

# 基于条件数的摄像机自标定方法的鲁棒性分析<sup>1)</sup>

黄凤荣<sup>1</sup> 孙凤梅<sup>2,3</sup> 胡占义<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(中科院自动化所模式识别国家重点实验室 北京 100080)

<sup>2</sup>(首都师范大学物理系 北京 100037)

<sup>3</sup>(北方工业大学理学院 北京 100041)

(E-mail: huzy@nlpr.ia.ac.cn)

**摘要** 对基于绝对二次曲线和基于绝对二次曲面的两类摄像机自标定方法的鲁棒性进行了分析, 并从矩阵条件数出发, 通过大量仿真实验对两类方法进行了定量比较. 实验结果表明, 基于绝对二次曲线的摄像机自标定方法的系数矩阵的条件数一般小于基于绝对二次曲面方法的系数矩阵的条件数. 另外, 当常数因子有误差时, 基于绝对二次曲面方法的系数矩阵条件数的变化一般比基于绝对二次曲线方法系数矩阵条件数的变化更剧烈. 上述二点表明, 基于绝对二次曲线的自标定方法的鲁棒性一般要优于基于绝对二次曲面的自标定方法. 上述结论与文献中的一些实验观察正好相佐.

**关键词** 摄像机自标定, 条件数, 鲁棒性

**中图分类号** TP391

## Analysis on the Robustness of Camera Self-calibration in Terms of Conditioning Number

HUANG Feng-Rong<sup>1</sup> SUN Feng-Mei<sup>2,3</sup> HU Zhan-Yi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

<sup>2</sup>(Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100037)

<sup>3</sup>(School of Science, North China University of Technology, Beijing 100041)

(E-mail: huzy@nlpr.ia.ac.cn)

**Abstract** Based on extensive simulations, the robustness aspect of the two main kinds of camera self-calibration methods, namely the absolute conic based method and the absolute quadric based one, is investigated and compared in terms of the conditioning number of the corresponding coefficient matrix. In addition, the sensitivity of the conditioning number to the unknown scales in the constraint equations is also investigated. It is shown that the conditioning number of the absolute conic based method is generally smaller than that of the absolute quadric based one, and the absolute quadric based method is generally more sensitive to the possible scaling errors. The above simulation results indicate that the absolute conic based method is more robust than the absolute quadric based one, a conclusion in direct contradiction to the previously reported observations in the literature.

**Key words** Camera self-calibration, conditioning number, robustness

1) 国家 973 计划 (2004CB318107) 和国家自然科学基金 (60375006) 资助

Supported by National Project 973 (2004CB318107), National Natural Science Foundation of P.R. China (60375006)

收稿日期 2004-4-28 收修改稿日期 2006-1-4

Received April 28, 2004; in revised form January 4, 2006

## 1 引言

摄像机标定是计算机视觉中从二维图像恢复三维结构信息不可缺少的步骤,而摄像机自标定技术是近几年发展起来的非常重要的一类摄像机标定技术. 1992年由 Faugeras 和 Maybank<sup>[1,2]</sup> 首次提出,并在此之后不断发展成熟起来的摄像机自标定技术,总的来说,均是利用所谓的绝对二次曲线(The absolute conic-AC)的像或绝对二次曲面(The absolute dual quadric)的像不随摄像机的刚体运动而变化,而仅限与摄像机的内参数有关这一性质,将绝对二次曲线、绝对二次曲面作为虚拟标定物实现摄像机标定的方法<sup>[1~13]</sup>. 所以,基于绝对二次曲线和基于绝对二次曲面的自标定方法是摄像机自标定方法的两类主要方法. 其中基于 Kruppa 方程的摄像机自标定方法是基于绝对二次曲线自标定方法的代表,本文的研究也将用基于 Kruppa 方程的摄像机自标定方法来代表基于绝对二次曲线的自标定方法. 从发表的文献来看,人们对自标定方法鲁棒性的讨论仅为对某一具体算法的研究,几乎没有对自标定方法固有的鲁棒性问题方面的研究报导. 这里所谓“固有鲁棒性”是指不依赖于具体算法、不依赖于用于标定的图像特征点(线)的误差的鲁棒性,这种鲁棒性是方法所固有的. 另外,文献中的一些报导表明<sup>[5]</sup>,基于绝对二次曲面的方法一般优于基于绝对二次曲线的方法,特别是在标定的奇异性方面. 这些报导仅仅给出了一些定性的解释,如基于绝对二次曲面的方法保证了无穷远平面对所有图像的一致性,缺乏系统性和定量的评估. 我们知道,矩阵的条件数是分析线性问题鲁棒性的一个非常重要的指标,本文试图从两类方法系数矩阵的条件数出发,用 Monte Carlo 方法,通过大量仿真实验来对自标定方法的鲁棒性进行分析研究,并对基于绝对二次曲线的摄像机自标定方法和基于绝对二次曲面的自标定方法进行初步定量比较.

本文第 2 节将对两类方法作简要的介绍,第 3 节是拟比较的内容简介及合理性分析. 第 4、5 节通过仿真实验对两类方法进行比较,第 6 节是总结.

## 2 两类自标定方法

### 2.1 基于 Kruppa 方程的自标定方法

在基于绝对二次曲线的摄像机自标定方法中,最具有代表性的就是基于 Kruppa 方程的方法. Kruppa 方程的矩阵形式为<sup>[5]</sup>

$$FCF^T = s[e']_x C [e']_x^T \quad (1)$$

(1) 中  $s$  是未知的常数因子,  $F$  和  $e'$  是两幅图像间的基本矩阵以及在第二幅图像中的极点,矩阵  $[e']_x$  是对应于向量  $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)^T$  的反对称矩阵,  $C = KK^T$  是待求的绝对二次曲面的像(IAC). 所谓基于 Kruppa 方程的自标定,就是指从约束方程(1)求未知矩阵  $C = KK^T$  的过程. 一旦  $C = KK^T$  得到,摄像机内参数矩阵  $K$  可通过 Cholesky 分解得到.

#### 2.1.1 基本约束

为了求解 Kruppa 方程,通常均需要先消去方程中的未知常数因子  $s$ ,从而得到如下的等比方程

$$\frac{(FCF^T)_{11}}{([e']_x C [e']_x^T)_{11}} = \frac{(FCF^T)_{12}}{([e']_x C [e']_x^T)_{12}} = \frac{(FCF^T)_{13}}{([e']_x C [e']_x^T)_{13}} = \frac{(FCF^T)_{22}}{([e']_x C [e']_x^T)_{22}} = \frac{(FCF^T)_{23}}{([e']_x C [e']_x^T)_{23}} = \frac{(FCF^T)_{33}}{([e']_x C [e']_x^T)_{33}}$$

传统的基于 Kruppa 方程的标定方法大多均是利用上述等比方程所提供的非线性约束来进行标定的. 文献表明, 一个基本矩阵最多可以提供关于矩阵  $C = KK^T$  的 5 个未知元素的两个独立二次约束<sup>[9]</sup>. 因此, 至少需要 3 幅图像才可以求解  $C$ .

### 2.1.2 线性约束形式

由以上介绍可知, 给定  $n$  对图像对 (假设在拍摄过程中避免了退化问题, 同时摄像机的内参数保持不变), 我们可以获得如下  $n$  个 Kruppa 方程

$$\begin{cases} F_1 C F_1^T = s_1 [e'_1]_{\times} C [e'_1]_{\times}^T \\ F_2 C F_2^T = s_2 [e'_2]_{\times} C [e'_2]_{\times}^T \\ \vdots \\ F_n C F_n^T = s_n [e'_n]_{\times} C [e'_n]_{\times}^T \end{cases} \quad (2)$$

其中  $C = KK^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}$ , 记  $\mathbf{x} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)^T$ , 由此我们可以将公式 (2) 中所提供的约束重新写成如下齐次方程组的形式

$$A(\mathbf{s}_V)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

其中  $\mathbf{s}_V = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$  表示由  $n$  个未知常数因子所构成的向量,  $A$  为对应于  $n$  个 Kruppa 方程的系数矩阵, 其元素是  $\mathbf{s}_V$  的函数. 关于矩阵  $A$  的具体表达形式参见附录.

矩阵  $A$  是未知常数因子  $\mathbf{s}_V$  的函数, 因此只要确定了  $\mathbf{s}_V$ , 矩阵  $A$  也就得以确定. 而且一旦矩阵  $A$  确定后我们便可以对摄像机进行线性标定, 如通过 SVD 分解得到未知向量  $\mathbf{x}$  的解.

## 2.2 基于绝对二次曲面的摄像机自标定方法

绝对二次曲面  $\Omega^*$  是由 Triggs<sup>[3]</sup> 最早引入到摄像机自标定的研究中的. 实际上绝对二次曲面是绝对二次曲线的对偶, 是由所有与绝对二次曲线相切的平面所构成的退化形式的二次曲面, 并由一个秩为 3 的  $4 \times 4$  齐次对称矩阵表示. 欧氏空间中绝对二次曲面的标准方程为

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

它的重要性在于  $\Omega^*$  以非常简明的方式包容了无穷远平面和绝对二次曲线的信息, 并且绝对二次曲面  $\Omega^*$  的投影就是  $C = KK^T$ , 即

$$C = \mathbf{s}' P \Omega^* P^T \quad (3)$$

(3) 非常重要, 它是将摄像机内参数的自身约束转移到对  $\Omega^*$  的约束的纽带.  $P$  是射影重建后的投影矩阵,  $\mathbf{s}'$  是未知常数因子. 如果摄像机的内参数恒定, 与基于 Kruppa 方程的方法一样, 通过方程两边对应元素相比, 由 (3) 可以得到关于  $\Omega^*$  的五个二次约束.

同理, 将  $\Omega^*$  用一个 10 维向量  $\mathbf{y}$  来表示, 则  $n$  幅图像由 (3) 对  $\Omega^*$  的约束写成齐次方程的形式为

$$B(\mathbf{s}'_v)\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{s}'_v = [s'_1, s'_2, \dots, s'_n]$  表示由  $n$  个常数因子所构成的向量,  $B$  是系数矩阵, 其元素是  $\mathbf{s}'_v$  的函数. 该矩阵的具体形式见附录. 从 (4) 知, 只要确定了  $\mathbf{s}'_v$ , 矩阵  $B$  也就得以确定. 当矩阵  $B$  确定后我们便可以对摄像机进行线性标定, 如通过 SVD 分解得到未知向量  $\mathbf{y}$  的解, 从而可以求得  $\Omega^*$ .  $\Omega^*$  确定后, 由 (3) 计算得到  $C$ , 对  $C$  再进行 Cholesky 分解得到  $K$ .

### 3 拟比较内容及仿真实验的具体实现步骤

#### 3.1 采用系数矩阵条件数比较两类方法的合理性

对基于 Kruppa 方程的自标定方法而言, 首先, 对于多元二次非线性约束方程的求解到目前为止还没有很有效的方法<sup>[4,5]</sup>, 也就是说通过 Kruppa 方程的非线性约束来标定摄像机的方法实用价值不大. 其次, 导致利用求解 Kruppa 方程进行摄像机自标定为非线性问题的根本原因在于方程中的常数因子是未知的. 因此, 先估计 Kruppa 方程中的常数因子, 然后对摄像机进行线性标定是一种值得探索的途径, 雷成等<sup>[12]</sup>提出的基于 Kruppa 方程的自标定方法已证明了此种想法在实际应用中的可行性. 同理, 对于基于绝对二次曲面的自标定方法也存在同样的问题.

因此, 总的来说人们希望通过线性约束对摄像机进行线性标定. 而线性标定中系数矩阵的条件数是刻画标定方法鲁棒性非常重要的一个指标. 本文正是从这一观点出发, 通过比较两类方法系数矩阵的条件数, 以期定量地对这两类方法的鲁棒性进行分析和比较.

#### 3.2 拟比较的内容

我们将从以下两个侧面来对系数矩阵的条件数进行比较:

1) 当常数因子已知时, 比较两类方法线性约束中系数矩阵条件数的大小. 系数矩阵的条件数越大, 说明该方法越不鲁棒.

2) 当常数因子有误差时, 比较两类方法各自系数矩阵条件数的变化情况. 变化越剧烈, 说明对应方法对常数因子的误差越敏感, 方法也就鲁棒性差.

#### 3.3 仿真实验步骤

首先, 为了确保两类方法的可比性以及比较的结果有意义, 两类方法的所有实验均是在相同的数据下进行的. 其次, 本文重在讨论方法本身固有的鲁棒性, 也就是说不是由图像噪声导致的不鲁棒, 所以在实验中将不考虑图像噪声, 此时当内参数给定时, 结果只与摄像机的运动有关.

仿真实验中, 摄像机的内参数均设定为

$$K = \begin{bmatrix} 1200 & 0.2 & 512 \\ 0 & 1200 & 384 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

摄像机的运动形成方式, 也就是  $n$  幅图像的产生, 是通过分别随机产生  $n$  个旋转轴、 $n$  个旋转角度和  $n$  个平移向量来实现的.

在仿真实验中, 对于基于 Kruppa 方程的自标定方法, 首先, 基本矩阵  $F$  和极点  $e'$  是由以下的公式计算得到的<sup>[5]</sup>, 即  $F = K^{-T}[T]_{\times}RK^{-1}$ ,  $e' = KT$ . 此时, 常数因子  $s = \frac{1}{(\det(K))^2}$ . 然后, 确定系数矩阵  $A$  并计算矩阵  $A$  的条件数.

同理, 对于基于绝对二次曲面的自标定方法, 首先, 实现射影重建, 其中实验中从射影空间到欧式空间的射影变换矩阵取为<sup>[11]</sup>:  $H = \begin{bmatrix} K^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}^T & d \end{bmatrix}$ , 其中  $\mathbf{a} = [-0.0057, 0.002, -0.2374]^T$  是无穷远平面在射影空间的方程,  $d = 0.2^2$ . 此时,  $s' = 1$ . 然后, 确定系数  $B$  矩阵并计算矩阵  $B$  的条件数.

2) 事实上我们发现,  $\mathbf{a}, d$  可以为任意数.  $\mathbf{a}, d$  不同的取值对实验结果没有影响, 所以这里我们仅给出在实验中采用的一组数据.

## 4 三幅图像的实验结果

1) 常数因子无误差的情况. 应用三幅图像对摄像机进行线性标定, 对两类标定方法分别求解其相应的系数矩阵的条件数. 图 1 是 100 次实验结果的曲线图, 其中每次实验以三幅图像为一组进行一次标定即进行一次实验. 从图中可以看出, 基于绝对二次曲面自标定方法系数矩阵的条件数总是大于基于 Kruppa 方程方法的条件数, 这说明基于绝对二次曲面自标定方法比基于 Kruppa 方程的方法更不鲁棒.

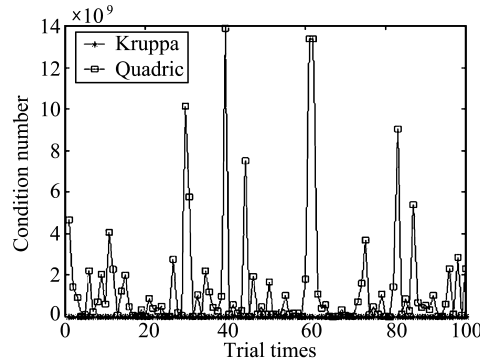


图 1 三幅图像时两类方法系数矩阵条件数的比较

Fig. 1 A comparison of the conditioning numbers of the two approaches with triplets of images

2) 常数因子有误差的情况. 同样, 一次实验应用三幅图像对摄像机进行线性标定. 为了考察两类方法当常数因子有误差时系数矩阵条件数的变化情况, 对常数因子分别加上均值为零的高斯噪声, 噪声方差从常数因子实际值的 10% 增加到常数因子实际值的 150% (步长为 10%). 在每一噪声水平下均做 100 次独立实验, 并计算在每一噪声水平下两类方法的系数矩阵的条件数的均值和均方差. 所有实验的结果都基本相同, 由于篇幅所限, 本文将不一一报导, 有兴趣的读者可参阅文献 [13]. 图 2 是其中一次实验结果的曲线图, 其中, 图 2(a) 是均值的曲线图, 图 2(b) 是相应的方差的曲线图. 实验结果表明: 当常数因子有误差

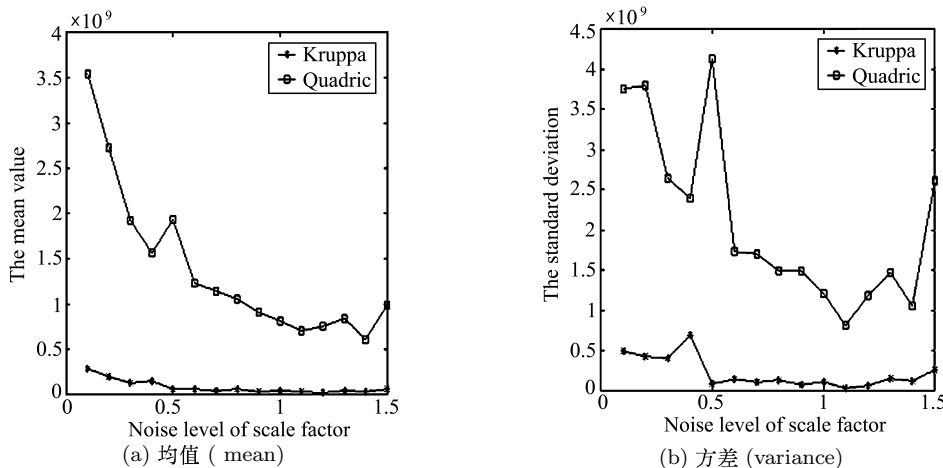


图 2 三幅图像, 当常数因子有误差时系数矩阵条件数变化的均值和方差比较

Fig. 2 A comparison of the conditioning number's mean and variance of the two approaches with triplets of images

时, 基于绝对二次曲面的自标定方法系数矩阵条件数变化的方差和均值都比基于 Kruppa 方程方法的大, 也就是说基于绝对二次曲面自标定方法系数矩阵条件数的变化比基于 Kruppa 方程的方法的条件数的变化更加剧烈, 由此说明常数因子有误差时, 基于绝对二次曲面自标定方法不如基于 Kruppa 方程的方法鲁棒.

## 5 四幅、五幅图像的实验结果

1) 常数因子无误差的情况. 与三幅图像相同, 分别用四幅、五幅图像对摄像机进行线性标定, 对两类标定方法分别求解其对应的系数矩阵的条件数. 大量实验表明: 无论是采用四幅还是五幅图像, 基于绝对二次曲面自标定方法的系数矩阵的条件数总是大于基于 Kruppa 方程方法的条件数, 这说明基于绝对二次曲面自标定方法不如基于 Kruppa 方程的方法鲁棒. 由于篇幅所限, 这里 (及以后) 就不再报导具体实验结果了, 感兴趣的读者可参阅文献 [13].

2) 常数因子有误差的情况. 结果与三幅图像的情况类似, 当常数因子有误差时, 基于绝对二次曲面自标定方法系数矩阵条件数的变化比基于 Kruppa 方程方法的变化要剧烈.

3) 图像数目增加对条件数的影响. 为了考察标定中图像数目增加对两类方法系数矩阵条件数产生的影响, 我们比较了使用三幅、四幅、五幅和六幅图像标定时两类自标定方法系数矩阵条件数的变化情况. 结果表明: 对两类方法而言, 采用六幅图像标定时系数矩阵条件数都最小, 而采用三幅时最大. 也就是说, 系数矩阵的条件数随着图像数的增加而减小, 特别是从三幅图像增加到四幅时条件数减小的幅度很大. 这说明在标定中可以通过采用多幅图像来提高标定方法的鲁棒性, 但当图像数大于一定数目时, 通过增加图像数量来提高方法的鲁棒性的效果就不明显了.

**备注.** 1) 对于基于 Kruppa 方程的自标定方法而言, 摄像机平移运动的大小对条件数没有影响. 对于基于绝对二次曲面的方法而言, 则与平移向量的大小有关.

2) 不论是对基于 Kruppa 方程的自标定方法而言, 还是对于基于绝对二次曲面的自标定方法而言, 条件数都与旋转角的大小有关.

3) 文献中的研究<sup>[5]</sup> 已表明对系数矩阵进行规一化后, 会使矩阵的条件数降低. 因此, 本文中所有的实验结果都是对系数矩阵规一化后的结果, 另外, 本文中系数矩阵的规一化是指对矩阵中的每一行进行规一化.

4) 当常数因子有误差时, 我们应用两类方法均对摄像机进行了线性标定, 即通过 SVD 分解来求解摄像机的内参数矩阵. 我们发现对这两类方法而言, 当常数因子误差比较小时, 比如, 当给常数因子加上均值为零、方差为常数因子真实值的 2%、4% 的高斯噪声时, 所求得的内参数的解都与真实值还是比较接近的. 但是, 当常数因子误差比较大时, 比如, 当给常数因子加上均值为零、方差为常数因子真实值的 10% 的高斯噪声时, 所求得的内参数的解都与真实值相差较大. 这也就是说, 如果估计的常数因子的误差不大, 此时可以先对摄像机进行线性标定, 并将线性标定的结果作为初始值再进一步进行非线性优化从而得到更好的标定结果.

## 6 结论

通过大量的仿真实验对摄像机自标定的两类主要方法从系数矩阵条件数出发进行了定量比较, 并且对自标定方法的鲁棒性进行了一些分析. 实验结果表明, 基于 Kruppa 方程的摄像机自标定方法的系数矩阵的条件数小于基于绝对二次曲面方法的系数矩阵的条件数, 并且当常数因子有误差时, 基于绝对二次曲面方法的系数矩阵条件数的变化比基于 Kruppa 方程方法的矩阵条件数的变化更剧烈. 这说明基于绝对二次曲面的自标定方法固

有的鲁棒性要差, 并且对常数因子的误差也比较敏感. 基于此, 我们的结论是: 对基于绝对二次曲线和基于绝对二次曲面的这两类自标定方法而言, 后者的鲁棒性较差, 而基于绝对二次曲线的方法相对来说鲁棒性较高.

值得指出的是, 本文方法是以条件数的大小来衡量两类方法的, 是不是通过条件数能完全衡量两类方法的鲁棒性也是值得进一步研究的问题. 其次, 二类方法系数矩阵的维数也不一样, 在这种情况下, 仍利用系数矩阵的条件数来衡量二类方法的鲁棒性是否合理也是一个有待进一步探讨的问题. 另外, 从条件数出发, 我们得到的结论正好与文献中的结论相佐<sup>[5]</sup>. 由于文献中的结论也是一些实验观察结果, 缺乏严格的理论推导, 所以, 关于到底哪一类方法更鲁棒这个问题, 还需要进一步进行系统的研究. 本文可以说仅仅在这一方面进行了一点初步的探讨, 所得到的结果可能也仅仅是从某一侧面的一些描述, 很难说是最终结论性的成果.

## References

- [1] Faugeras O. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo rig. In: Proceedings of the European Conference on Computer Vision, Santa Margherita Ligure, Italy: LNCS 588, 1992. 563~578
- [2] Maybank S, Faugeras O. A theory of self-calibration of a moving camera. *International Journal of Computer Vision*, 1992, **8**(2): 123~151
- [3] Triggs B. Autocalibration and the absolute quadric. In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition, San Juan, Puerto Rico, USA: IEEE Press, 1997. 609~614
- [4] Sturm P. A case against Kruppa's equations for camera self-calibration. In: Proceedings of International Conference of Image Processing, Chicago, USA: IEEE Press, 1998. 172~175
- [5] Hartley R, Zisserman A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, 2000
- [6] Luong Q T, Faugeras O. Self-calibration of a moving camera from point correspondences and fundamental matrices. *International Journal of Computer Vision*, 1997, **22**(3): 261~289
- [7] Heyden A, Åström K. Euclidean reconstruction from constant intrinsic parameters. In: Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition, Vienna, Austria: IEEE Press, 1996. 339~343
- [8] Pollefeys M, Van Gool L, Osterlinck A. The modulus constraint: a new constraint for self-calibration. In: Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition, Vienna, Austria: IEEE Press, 1996. 349~353
- [9] Hartley R. Kruppa's equations derived from the fundamental matrix. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, **19**(2): 133~135
- [10] Xu G, Sugimoto N. Algebraic derivation of the Kruppa equations and a new algorithm for self-calibration of cameras. *Journal of Optical Society of America*, 1999, **16**(10): 2419~2424
- [11] Pollefeys M. Self-calibration and metric 3D reconstruction from uncalibrated image sequences. [Ph.D. Dissertation]. Leuven: Katholieke Universiteit, 1999
- [12] Lei C, Hu Z Y, Wu F C. A new Kruppa equations based self-calibration approach. *Chinese Journal of Computers*, 2003, **26**(5): 587~597
- [13] Huang F. R. Image based measurement and reconstruction. [Ph.D. Dissertation]. Beijing: Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, 2004

**黄凤荣** 博士生. 研究方向为摄像机标定和三维重建.

(**HUANG Feng-Rong** Ph. D. candidate. Her research interests include camera calibration and 3D reconstruction.)

**孙凤梅** 副教授. 研究方向为光电信息处理和计算机视觉.

(**SUN Feng-Mei** Associate professor. Her research interests include optical-electrical information processing and computer vision.)

**胡占义** 博士, 研究员. 研究方向为三维计算机视觉和模式识别.

(**HU Zhan-Yi** Ph. D., professor. His research interests include 3D computer vision and pattern recognition.)

## 附录

Kruppa 方程方法中系数矩阵  $A$  的具体形式为<sup>[13]</sup>

$$A(\mathbf{s}_v) = \begin{bmatrix} L^1 - s_1 R^1 \\ \vdots \\ L^k - s_k R^k \\ \vdots \\ L^n - s_n R^n \end{bmatrix}$$

其中

$$L^k = \begin{bmatrix} (F_k^{11})^2 & 2F_k^{12}F_k^{11} & 2F_k^{13}F_k^{11} & (F_k^{12})^2 & 2F_k^{13}F_k^{12} & (F_k^{13})^2 \\ F_k^{21}F_k^{11} & F_k^{12}F_k^{21} + F_k^{22}F_k^{11} & F_k^{13}F_k^{21} + F_k^{23}F_k^{11} & F_k^{12}F_k^{22} & F_k^{13}F_k^{22} + F_k^{23}F_k^{12} & F_k^{13}F_k^{23} \\ F_k^{31}F_k^{11} & F_k^{12}F_k^{31} + F_k^{32}F_k^{11} & F_k^{13}F_k^{31} + F_k^{33}F_k^{11} & F_k^{12}F_k^{32} & F_k^{13}F_k^{32} + F_k^{33}F_k^{12} & F_k^{13}F_k^{33} \\ (F_k^{21})^2 & 2F_k^{22}F_k^{21} & 2F_k^{23}F_k^{21} & (F_k^{22})^2 & 2F_k^{23}F_k^{22} & (F_k^{23})^2 \\ F_k^{31}F_k^{21} & F_k^{22}F_k^{31} + F_k^{32}F_k^{21} & F_k^{23}F_k^{31} + F_k^{33}F_k^{21} & F_k^{22}F_k^{32} & F_k^{23}F_k^{32} + F_k^{33}F_k^{22} & F_k^{23}F_k^{33} \\ (F_k^{31})^2 & 2F_k^{32}F_k^{31} & 2F_k^{33}F_k^{31} & (F_k^{32})^2 & 2F_k^{33}F_k^{32} & (F_k^{33})^2 \end{bmatrix}$$

$$R^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (e_k^{i3})^2 & -2e_k^{i2}e_k^{i3} & (e_k^{i2})^2 \\ 0 & (e_k^{i3})^2 & e_k^{i2}e_k^{i3} & 0 & e_k^{i1}e_k^{i3} & e_k^{i2}e_k^{i1} \\ 0 & e_k^{i2}e_k^{i3} & (e_k^{i2})^2 & e_k^{i1}e_k^{i3} & e_k^{i2}e_k^{i1} & 0 \\ (e_k^{i3})^2 & 0 & -2e_k^{i1}e_k^{i3} & 0 & 0 & (e_k^{i1})^2 \\ -e_k^{i2}e_k^{i3} & e_k^{i1}e_k^{i3} & e_k^{i2}e_k^{i1} & 0 & -(e_k^{i1})^2 & 0 \\ (e_k^{i2})^2 & -e_k^{i2}e_k^{i1} & 0 & (e_k^{i1})^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中,  $F_k^{ij}$  是指第  $k$  个基本矩阵的第  $i$  行、第  $j$  列元素.  $e_k^i$  表示第一幅图像对应的摄像机的光心在第  $k$  幅图像的投影.  $e_k^{i1}$  表示  $e_k^i$  的第  $i$  个元素. 系数矩阵  $B$  的具体形式为<sup>[13]</sup>

$$B(\mathbf{s}'_v) = \begin{bmatrix} L^1 - s'_1 R^1 \\ \vdots \\ L^k - s'_k R^k \\ \vdots \\ L^n - s'_n R^n \end{bmatrix}$$

$$R^k = \begin{bmatrix} (R_k^{11})^2 & 2P_k^{12}P_k^{11} & 2P_k^{13}P_k^{11} & (P_k^{12})^2 & 2P_k^{13}P_k^{12} \\ P_k^{21}P_k^{11} & P_k^{12}P_k^{21} + P_k^{22}P_k^{11} & P_k^{13}P_k^{21} + P_k^{23}P_k^{11} & P_k^{12}P_k^{22} & P_k^{13}P_k^{22} + P_k^{12}P_k^{23} \\ P_k^{31}P_k^{11} & P_k^{12}P_k^{31} + P_k^{32}P_k^{11} & P_k^{13}P_k^{31} + P_k^{33}P_k^{11} & P_k^{12}P_k^{32} & P_k^{13}P_k^{32} + P_k^{12}P_k^{33} \\ (R_k^{21})^2 & 2P_k^{22}P_k^{21} & 2P_k^{23}P_k^{21} & (P_k^{22})^2 & 2P_k^{23}P_k^{22} \\ P_k^{31}P_k^{21} & P_k^{22}P_k^{31} + P_k^{32}P_k^{21} & P_k^{23}P_k^{31} + P_k^{33}P_k^{21} & P_k^{22}P_k^{32} & P_k^{23}P_k^{32} + P_k^{22}P_k^{33} \\ (R_k^{31})^2 & 2P_k^{32}P_k^{31} & 2P_k^{33}P_k^{31} & (P_k^{32})^2 & 2P_k^{33}P_k^{32} \end{bmatrix}$$

$$L^k = \begin{bmatrix} (P_k^{13})^2 & 2P_k^{14}P_k^{11} & 2P_k^{14}P_k^{12} & 2P_k^{14}P_k^{13} & (P_k^{14})^2 \\ P_k^{13}P_k^{23} & P_k^{14}P_k^{21} + P_k^{24}P_k^{11} & P_k^{14}P_k^{22} + P_k^{12}P_k^{24} & P_k^{14}P_k^{23} + P_k^{13}P_k^{24} & P_k^{14}P_k^{24} \\ P_k^{13}P_k^{33} & P_k^{14}P_k^{31} + P_k^{34}P_k^{11} & P_k^{14}P_k^{32} + P_k^{12}P_k^{34} & P_k^{14}P_k^{33} + P_k^{13}P_k^{34} & P_k^{14}P_k^{34} \\ (P_k^{23})^2 & 2P_k^{24}P_k^{21} & 2P_k^{24}P_k^{22} & 2P_k^{24}P_k^{23} & (P_k^{24})^2 \\ P_k^{23}P_k^{33} & P_k^{24}P_k^{31} + P_k^{34}P_k^{21} & P_k^{24}P_k^{32} + P_k^{22}P_k^{34} & P_k^{24}P_k^{33} + P_k^{23}P_k^{34} & P_k^{24}P_k^{34} \\ (P_k^{33})^2 & 2P_k^{34}P_k^{31} & 2P_k^{34}P_k^{32} & 2P_k^{34}P_k^{33} & (P_k^{34})^2 \end{bmatrix}$$

$$L^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中,  $P_k^{ij}$  是指射影空间中第  $k$  个投影矩阵的第  $i$  行、第  $j$  列元素.