第 32 卷 第 2 期 自动化学报 Vol. 32, No. 2
2006 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA March, 2006

约束随机线性二次最优控制的研究 1)

黄玉林[1,2] 张维海[2]

[1](山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)

[2](山东轻工业学院电子信息与控制工程学院 济南 250100)

(E-mail: w_hzhang@163.com)

摘 要 研究线性终端状态约束下不定随机线性二次最优控制问题. 首先利用 Lagrange multiplier 定理得到了存在最优线性状态反馈解的必要条件, 而在加强的条件下也得到了最优控制存在的充分条件. 从某种意义上讲, 以往关于无约束随机线性二次最优控制的一些结果可以看成本文主要定理的推论.

关键词 随机 LQ 最优控制, 线性约束, Lagrange multiplier 定理, 广义微分 Riccati 方程

中图分类号 O232; O211.63

Study on Stochastic Linear Quadratic Optimal Control with Constraint

HUANG Yu-Lin[1,2] ZHANG Wei-Hai[2]

[1](*School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan* 250100)

[2](*College of Electronic Information and Control Engineering, Shandong Institute of Light Industry, Jinan* 250100)

(E-mail: w_hzhang@163.com)

Abstract This paper studies indefinite stochastic linear quadratic optimal control problem with linear terminal state constraint. At first, we present a necessary condition for the existence of optimal linear state feedback control by means of Lagrange multiplier theorem. Then, a sufficient condition is also given under the strengthened conditions. To some extent, the previous results on stochastic linear quadratic optimal control without constraint can be viewed as corollaries of the main theorems of this paper.

Key words Stochastic LQ optimal control, linear constraint, Lagrange multiplier theorem, generalized differential Riccati equation

1 引言

确定性系统的线性二次 (LQ) 最优控制理论首先由 Kalman 所创立, 迄今为止无论在理论还是应用方面都得到了极大的发展, 在现代控制理论中占有中心的地位[1,2]. [3~5] 研究了随机 Ito 系统的标准 LQ 最优控制问题, 推广了确定性系统的有关结论. 最近发现随机 LQ 和确定性 LQ 具有一些本质的差别[6], 即对随机 LQ 最优控制而言, 控制权因子 R 可

1) 国家自然科学基金 (60474013) 和山东省优秀中青年科学家基金 (2004BS01010) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60474013) and the Excellent Young Scientist Foundation of Shandong Province (2004BS01010)
收稿日期 2005-5-13 收修改稿日期 2005-10-27
Received May 13, 2005; in revised form October 27, 2005

以不定号，而最优消费函数仍可适定．这一发现引发了一系列的后续研究，得到了许多重要的成果[7~9]．上述工作处理的是无约束的不定号随机 LQ 优化问题，但是对于一个实际的物理系统的优化，各种约束条件是必不可少的，例如状态或控制满足某种要求等．本文我们利用凸分析的 Lagrange multiplier 定理研究终端状态满足线性约束的不定随机 LQ 控制问题，证明了约束随机 LQ 问题存在线性反馈最优解的一个必要条件是其相应的约束微分 Riccati 方程存在唯一的解 $P\in NBV^{n\times n}[0,T]$. 特别是无约束随机 LQ 最优控制的已有结论可以作为本文主要定理的一个推论而得到．具体而言，本文主要研究如下带线性约束的随机线性二次最优控制问题 (通篇记 $\boldsymbol{x}'$ 表示向量 (或矩阵)$\boldsymbol{x}$ 的转置).

问题 1.

$$\inf\{J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}):=E\int_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}'(t)Q\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}'(t)R\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t\} \tag{1}$$

$$\text{s.t. } \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=[A(t)\boldsymbol{x}(t)+B(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t+[C(t)\boldsymbol{x}(t)+D(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}w(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{2}$$

$$a_{i1}x_1(T)+a_{i2}x_2(T)+\cdots+a_{in}x_n(T)=\xi_i,\ a.s.\quad i=1,2,\cdots,r \tag{3}$$

这里，$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))'$ 为 n 维的状态变量，$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制输入，$w(\cdot)$ 是定义在概率空间 (Ω,F,P) 上的一维的标准 Brown 运动，$F_t=\sigma(w(s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant T)$ 为 Brown 运动生成的信息流；$u(\cdot)$ 属于允许控制集

$$U_{ad}=\left\{\begin{array}{c}\boldsymbol{u}(t)\in R^m,\{F_t\}_{t\in[0,T]}-\ \text{适应可测的随机过程，满足}E\int_0^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty,\\ \text{而且相应的轨道 (2) 满足约束条件 (3)}\end{array}\right\}$$

ξ_i 为给定的 F_T 可测的平方可积随机变量，即 $E|\xi_i|^2<+\infty$, a_{ij} 为已知的实数，$i=1,2,\cdots,r$; $j=1,2,\cdots,n$. 令 $M_{r\times n}=(a_{ij})_{r\times n}$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)'$, 则约束 (3) 可写为 $M\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{\xi}$, 在这里假设 M 为行满秩．指标泛函中权重矩阵 $Q(t)$ 和 $R(t)$ 为对称阵，$A(t),B(t),C(t),D(t),Q(t),R(t)$ 是适当维数的时变矩阵，且满足以下假设 **H1**

H1：　$A,C\in L^\infty(0,T;R^{n\times n})$, $Q\in L^\infty(0,T;S^n)$, $B,D\in L^\infty(0,T;R^{n\times m})$, $R\in L^\infty(0,T;S^m)$

其中 $L^\infty(0,T;X):=\left\{f(t):X-\text{值本性有界可测函数，满足}ess\sup_{t\in[0,T]}|f(t)|<+\infty\right\}$, $R^{n\times m}$ 为 $n\times m$ 矩阵，S^n 为 n 阶对称阵．由于并不要求消费函数中的权因子是定号的，所以问题 1 也称为带约束的不定号随机 LQ 最优控制问题.

2　预备知识

表述本文主要定理之前，首先给出本文要用到的重要的 Lagrange multiplier 定理和一些重要的引理[10]．

定义 1. 设 X 为向量空间，Y 为赋范线性空间，T 为 X 到 Y 的变换，对 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}\in X$, 如果下面极限

$$\delta T(\boldsymbol{x};\boldsymbol{h})=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}[T(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h})-T(\boldsymbol{x})] \tag{4}$$

存在，称此极限为 T 在 $\boldsymbol{x}$ 处方向 $\boldsymbol{h}$ 的方向导数或 Gateaux 导数．若对任意的 $\boldsymbol{h}\in X$, 上述极限都存在，则称 T 在 $\boldsymbol{x}$ 处为 Gateaux 可导.

定义 2. 设 X,Y 为赋范线性空间，T 为定义于 X 到 Y 的变换，对给定的 $\boldsymbol{x}\in X$, T 在 $\boldsymbol{x}$ 处为 Gateaux 可导，Gateaux 导数 $\delta T(\boldsymbol{x};\boldsymbol{h})\in Y$ 关于 $\boldsymbol{h}$ 为有界线性的变换，且满足

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-T(\boldsymbol{x})-\delta T(\boldsymbol{x};\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=0$$

则称 T 在 x 处为 Frechet 可导, $\delta T(\boldsymbol{x};\boldsymbol{h})$ 为 T 在 $\boldsymbol{x}$ 处 $\boldsymbol{h}$ 的 Frechet 导数.

定义 3. 设 $T(\boldsymbol{x})$ 为定义于 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的变换，且有连续的 Frechet 导数. 若对 $\boldsymbol{x}_0 \in X$, $\delta T(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{h})$ 为从 X 到 Y 的满射，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为变换 T 的正则点.

定理 1 (Lagrange multiplier). 设 $f(\boldsymbol{x})$ 是定义于 Banach 空间 X 上具有连续的 Frechet 导数的实值泛函, $H(\boldsymbol{x})$ 为 X 到 Banach 空间 Z 的映射, $\boldsymbol{x}_0$ 为变换 $H(\boldsymbol{x})$ 的正则点. 若 $f(\boldsymbol{x})$ 在约束 $H(\boldsymbol{x})=0$ 下在 $\boldsymbol{x}_0$ 处达到极值，则存在 Z 上有界线性泛函 z_0^*, 使 Lagrange 泛函

$$L(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + z_0^* H(\boldsymbol{x})$$

在 $\boldsymbol{x}_0$ 处有驻点，即

$$\delta f(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{h}) + z_0^* \delta H(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{h}) = 0 \tag{5}$$

对所有 $\boldsymbol{h} \in X$ 都成立.

引理 1. 设 $\alpha(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 连续，若对所有在 $[t_1,t_2]$ 连续可导的函数 $h(t)$, 且 $h(t_1)=h(t_2)=0$, 都有 $\int_{t_1}^{t_2}\alpha(t)h(t)\mathrm{d}t=0$ 成立，则 $\alpha(t)\equiv 0$, $t\in[t_1,t_2]$.

引理 2. 设 $\alpha(t),\beta(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 连续, 若对所有在 $[t_1,t_2]$ 连续可导的函数 $h(t)$, 且 $h(t_1)=h(t_2)=0$, 都有 $\int_{t_1}^{t_2}[\alpha(t)h(t)+\beta(t)\dot{h}(t)]\mathrm{d}t=0$ 成立, 则 $\beta(t)$ 为可导函数, 且导数为 $\dot{\beta}(t)=\alpha(t)$, $t\in[t_1,t_2]$.

在本节的最后，再给出一个关于广义逆矩阵的引理.

引理 3[9]**.** 给定 $M\in R^{n\times m}$, 则存在唯一的 $M^+\in R^{m\times n}$, 满足

$$MM^+M=M,\ M^+MM^+=M^+,\ (MM^+)'=MM^+,\ (M^+M)'=M^+M$$

矩阵 M^+ 称为 M 的 Moor-Penrose 广义逆.

3 必要性条件

首先给出下列定义.

定义 4. 问题 1 称为适定的 (well-posed), 如果

$$V(\boldsymbol{x}_0)=\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\cdot))>-\infty,\quad \forall \boldsymbol{x}_0\in R^n$$

$\boldsymbol{u}_*$ 称为最优控制 (关于初值 $\boldsymbol{x}_0$), 如果 $V(\boldsymbol{x}_0)=J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_*)$. 与最优控制相对应的轨道记为 x_*.

首先讨论问题 1 存在最优线性状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}_*(t)=K_*(t)\boldsymbol{x}(t)$ 的必要条件. 也就是说仅考虑问题 1 在线性状态反馈

$$\boldsymbol{u}(t)=K(t)\boldsymbol{x}(t),\quad K(\cdot)\in C^{m\times n}[0,T] \tag{6}$$

下达到最优的必要条件. 我们首先把原最优化问题转变成确定性问题，然后通过 Lagrange multiplier 定理得到存在最优解的必要条件. 把 (6) 代入 (2), 得到如下闭环系统 (为了方便，$\boldsymbol{x}(t)$ 简记为 $\boldsymbol{x}$)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(A+BK)\boldsymbol{x}\mathrm{d}t+(C+DK)\boldsymbol{x}\mathrm{d}w \tag{7}$$

对 $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')$ 利用 Ito 公式，其中 $\boldsymbol{x}$ 为 (7) 式的解，得到

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')=[(A+BK)\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'(A+BK)'+(C+DK)\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'(C+DK)']\mathrm{d}t+(\cdots)\mathrm{d}w$$

令 $E(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')=X$, 显然 X 为对称阵. 对上式从 0 到 t 积分，然后再取数学期望得到如下线性矩阵微分方程

$$\begin{aligned}&\dot{X}=(A+BK)X+X(A+BK)'+(C+DK)X(C+DK)'\\&X(0)=X_0=\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0'\end{aligned}$$

把 (6) 代入 (1), 经简单变形得到目标泛函如下 (其中 trA 表示矩阵 A 的迹):

$$J(X,K)=\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}[QX(t)+K'(t)RK(t)X(t)]\mathrm{d}t$$

此时约束 (3) 变为

$$MX(T)M'=N,\quad N=E(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}')$$

这样原问题 1 可转化为寻找 $K(t)$ 使下列约束优化问题达到最小.

问题 2.

$$\begin{aligned}&\inf\{J(X,K)=\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}[QX(t)+K'(t)RK(t)X(t)]\mathrm{d}t\}\\&\text{s.t.}\quad \dot{X}=(A+BK)X+X(A+BK)'+(C+DK)X(C+DK)' \qquad (8)\\&\qquad X(0)=X_0 \qquad (9)\\&\qquad MX(T)M'=N \qquad (10)\end{aligned}$$

注 1. 显然，问题 1 若存在线性反馈最优解 $\boldsymbol{u}_*(t)=K_*(t)\boldsymbol{x}(t)$, 则 K_* 一定也是问题 2 的最优解，反之不成立.

目标泛函 $J(X,K)$ 可视为定义在空间 $C^{n\times n}[0,T]\times C^{m\times n}[0,T]$ 上，其中 $C^{n\times n}[0,T]$ 为所有元素是 $[0,T]$ 上连续函数的 n 阶方阵构成的空间； (8) 定义了从 $C^{n\times n}[0,T]\times C^{m\times n}[0,T]$ 到 $C^{n\times n}[0,T]$ 的变换 $H(X,K)$:

$$H(X,K)(t)=X(t)-X(0)-\int_0^t[(A+BK)X+X(A+BK)'+(C+DK)X(C+DK)']\mathrm{d}t \qquad (11)$$

而 (10) 定义了从 $C^{n\times n}[0,T]$ 到 $R^{r\times r}$ 的变换 $G(X)$:

$$G(X(T)):=MX(T)M' \qquad (12)$$

从而约束 (8)~(10) 可表示成

$$H(X,K)(t)=0,\quad G(X(T))=N,\quad \forall t\in[0,T] \qquad (13)$$

下面来证明 $J(X,K),H(X,K),G(X)$ 都有连续的 Frechet 导数，并求出它们的导数.

引理 4. $J(X,K),H(X,K),G(X)$ 都有连续的 Frechet 导数，且导数为

$$\delta J_X(X,K;\Delta X)=tr\int_0^{\mathrm{T}}(Q+K'RK)\Delta X\mathrm{d}t \qquad (14)$$

$$\delta J_K(X,K;\Delta K)=tr\int_0^{\mathrm{T}}(\Delta K'RKX+K'R\Delta KX)\mathrm{d}t \qquad (15)$$

$$\delta H_X(X,K;\Delta X)(t)=\Delta X(t)-\int_0^t[(A+BK)\Delta X+\Delta X(A+BK)'+$$

$$(C+DK)\Delta X(C+DK)']\mathrm{d}t \tag{16}$$

$$\delta H_K(X,K;\Delta K)(t)=-\int_0^t[B\Delta KX+X\Delta K'B'+(C+DK)X(D\Delta K)'+ (D\Delta K)X(C+DK)']\mathrm{d}t \tag{17}$$

$$\delta G(X;\Delta X(T))=M\Delta X(T)M' \tag{18}$$

其中 $\Delta X\in C^{n\times n}[0,T]$, $\Delta K\in C^{m\times n}[0,T]$.

证明. 只证明 (17), 其余的可类似得证，在此略去. 由定义 1 的 (4) 有

$$\delta H_K(X,K;\Delta K)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{H(X,K+\alpha\Delta K)-H(X,K)}{\alpha}$$

$$H(X(t),K(t)+\alpha\Delta K(t))=X(t)-X(0)-\int_0^t[AX+B(K+\alpha\Delta K)X+XA'+X(K+ \alpha\Delta K)'B'+(C+DK+\alpha D\Delta K)X(C+DK+\alpha D\Delta K)']\mathrm{d}t=X(t)-X(0)-\int_0^t[AX+ XA'+BKX+XK'B'+(C+DK)X(C+DK)'+\alpha B\Delta KX+\alpha X\Delta K'B'+\alpha(C+ DK)X(D\Delta K)'+\alpha(D\Delta K)X(C+DK)'+\alpha^2(D\Delta K)X(D\Delta K)']\mathrm{d}t$$

由 (11), 并令 $\alpha\to 0$, 可得 (17). □

引理 5. 约束 (13) 满足正则条件，即 $\delta H(X,K;\Delta X,\Delta K)$, $\delta G(X;\Delta X(T))$ 当 ΔX, ΔK 在 $C^{n\times n}[0,T]\times C^{m\times n}[0,T]$ 改变时是满射的变换.

证明. 因为 M 行满秩，所以 $\delta G(X;\Delta X(T))$ 为满射，下面只需证明对任何 $N_0\in R^{n\times n}$, 任何 $Y\in C^{n\times n}[0,T]$, 存在 $(\Delta X,\Delta K)\in C^{n\times n}[0,T]\times C^{m\times n}[0,T]$, 满足

$$\Delta X-\int_0^t[(A+BK)\Delta X+\Delta X(A+BK)'+(C+DK)\Delta X(C+DK)']\mathrm{d}t- \int_0^t[B\Delta KX+X\Delta K'B'+(C+DK)X(D\Delta K)'+(D\Delta K)X(C+DK)']\mathrm{d}t=Y$$

$$\Delta X(T)=N_0$$

令 $\Delta K=0$, 上述方程变为

$$\Delta X-\int_0^t[(A+BK)\Delta X+\Delta X(A+BK)'+(C+DK)\Delta X(C+DK)']\mathrm{d}t=Y$$

$$\Delta X(T)=N_0$$

此线性积分方程一定有解 $\Delta\tilde{X}$, 从而原方程有解 $(\Delta\tilde{X},0)$. □

记 $NBV^{n\times n}[0,T]$ 表示这样的矩阵空间，其元素为 $[0,T]$ 上的有界变差函数，且在端点 0 处取 0 值在 $(0,T)$ 右连续. 下面给出本文的主要定理.

定理 2. 设最优化问题 1 存在最优解 K_*, 则存在对称阵 $P\in NBV^{n\times n}[0,T]$ 及对称阵 $\lambda\in R^{r\times r}$, 对所有 $t\in[0,T]$, 满足

$$-\dot{P}=(Q+K_*'RK_*)+P(A+BK_*)+(A+BK_*)'P+(C+DK_*)'P(C+DK_*) \tag{19}$$

$$P(T)=M'\lambda M \tag{20}$$

$$K_*'R+PB+(C+DK_*)'PD=0 \tag{21}$$

证明. 由注记 1 可知，K_* 也是优化问题 2 的最优解. 本文把最优化问题 2 看成关于 X, K 的二元最优化来处理. 设最优解为 (X_*, K_*). 由引理 4, 5 可知，最优化问题满足 Lagrange multiplier 定理的条件，从而由 (5) 知存在对称阵 $P \in NBV^{n\times n}[0,T]$ 及对称阵 $\lambda \in R^{r\times r}$, 满足

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}(Q+K_*'RK_*)\Delta X\mathrm{d}t+\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}\{\Delta X-\int_0^t[(A+BK_*)\Delta X+\Delta X(A+BK_*)'+\\&(C+DK_*)\Delta X(C+DK_*)']\mathrm{d}t\}\mathrm{d}P+\mathrm{tr}[\lambda M\Delta X(T)M']=0\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}(\Delta K'RK_*X_*+K_*'R\Delta KX_*)\mathrm{d}t-\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}\{\int_0^t[B\Delta KX_*+X_*\Delta K'B'+(C+\\&DK_*)X_*(D\Delta K)'+(D\Delta K)X_*(C+DK_*)']\mathrm{d}t\}\mathrm{d}P=0\end{aligned} \tag{23}$$

其中 (22), (23) 对所有 $(\Delta X, \Delta K) \in C^{n\times n}[0,T]\times C^{m\times n}[0,T]$ 都成立. (22) 及 (23) 的第二项是由 Riesz 表示定理得到的，即对 $C[a,b]$($[a,b]$ 上连续函数构成的空间) 上的有界线性泛函 f, 存在唯一的 $v(t) \in NBV[a,b]$, 使得 $f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}v(t)$. 不失一般性，取 $P(T)=0$, (22) 式分部积分得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}(Q+K_*'RK_*)\Delta X\mathrm{d}t+\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}\Delta X\mathrm{d}P+\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}\{P[(A+BK_*)\Delta X+\Delta X(A+BK_*)'+\\&(C+DK_*)\Delta X(C+DK_*)']\}\mathrm{d}t+\mathrm{tr}[\lambda M\Delta X(T)M']=0\end{aligned}$$

显然, P 在 $[0,T)$ 上没有跳跃，否则可选适当的 ΔX 使 $\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}\Delta X\mathrm{d}P$ 比其他各项要大得多. 但 P 在 T 有跳跃，跃度为 $-M'\lambda M$. 由于以上对所有连续函数 ΔX 都成立，特别地对有连续导数且在端点 0 处取 0 值的函数也成立，于是

$$\int_0^{\mathrm{T}}\Delta X\mathrm{d}P=P\Delta X|_0^{\mathrm{T}}-\int_0^{\mathrm{T}}P\Delta\dot{X}\mathrm{d}t=-\int_0^{\mathrm{T}}P\Delta\dot{X}\mathrm{d}t$$

从而 (22) 变为

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}[(Q+K_*'RK_*)\Delta X+P(A+BK_*)\Delta X+(A+BK_*)'P\Delta X+\\&(C+DK_*)'P(C+DK_*)\Delta X-P\Delta\dot{X}]\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

由引理 2 得到 P 在 $[0,T)$ 上可微且满足 (19). 对 (23) 的第二项也采用分部积分后整理得到

$$\mathrm{tr}\int_0^{\mathrm{T}}[K_*'R(\Delta KX_*)+PB(\Delta KX_*)+(C+DK_*)'PD(\Delta KX_*)]\mathrm{d}t=0$$

由引理 1 得到 (21). 改变边界条件 $P(T)=0$ 为 $P(T)=M'\lambda M$ 得到 (20), 则 P 在 $[0,T]$ 上连续. □

注 2. 定理 2 中的必要条件 (19)~(21) 及原来的约束条件 (8)~(10) 共有 $2n$ 个一阶微分方程, $2n$ 个边界条件, r 个终端条件及 m 个代数方程，从中可以确定出 $X_*(t), K_*(t), P(t)$ 和 λ.

注 3. 定理 2 的结果与 [8] 中定理 4.3 的 (4.16) 式很相似，不同之处仅为终端值 $P(T)$ 不同. 在 [9] 中 $P(T)=H$, H 为已知的常对称矩阵. 在本文的定理 2 中 $P(T)=M'\lambda M$, λ 为待定的常对称阵，而 λ 的解需要 (8)~(10), (19)~(21) 来确定. 我们注意到 (21) 式可以写成

$$K_*'(R+D'PD)=-(PB+C'PD)$$

当 $R+D'PD$ 不可逆时，显然 K_* 是不唯一的，从而导致 λ 和 $P(t)$ 也是不唯一的，这是带约束和不带约束随机 LQ 控制问题的最本质的区别.

若最优化问题 1 中没有线性约束条件 (3), 即退化为通常的无约束随机 LQ 最优控制问题，此时最优化问题 2 就变为如下的问题 3.

问题 3.

$$\begin{aligned}&\inf J(X,K)=\operatorname{tr}\int_0^{\mathrm{T}}[QX(t)+K'(t)RK(t)X(t)]\mathrm{d}t\\ &\text{s.t.}\quad \dot{X}=(A+BK)X+X(A+BK)'+(C+DK)X(C+DK)'\\ &\qquad\ X(0)=X_0\end{aligned}$$

推论 1. 如果最优化问题 3 存在最优解 K_*, 则下列带约束的广义 Riccati 微分方程[9]

$$\begin{cases}-\dot{P}=PA+A'P+C'PC+Q-(PB+C'PD)(R+D'PD)^+(PB+C'PD)'\\ P(T)=0\\ (R+D'PD)(R+D'PD)^+(B'P+D'PC)=(B'P+D'PC)\\ R+D'PD\geqslant 0\end{cases}\tag{24}$$

在区间 $[0,T]$ 存在全局唯一解 $P\in NBV^{n\times n}[0,T]$, 此时

$$K_*(t)=-(R+D'PD)^+(B'P+D'PC)+Y-(R+D'PD)^+(R+D'PD)Y\tag{25}$$

其中参数 $Y(t)\in L^2(0,T;R^{m\times n})$.

证明. 在定理 2 中，令 $M=0$ 得到 $P(T)=0$. 其余的证明可仿照 [9] 中定理 4.3 的证明，在此略去.

注 4[9]**.** (24) 式为无约束不定号随机 LQ 控制问题 (1), (2) 适定和最优反馈控制存在的充分必要条件.

注 5. 如果在优化指标中考虑终端状态的影响，即取

$$J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=E\int_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}'(t)Q\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}'(t)R\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t+E\boldsymbol{x}'(T)S\boldsymbol{x}(T)$$

其中 S 为实对称矩阵. 则重复上面的推导过程，可以证明定理 2 和推论 1 对上述优化指标仍然成立，只需把终端约束条件 (20) 和 (24) 分别替换为 $P(T)=M'\lambda M+S$ 和 $P(T)=S$ 即可.

4 充分条件

在注 3 中已经指出带约束的随机 LQ 控制问题远比无约束的要复杂，一般说来，必要条件 (8)∼(10), (19)∼(21) 不是充分条件，为了保证 λ, $P(t)$ 的唯一性，需要加强条件

$$R+D'PD>0\tag{26}$$

定理 3. 如果 (8)∼(10), (19)∼(21), (26) 存在解 $X_*(t), K_*(t), P(t)$ 和 λ, 则问题 2 是适定的，且最优反馈控制为

$$\boldsymbol{u}_*(t)=-(R+D'PD)^{-1}(B'P+D'PC)\boldsymbol{x}(t)\tag{27}$$

最优指标值

$$V(x_0)=\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(t))=\boldsymbol{x}_0'P(0)\boldsymbol{x}_0-\mathrm{tr}(\lambda N) \tag{28}$$

证明. 设 $K_*(t), P(t)$ 和 λ 为满足 (8)~(10), (19)~(21), (26) 的解，由 (21) 式得到

$$K_*(t)=-(R+D'PD)^{-1}(B'P+D'PC)$$

代入 (19) 式，经简单的运算得到

$$\dot{P}+PA+A'P+C'PC+Q-(PB+C'PD)(R+D'PD)^{-1}(PB+C'PD)'=0 \tag{29}$$

$$J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\cdot))=E\int_0^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}'R\boldsymbol{u})\mathrm{d}t+d(\boldsymbol{x}'P\boldsymbol{x})-\mathrm{d}(\boldsymbol{x}'P\boldsymbol{x})]=\boldsymbol{x}'(0)P(0)\boldsymbol{x}(0)-$$
$$E[\boldsymbol{x}'(T)P(T)\boldsymbol{x}(T)]+E\int_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}'(\dot{P}+PA+A'P+C'PC+Q)\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{u}'(B'P+D'PC)\boldsymbol{x}+$$
$$\boldsymbol{u}'(R+D'PD)\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t=\boldsymbol{x}_0'P(0)\boldsymbol{x}_0-\mathrm{tr}(M'\lambda MX(T))+E\int_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}'[\dot{P}+PA+A'P+C'PC+$$
$$Q-(PB+C'PD)(R+D'PD)^{-1}(PB+C'PD)']\boldsymbol{x}\mathrm{d}t+E\int_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{u}+(R+D'PD)^{-1}(B'P+$$
$$D'PC)\boldsymbol{x}]'(R+D'PD)[\boldsymbol{u}+(R+D'PD)^{-1}(B'P+D'PC)\boldsymbol{x}]\mathrm{d}t=\boldsymbol{x}_0'P(0)\boldsymbol{x}_0-\mathrm{tr}(\lambda N)+$$
$$E\int_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{u}+(R+D'PD)^{-1}(B'P+D'PC)\boldsymbol{x}]'(R+D'PD)[\boldsymbol{u}+(R+D'PD)^{-1}(B'P+D'PC)\boldsymbol{x}]\mathrm{d}t$$

其中第二个 “=” 是 $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}'P\boldsymbol{x})$ 利用 Ito 公式得到的，第四个 “=” 是因为 (29) 式. 显然，控制 (27) 最小化指标泛函 $J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(t))$, 且最小值为 $\boldsymbol{x}_0'P(0)\boldsymbol{x}_0-\mathrm{tr}(\lambda N)$. □

显然带约束情形的最优指标值比无约束情形[9] 多了一项 $-\mathrm{tr}(\lambda N)$. 定理 2 给出了优化问题 1 和 2 存在最优解的必要条件，而定理 3 是问题 2 存在最优控制解的一个充分条件. 下面通过一维的简单例子来说明定理 3 的应用.

例 1. 在问题 2 中，令 $A=-1$, $B=1$, $C=-2$, $D=0$, $M=2$, $N=\dfrac{(1+e^2)^2}{e^2}$, $X_0=1$, $Q=0$, $R=1$, $T=1$, 则定理 2 的条件 (19)~(21) 及原来的约束条件 (8)~(10) 变为如下的方程组

$$\begin{cases} -\dot{P}=K_*^2+2P(-1+K_*)+4P \\ P(T)=4\lambda \\ K_*+P=0 \\ \dot{X}_*=2(-1+K_*)X_*+4X_* \\ X_*(0)=1 \\ X_*(T)=\dfrac{(1+e^2)^2}{4e^2} \end{cases}$$

由上述方程组，解得

$$X_*(t)=\frac{(1+e^{2t})^2}{4e^{2t}},\ K_*(t)=-\frac{2}{1+e^{2t}},\ P(t)=\frac{2}{1+e^{2t}},\ \lambda=\frac{1}{2(1+e^2)}$$

所以问题 2 存在最优控制 $\boldsymbol{u}_*(t)=-\dfrac{2}{1+e^{2t}}\boldsymbol{x}(t)$, 最优值 $V(\boldsymbol{x}_0)=\dfrac{1}{2}(1-e^{-2})$.

例 2. 在问题 2 中，令 $A=-1$, $B=1$, $C=-2$, $D=0$, $x_0=1$, $Q=0$, $R=1$, $T=1$, $M=N=0$. 因为 $M=N=0$, 此时退化为无约束的随机 LQ 控制问题，由定理 3 的条件 (8), (9), (19)~(21), 得到如下的方程组

$$\begin{cases} -\dot{P}=K_*^2+2P(-1+K_*)+4P \\ P(T)=0 \\ K_*+P=0 \\ \dot{X}_*=2(-1+K_*)X_*+4X_* \\ X_*(0)=1 \end{cases}$$

解得 $P=K_*=0, X_*=e^{2t}$. 所以问题 3 存在最优控制 $\boldsymbol{u}_*(t)=0$, 最优值 $V(\boldsymbol{x}_0)=0$. 当然这个结论从直观上也很容易看出来.

5 结论

本文研究了终端带线性约束的不定随机 LQ 控制问题. 首先利用 Lagrange multiplier 定理得到存在最优线性状态反馈控制的必要条件. 当把必要条件再加强为 $R+D'PD>0$ 时，可以得到存在最优控制解的充分条件. 最后通过一个简单的实例说明了定理的应用.

References

1 Kalman R E. Contribution to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, **5**(2): 102~119

2 Anderson B D O, Moore J B. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1989

3 Wonham W M. On a matrix Riccati equation of stochastic control. *SIAM Journal on Control*, 1968, **6**(2): 312~326

4 De Souza C E, Fragoso M D. On the existence of maximal solution for generalized algebraic Riccati equations arising in stochastic control. *Systems and Control Letters*, 1990, **14**(3): 233~239

5 Zhang W H. Study on generalized algebraic Riccati equation and optimal regulators. *Control Theory and Applications*, 2003, **20**(4): 637~640

6 Chen S P, Li X J, Zhou X Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1998, **36**(5): 1685~1702

7 Ait Rami M, Zhou X Y. Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(6): 1131~1143

8 Yao D D, Zhang S Z, Zhou X Y. Stochastic linear-quadratic control *via* semidefinite programming. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001, **40**(3): 801~823

9 Ait Rami M, Moore J B, Zhou X Y. Indefinite stochastic linear quadratic control and generalized differential Riccati equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001, **40**(4): 1296~1311

10 Luenberger D G. Optimization by Vector Space Methods. New York: Wiley, 1968

黄玉林 山东大学数学与系统科学学院在读博士，山东轻工业学院讲师，研究方向为随机控制理论及其应用.

(**HUANG Yu-Lin** Ph. D. candidate in School of Mathematics and System Science at Shandong University. She is currently a lecturer at Shandong Institute of Light Industry. Her research interests include stochastic control and its applications.)

张维海 1998 年获浙江大学博士学位， 2001-2003 在台湾清华大学做博士后研究，目前是山东轻工业学院教授，研究方向是随机最优控制和滤波理论.

(**ZHANG Wei-Hai** Received his Ph. D. degree in 1998 at Zhejiang University, and did postdoctoral research from May 2001 to July 2003 at Tsinghua University, Taiwan. He is now a professor at Shandong Institute of Light Industry. His research interests include stochastic control and filtering theory.)