1 - \varphi_1^{k+j} - \varphi_2^{k+j})$  为负时改变了  $\mathbf{v}_{gd}^k$  的方向,使之反向搜索而造成的.

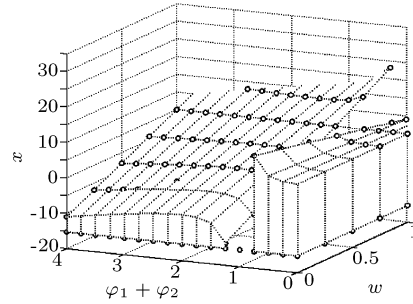


图 1 Gbest 模型可能达到的最大搜索空间  
Fig. 1 The largest covering space of gbest model

### 3 PSO 的 Pbest 模型分析

**定义 3.** Pbest 模型, 定义为 PSO 粒子在  $k$  时刻, 是个体最优粒子  $\mathbf{p}_{id}^k$ , 但不是群体最优粒子  $\mathbf{p}_{gd}^k$ , 即  $\mathbf{x}_{id}^k = \mathbf{p}_{id}^k \neq \mathbf{p}_{gd}^k$ .

根据定义 3, Pbest 模型描述的情况是群体的最优信息  $\mathbf{p}_{gd}^k$  没有改变, 而粒子不断地获得个体最优信息. 结合 (4) 式和 (5) 式可以得到 Pbest 模型的动态方程如下

$$\mathbf{x}_{id}^{k+1} = (1 + w - \varphi_2^{k+1}) \cdot \mathbf{x}_{id}^k - w \cdot \mathbf{x}_{id}^{k-1} + \varphi_2^{k+1} \cdot \mathbf{p}_{gd}^k \quad (12)$$

**引理 2.** Pbest 模型粒子的单信息最大搜索空间由下式决定:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{id}^{k+n} = w \cdot \mathbf{v}_{id}^k \cdot (w^{n-1} + \sum_{j=2}^n w^{n-j} \cdot \prod_{l=1}^j (1 - \varphi_2^{k+n-l+1})) + \mathbf{p}_{gd}^k \cdot (\varphi_2^n + \sum_{j=2}^n \varphi_2^{k+n-j+1} \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \varphi_2^{n-l+1})) \quad (13)$$

**证明.** 根据 (12) 式, 可得 Pbest 模型的迭代描述形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{id}^{k+n} &= \prod_{j=1}^n (1 - \varphi_2^j) \cdot \mathbf{x}_{id}^k + w \cdot \mathbf{v}_{id}^k \cdot (w^{n-1} + \sum_{j=2}^n w^{n-j} \cdot \prod_{l=1}^j (1 - \varphi_2^{k+n-l+1})) + \\ &\mathbf{p}_{gd}^k \cdot (\varphi_2^{k+n} + \sum_{j=2}^n \varphi_2^{n-j+1} \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \varphi_2^{k+n-l+1})) \end{aligned} \quad (14)$$

为证明和表述方便将 (11) 式重写如下

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{id}^{k+1} = w \cdot \mathbf{v}_{id}^k \\ \mathbf{x}_{id}^{k+1} = \mathbf{x}_{id}^k + \varphi_2^{k+1} \cdot (\mathbf{p}_{gd}^k - \mathbf{x}_{id}^k) + \mathbf{v}_{id}^{k+1} \end{cases} \quad (15)$$

其中, 同引理 1 的证明,  $\eta$  在此取值为 1. 根据 (15) 式用数学归纳法证明 (14) 式

1) 当  $n=1$  时,  $\mathbf{x}_{id}^{k+1} = (1 - \varphi_2^{k+1}) \cdot \mathbf{x}_{id}^k + w \cdot \mathbf{v}_{id}^k + \varphi_2^{k+1} \cdot \mathbf{p}_{gd}^k$ , 则 (14) 式成立.

2) 假设  $n = m$  时 (14) 式成立则有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{id}^{k+m} &= \prod_{j=1}^m (1 - \varphi_2^{k+j}) \cdot \mathbf{x}_{id}^k + w \cdot \mathbf{v}_{id}^k \cdot (w^{m-1} + \sum_{j=2}^m w^{m-j} \cdot \prod_{l=1}^j (1 - \varphi_2^{k+m-l+1})) + \\ &\quad \mathbf{p}_{gd}^k \cdot (\varphi_2^{k+m} + \sum_{j=2}^m \varphi_2^{k+m-j+1} \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \varphi_2^{k+m-l+1})) \end{aligned}$$

3) 则当  $n = m + 1$  时有:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{id}^{k+m+1} &= \mathbf{x}_{id}^{k+m} + \varphi_2^{k+m+1} \cdot (\mathbf{p}_{gd}^k - \mathbf{x}_{id}^{k+m}) + \mathbf{v}_{id}^{k+m+1} \\ \mathbf{x}_{id}^{k+m+1} &= (1 - \varphi_2^{k+m+1}) \mathbf{x}_{id}^{k+m} + \varphi_2^{k+m+1} \mathbf{p}_{gd}^k + \mathbf{v}_{id}^{k+m+1} \\ \mathbf{x}_{id}^{k+m+1} &= (1 - \varphi_2^{k+m+1}) \cdot \left\{ \prod_{j=1}^m (1 - \varphi_2^{k+j}) \cdot \mathbf{x}_{id}^k + w \cdot \mathbf{v}_{id}^k \cdot (w^{m-1} + \sum_{j=2}^m w^{m-j} \cdot \prod_{l=1}^j (1 - \right. \\ &\quad \left. \varphi_2^{k+m-l+1})) \right\} + \mathbf{p}_{gd}^k \cdot (\varphi_2^{k+m} + \sum_{j=2}^m \varphi_2^{k+m-j+1} \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \varphi_2^{k+m-l+1})) + \varphi_2^{k+m+1} \mathbf{p}_{gd}^k + w^{m+1} \mathbf{v}_{id}^k \\ \mathbf{x}_{id}^{k+m+1} &= (1 - \varphi_2^{k+m+1}) \cdot \prod_{j=1}^m (1 - \varphi_2^{k+j}) \cdot \mathbf{x}_{id}^k + w \cdot \mathbf{v}_{id}^k \cdot (w^m + (1 - \varphi_2^{k+m+1}) \cdot w^{m-1} + \\ &\quad \sum_{j=2}^m w^{m-j} \cdot \prod_{l=1}^j (1 - \varphi_2^{k+m-l+1})) + \mathbf{p}_{gd}^k \cdot (\varphi_2^{k+m+1} + (1 - \varphi_2^{k+m+1}) \cdot \varphi_2^m + \\ &\quad (1 - \varphi_2^{k+m+1}) \cdot \sum_{j=2}^m \varphi_2^{k+m-j+1} \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \varphi_2^{k+m-l+1})) \\ \mathbf{x}_{id}^{k+m+1} &= \prod_{j=1}^{m+1} (1 - \varphi_2^{k+j}) \cdot \mathbf{x}_{id}^k + w \cdot \mathbf{v}_{id}^k \cdot (w^m + \sum_{j=2}^{m+1} w^{m-j} \cdot \prod_{l=1}^j (1 - \varphi_2^{k+m-l+1})) + \\ &\quad \mathbf{p}_{gd}^k \cdot (\varphi_2^{k+m+1} + \sum_{j=2}^{m+1} \varphi_2^{k+m-j+1} \prod_{l=1}^{j-1} (1 - \varphi_2^{k+m-l+1})) \end{aligned}$$

至此, 公式 (14) 得证. 再考虑当  $n \rightarrow \infty$  或  $n \gg k$  时, 且在标准 PSO 算法中  $\varphi_2^{k+1}$  的值域为  $\varphi_2^{k+1} \in (0, 2)$ , 则  $(1 - \varphi_2^{k+j}) \in (-1, 1)$ , (14) 式右边  $\mathbf{x}_{id}^k$  项为

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \prod_{j=1}^n (1 - \varphi_2^{k+j}) \cdot \mathbf{x}_{id}^k \right) = \mathbf{0}$$

因此 Pbest 模型粒子的单信息最大搜索空间与初始位置向量无关, 而是由 (14) 式右侧的后两项决定.  $\square$

Pbest 模型粒子的单信息条件下可能的最大搜索空间由两部分组成, 一部分是群体最优粒子同 Pbest 粒子在搜索空间中构成的超立方体  $\varphi_2^{k+1}(\mathbf{p}_{gd}^k - \mathbf{x}_{id}^k)$ , 另一部分是同粒子速度向量  $\mathbf{v}_{id}^k$  合成的搜索空间. 图 2 图示了一个 Pbest 模型在二维搜索空间中单信息条件下可能的最大搜索空间. 假设初始条件为  $\mathbf{x}_{id}^k = (3, 5)$ ,  $\mathbf{p}_{gd}^k = (1, 4)$ ,  $\mathbf{v}_{id}^k = (-1, -3)$ ,  $w \in [0, 1]$ ,  $\varphi_2 \in [0, 2]$ . “ $\Delta$ ” 表示群体最优粒子  $\mathbf{p}_{gd}^k$  的空间位置, “ $\square$ ” 表示 Pbest 模型粒子  $\mathbf{x}_{id}^k$  的空间位置, “ $\odot$ ” 构成的超立方体即为  $\varphi_2^{k+1}(\mathbf{p}_{gd}^k - \mathbf{x}_{id}^k)$  所覆盖的搜索空间, “ $\cdot$ ” 构成的多面体是  $\varphi_2^{k+1}(\mathbf{p}_{gd}^k - \mathbf{x}_{id}^k)$  同速度向量  $\mathbf{v}_{id}^k$  合成所能覆盖的最大搜索空间.

现在考虑式 (13) 右边  $v_{id}^k$  项

$$w \cdot (w^{n-1} + \sum_{j=2}^n w^{n-j} \cdot \prod_{l=1}^j (1 - \varphi_2^{n-l+1})) \ll \frac{w}{1-w} \quad (16)$$

通过 (13) 式可以定性对  $v_{id}^k$  和  $w$  进行分析. 当  $w = 0.5$  时,  $v_{id}^k$  以原有的速度值来影响最终的  $x_{id}^k$ ; 当  $0 < w < 0.5$  时, (13) 式小于 1, 减小  $v_{id}^k$  对  $x_{id}^k$  的影响, 使粒子收敛到  $p_{gd}^k$  的趋势加强, 尤其是  $w$  越小, 收敛趋势越明显; 当  $0.5 < w < 1$  时, (16) 式大于 1, 加强了  $v_{id}^k$  对  $x_{id}^k$  的影响, 使粒子减弱了向  $p_{gd}^k$  收敛的趋势, 是  $w$  越大, 粒子离  $p_{gd}^k$  越远;  $w = 0$  和  $w = 1$  是两种特殊的情况, 前者完全不考虑  $v_{id}^k$ , 而后者使  $v_{id}^k$  没有任何衰减, 粒子将始终保持运动. Rigel<sup>[3]</sup> 建议在优化过程中  $w$  随着迭代周期的增加线性递减, 以上分析对其进行了合理的解释.  $\varphi_2^{k+1}$  是在 (0,2) 之间均匀分布的随机数, 均值为 2, 对于  $p_{gd}^k$  系数项而言, 使  $x_{id}^k$  单信息最大搜索空间从概率意义上分布于  $p_{gd}^k$  的周围.

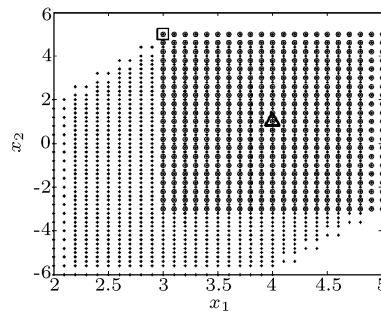


图 2 PSO 的 Pbest 模型可能达到的最大搜索空间  
Fig. 2 The largest covering space of Pbest model

#### 4 PSO 的 Common 模型分析<sup>[5]</sup>

PSO 的 Common 模型是一个普遍模型, 该模型描述了大部分粒子的运动状态, 这也是通常对 PSO 的研究中常用的模型. 首先先给出 Common 模型的定义.

**定义 4.** Common 模型, 定义为 PSO 粒子在  $k$  时刻, 既不是个体最优粒子  $p_{id}^k$ , 也不是群体最优粒子  $p_{gd}^k$ , 即  $x_{id}^k \neq p_{id}^k \neq p_{gd}^k$ .

根据定义 4 的定义, 结合 (4) 式和 (5) 式可以得到 Common 模型的动态方程如下

$$x_{id}^{k+1} = (1 + \eta \cdot w - \eta \cdot \varphi^{k+1}) \cdot x_i^k - \eta \cdot w \cdot x_i^{k-1} + p$$

PSO 算法中存在一些可调参数 (如惯量因子, 加速度因子, 比例因子等), 它们的取值对算法的稳定性和收敛性有很大的影响. 这些可调参数的选取多根据试验经验<sup>[2,6]</sup> 而定. Clerk 和 Kennedy<sup>[4]</sup> 将粒子个体状态方程进行简化后作为常系数线性系统的稳定性进行了分析, 他们假设  $p_{id}^k, p_{gd}^k$  在优化过程中保持不变的情况下, 证明了当条件  $\sqrt{2 \cdot (1 + \eta \cdot w - \eta \cdot \varphi^2)^2 - 4 \cdot w} < 2$  满足时,  $x_{id}^k$  收敛于  $p$  点. Bergh<sup>[7]</sup> 证明了标准 PSO 即不能保证全局收敛, 也不能保证局部收敛. 这些研究出发点并没有考虑粒子动态方程参数时变情况下对粒子运动特性的影响, 因此所得的结论只能在某种程度上定性的在描述 PSO 的特性. 实际的 PSO 算法中, 每个粒子的加速度因子  $\varphi^{k+1}$  是时变的. 对于离散时变的动态系统无法通过系统的特征根是否位于单位圆内来判断系统的渐进稳定性. 本节将给出在减少了 (6) 式 Lipschitz 条件限制的情况下, PSO 算法渐进稳定的充分条件. 首先引入离散动态系统渐进稳定条件.

**定理 1**<sup>[8]</sup>. 零输入时变离散系统状态空间方程:

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) \quad (17)$$

如果存在有限整数,  $M \geq 2, k \geq M$  时均满足如下条件

$$\rho(T(k, k-M)) < 1$$

则该离散时变系统渐进稳定的, 其中  $\rho$  是谱半径, 系统的传输矩阵  $T(k, k-M)$  为  $T(k, k-M) = \prod_{i=1}^M A(k-i)$ .

**引理 3.** PSO 动态系统渐进稳定的充分条件是, 加速度因子  $\varphi^{k+1}$  的取值满足如下条件:

$$\eta \cdot w \in (-1, 1) \quad (18)$$

$$\{\eta \cdot \varphi^{k+1} \in U | U \subset (\varphi_{\min}^{k+1}, \varphi_{\max}^{k+1})\} \quad (19)$$

其中:  $\varphi_{\min}^{k+1} = \frac{-\eta\varphi^k(1+\eta w)}{1+\eta w - \eta\varphi^k}, \varphi_{\max}^{k+1} = \frac{2(1+(\eta w)^2) - \eta\varphi^k(1+\eta w)}{1+\eta w - \eta\varphi^k}$ .

**证明.** 对标准 PSO 公式进行整理有:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{id}^{k+1} \\ \mathbf{x}_{id}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\eta \cdot w - \eta \cdot \varphi^{k+1}) & -\eta \cdot w \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{id}^k \\ \mathbf{x}_{id}^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi^{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} p \quad (20)$$

其中加速度因子  $\varphi^{k+1} = \varphi_1^{k+1} + \varphi_2^{k+1}, \varphi_i^{k+1} = c_i \times rand_i, \mathbf{p} = (\varphi_1^{k+1} \cdot \mathbf{p}_{id}^k + \varphi_2^{k+1} \cdot \mathbf{p}_{gd}^k) / (\varphi_1^{k+1} + \varphi_2^{k+1}), \eta$  为比例因子,  $p$  是系统的外部输入. 则式 (20) 的传输矩阵为

$$T(k, k-2) = \begin{bmatrix} (1+\eta \cdot w - \eta \cdot \varphi^k) & -\eta \cdot w \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+\eta \cdot w - \eta \cdot \varphi^{k+1}) & -\eta \cdot w \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

由定理 1 可知, 当满足条件时  $\rho(T(k, k-2)) = \max \|T(k, k-2)\| = \max \lambda_i < 1$ , 由方程 (20) 描述的动态系统渐进稳定.

$$|\lambda E - T(k, k-2)| = \begin{vmatrix} \lambda - L^k L^{k+1} + \eta \cdot w & \eta \cdot w \cdot L^k \\ -L^k & \lambda + \eta \cdot w \end{vmatrix}$$

其中  $L^k = (1 + \eta \cdot w - \eta \cdot \varphi^k)$ , 传输矩阵的特征方程描述如下:

$$D(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \cdot [2\eta w - L^k(1 + \eta w) + L^k \cdot \eta \cdot \varphi^{k+1}] + (\eta w)^2 \quad (22)$$

根据 Jury 判据, (22) 式的谱半径  $\rho(\cdot) < 1$  的充分必要条件是

$$(\eta w)^2 < 1 \quad (23)$$

$$|2\eta w - L^k(1 + \eta w) + L^k \cdot \eta \cdot \varphi^{k+1}| < 1 + (\eta w)^2 \quad (24)$$

(23) 式求解可得:  $\eta \cdot w \in (-1, 1)$

(24) 式求解可得:  $\frac{-\eta\varphi^k(1+\eta w)}{1+\eta w - \eta\varphi^k} \leq \eta \cdot \varphi^{k+1} \leq \frac{2(1+(\eta w)^2) - \eta\varphi^k(1+\eta w)}{1+\eta w - \eta\varphi^k}$   $\square$

即在任意  $k+1$  时刻, 在去除 Lipschitz 条件约束的情况下, 加速度因子  $\eta \cdot \varphi^{k+1}$  和惯量因子  $w$  的值域由 (18),(19) 式定义. 当  $\eta \cdot \varphi^{k+1}$  的值域  $\eta \cdot \varphi^{k+1} \in U$  满足  $U \subset (\varphi_{\min}^{k+1}, \varphi_{\max}^{k+1})$



时,系统是渐进稳定,否则超过此范围则系统趋于发散.图3,图4给出了当 $w$ 在 $(-1,1)$ 之间取值, $\eta \cdot \varphi^k$ 在 $(0,4)$ 之间取值时 $\eta \cdot \varphi^{k+1}$ 稳定域上下界曲面.

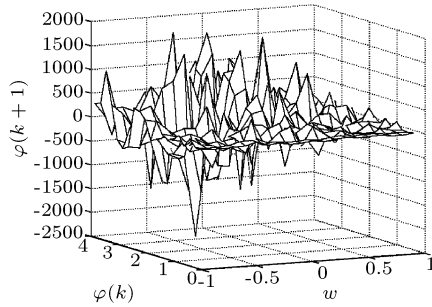


图3  $\varphi_{\max}^{k+1}$  值域曲面

Fig. 3 The range surface of  $\varphi_{\max}^{k+1}$

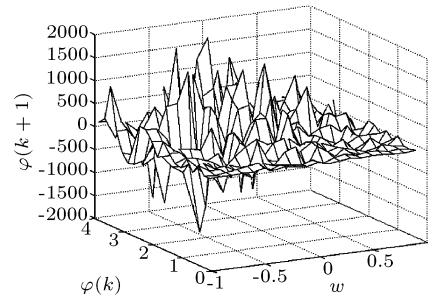


图4  $\varphi_{\min}^{k+1}$  值域曲面

Fig. 4 The range surface of  $\varphi_{\min}^{k+1}$

## 5 结论

建立了标准粒子群优化算法的三种典型模型—Gbest 模型, Pbest 模型和 Commom 模型,并对三种模型情况下的粒子动态特性进行了分析.分析结果表明,在没有新息引入的情况下,Gbest 模型下群体最优粒子和 Pbest 模型粒子的搜索空间非常有限,且容易陷入停滞点,而失去进一步搜索能力,这也同时很大程度上束缚了算法中其他粒子的搜索范围.对 Commom 模型粒子作为时不变系统情况下参数与特征根分布的关系进行了分析,进一步在考虑了 Commom 模型粒子参数时变性的同时,减少了 Lipschitz 条件约束,证明了 Commom 模型渐进稳定的参数充分条件.引理 3 的结果减少了标准 PSO 算法的 Lipschitz 约束条件,给出了加速度因子取值方法,同时将惯量因子的取值范围扩大到 $(-1,1)$ .可以从物理意义上对在 $(-1,0)$ 中取值进行理解,即为粒子总是反方向运动进行搜索.

本文分析所得的结论,提供了 PSO 参数选取以及 PSO 算法改进的理论基础.因此算法的改进方法中,对 Gbest 粒子的运动形式的改变是必须的.如 Bergh 提出的 GCPSO 就是在群体最优粒子的更新公式中引入了一定的随机项来改变其运动状况.另一方面也可以在算法改进中根据引理 3 给出的充分条件,来调节参数的选取,以保证算法的稳定性和收敛性,使粒子群体即不发散,也不早熟收敛.

## References

- 1 Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization. In: Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Piscataway, NJ: IEEE Press, 1995. 4: 1942~1948
- 2 Shi Y, Eberhart R C. Parameter selection in particle swarm optimization. In: Proceedings of Evolutionary Programming VII: EP98, New York: Springer-Verlag, 1998. 591~600
- 3 Riget J, Vesterstroem J S. A diversity-guided particle swarm optimizer – the ARPSO. Technical Report No. 2002-02, Department of Computer Science, Aarhus: University of Aarhus, EVALife, 2002.
- 4 Clerc M, Kennedy J. The particle swarm: explosion stability and convergence in a multi-dimensional complex space. *IEEE Transactions on Evolution Computing*, 2002, 6(1): 58~73
- 5 Chen J, Pan F, Cai T, Tu X Y. The stability analysis of particle swarm optimization without Lipschitz condition constrain. *Control Theory and Application*, 2004, 1(1): 86~90
- 6 Eberhart R C, Shi Y. Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization. In: Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation, San Diego, CA: IEEE Press, 2000. 1: 84~88
- 7 Van den Bergh F. An analysis of particle swarm optimizers. [Ph.D. dissertation] South Africa: thesis, Department of Computer Science, University of Pretoria, 2002
- 8 Xiao Y. Analysis of Dynamical Systems, Northern Jiaotong University Press, 2002

**潘 峰** 北京理工大学讲师, 2000 年毕业于北京理工大学控制理论与控制专业本科, 2005 年毕业于北京理工大学模式识别与智能系统专业, 博士. 研究方向: 智能控制、计算智能、人工智能、伺服系统和机器人.

(**PAN Feng** Received his bachelor degree in control theory and control engineering in 2000, and Ph.D. degree in pattern recognition and intelligent system in 2005, from the Beijing Institute of Technology, P.R. China. His research interests include intelligent control, computational intelligence, artificial intelligence, servo system, and robot.)

**陈 杰** 北京理工大学教授、博士生导师, 分别于 1986, 1993, 2000 年毕业于北京理工大学获学士、硕士、博士学位, 研究方向: 复杂系统、多目标优化与决策、智能控制、非线性控制和优化方法.

(**CHEN Jie** Received his Ph.D. degree in control theory and control engineering in 2000 from the Beijing Institute of Technology. He is currently a professor of Beijing Institute of Technology, P.R. China. His research interests include complicated system multi-object optimization and decision, intelligent control, constrained nonlinear control, and optimization methods.)

**甘明刚** 北京理工大学模式识别与智能系统专业在读博士, 2002 年毕业于北京理工大学控制理论与控制专业本科. 研究方向: 电磁兼容、智能控制、计算智能和伺服系统.

(**GAN Ming-Gang** Received his bachelor degree in control theory and control engineering in 2002, from the Beijing Institute of Technology, P.R. China. Now he is a Ph.D. candidate in pattern recognition and artificial Intelligence at Beijing Institute of Technology, P.R. China. His research interests include EMC, intelligent control, computational intelligence, and servo system.)

**蔡 涛** 北京理工大学副研究员, 1993, 1999 年毕业于北京理工大学控制理论与控制专业, 获学士, 硕士学位, 现就读北京理工大学模式识别与智能系统专业博士. 研究方向: 智能控制、系统工程、电磁兼容、非线性控制和伺服系统.

(**CAI Tao** Received his bachelor and master degrees in control theory and control engineering in 1993 and 1999, respectively, from the Beijing Institute of Technology, P.R. China. His research interests include intelligent control, system engineering, EMC, nonlinear control, and servo system.)

**涂序彦** 北京科技大学教授、博士生导师, 1985 年毕业于华中工学院本科, 1962 年中科院自动化所副博士. 研究方向: 人工智能、人工生命、智能控制、大系统控制论和智能管理.

(**TU Xu-Yan** Received his bachelor degree in electrical engineering from Huazhong Institute of Technology in 1955, and the associate Ph.D. degree in automatic servo mechanism in 1962 from Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, P.R. China. His research interests include artificial intelligence, artificial life, intelligent control, large scale system control theory, and intelligent management. Mr. Tu is currently a professor and the director in the Institute of Computer and System Science, Beijing University of Science and Technology.)