第 32 卷 第 2 期 自 动 化 学 报 Vol. 32, No. 2
2006 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA March, 2006

# 奇异系统的不定号二次型指标最优控制问题[1)]

马树萍 程兆林

(山东大学数学与系统科学学院 济南 250100)

(E-mail: mashup@sdu.edu.cn)

**摘 要** 讨论奇异系统的不定号 LQ 问题 (二次型指标中的权矩阵含有负特征值的最优控制问题). 首先指出问题的可解性, 并给出了问题等价转化为奇异系统的奇异 LQ 问题的充要条件. 然后基于等价的奇异系统奇异 LQ 问题, 给出问题存在唯一最优控制－轨线对的充分条件. 最后用一个算例说明结论的正确性.

**关键词** 不定号二次型指标, 最优控制, 奇异系统

**中图分类号** TP13

## Indefinite LQ Problem for Singular Systems

MA Shu-Ping CHENG Zhao-Lin

(*School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan* 250100)

(E-mail: mashup@sdu.edu.cn)

**Abstract** The indefinite LQ problem (*i.e.*, the weighting matrix in the quadratic cost has some negative eigenvalues) for singular systems is discussed. First, it is pointed out that the problem is solvable, and the sufficient and necessary condition that the problem can be transformed into singular LQ problem for singular systems is given. Then, based on the equivalent singular LQ problem, the sufficient condition that the problem has a unique optimal control-trajectory pair is given. Finally, an example is given to show the validity of the proposed conclusion.

**Key words** Indefinite LQ problem, optimal control, singular system

## 1 引言

奇异系统有着广泛的实际背景, 是比正常线性系统更具一般性的系统描述[1]. 对于奇异系统 LQ 问题, 无论是非奇异 LQ 问题[2~4], 还是奇异 LQ 问题[5,6], 经过近三十年研究, 理论已经成熟. 熟知, 正常状态空间系统的不定号 LQ 问题是无意义的, 对于奇异系统的不定号 LQ 问题是否有意义, 问题是否可解, 并未见有相关问题的讨论.

1) 国家自然科学基金 (10371067) 和山东大学青年基金 (11140053187004) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (10371067) and the Young Foundation of Shandong University (11140053187004)
收稿日期 2005-5-23 收修改稿日期 2005-10-27
Received May 23, 2005; in revised form October 27, 2005

本文讨论了奇异系统的不定号 LQ 问题，指出问题的可解性，给出了问题等价转化为奇异系统的奇异 LQ 问题的充分必要条件. 并基于等价的奇异系统的奇异 LQ 问题，给出问题存在唯一最优控制—轨线对解的充分条件，用一个算例说明本文所得到的结论的正确性.

## 2 问题描述

本文考虑线性奇异系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad E\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

在二次型指标

$$J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \mathrm{d}t \tag{2}$$

下的最优控制问题. 这里，$\boldsymbol{x} \in R^n$ 为状态，$\boldsymbol{u} \in R^r$ 为控制输入. $E, A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times r}$, $E$ 降秩，$0 < \mathrm{rank}E = p < n$. $Q \in R^{(n+r)\times(n\times r)}$ 为实对称矩阵.

为叙述简洁起见，记上述二次型指标问题为问题 P, 并记容许的控制—轨线对集为

$$\mathcal{J} = \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) | (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})\text{分段连续，满足}(1), \text{ 且} -\infty < J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) < \infty\} \tag{3}$$

则解问题 P 即是寻求最优控制—轨线对 $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{x}^*) \in \mathcal{J}$, 使得

$$J(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{x}^*) = \min_{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{J}} J(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \tag{4}$$

**注 1.** 本文不要求系统 (1) 的正则性，即不要求 $sE - A$ 满足 $\det(sE - A) \not\equiv 0$, 也不要求指标 (2) 中加权矩阵 $Q$ 的半正定性.

**注 2.** 将 $Q$ 分块，$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $Q_{22} \in R^{r\times r}$. 若 $Q \geqslant 0$ 且 $Q_{22} > 0$, 则指标 (2) 为文 [2] 中的情形；若 $Q \geqslant 0$ 且 $Q_{12} = 0$, 则指标 (2) 为文 [5,6] 中的情形.

## 3 主要结果

考察问题 P 的可解性. 因为 $0 < \mathrm{rank}E = p < n$, 故存在非奇异矩阵 $M, N \in R^{n\times n}$ 使得

$$MEN = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

相应地，记

$$MEN = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \ MB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \ \bar{Q} = \begin{bmatrix} N^{\mathrm{T}} & \\ & I_r \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} N & \\ & I_r \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = N \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

其中 $A_{11} \in R^{p\times p}$, $B_1 \in R^{p\times r}$, $\boldsymbol{x}_1 \in R^p$, 于是系统 (1) 严格系统等价 (r.s.e.) 于

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = A_{11}\boldsymbol{x}_1 + A_{12}\boldsymbol{x}_2 + B_1\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_{10} \tag{7a}$$

$$0 = A_{21}\boldsymbol{x}_1 + A_{22}\boldsymbol{x}_2 + B_2\boldsymbol{u} \tag{7b}$$

指标 (2) 恒等地转化为

$$J_1(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2))=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}]\bar{Q}[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{x}_{10}=[I_p\quad 0]M\boldsymbol{x}_0$. 记

$$\mathcal{J}_1=\{(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2))|(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2))\text{分段连续，满足 }(7),-\infty<J_1(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2))<\infty\} \tag{9}$$

并记系统 (7) 在指标 (8) 下的最优控制问题为 $\mathrm{P}_1$, 显然, P 等价于 $\mathrm{P}_1$, 下面考虑 $\mathrm{P}_1$. 为此, 引进辅助二次指标 $\tilde{J}_1(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2))$, $\hat{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})$:

$$\tilde{J}_1(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2))=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}]\tilde{Q}[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$\hat{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})=\int_0^{\infty}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\hat{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}\mathrm{d}t \tag{11}$$

其中

$$\tilde{Q}=\bar{Q}+\alpha_0[A_{21}\quad A_{22}\quad B_2]^{\mathrm{T}}[A_{21}\quad A_{22}\quad B_2] \tag{12}$$

$$\hat{Q}=Q+\alpha[A\quad B]^{\mathrm{T}}\Psi^{\mathrm{T}}\Psi[A\quad B] \tag{13}$$

式中 $\alpha_0,\alpha$ 为任意实数，$\Psi\in R^{(n-p)\times n}$ 为 $E$ 的左零因子，即 $\Psi$ 满足

$$\Psi E=0,\quad \mathrm{rank}\,\Psi=n-p \tag{14}$$

**引理 1.**

$$J_1(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2))=\tilde{J}_1(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2))=\hat{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) \tag{15}$$

**证明**. 由 (7b), (12) 直接可得 $\tilde{J}_1=J_1$. 记 $\Psi M^{-1}=[\Psi_1\quad \Psi_2]$, $\Psi_2\in R^{(n-p)\times(n-p)}$, 由 $\Psi E=0$ 得

$$\Psi M^{-1}MEN=[\Psi_1\quad \Psi_2]\begin{bmatrix}I_p & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=[\Psi_1\quad 0]=0 \tag{16}$$

再由 $\Psi$ 行满秩知 $\Psi_2$ 非奇异，从而

$$\Psi M^{-1}=[0\quad \Psi_2],\quad \mathrm{rank}\,\Psi_2=n-p \tag{17}$$

则由 (6), (17) 推得

$$\begin{bmatrix}N^{\mathrm{T}} & \\ & I_r\end{bmatrix}\hat{Q}\begin{bmatrix}N & \\ & I_r\end{bmatrix}=\bar{Q}+\alpha[A_{21}\quad A_{22}\quad B_2]^{\mathrm{T}}\Psi_2^{\mathrm{T}}\Psi_2[A_{21}\quad A_{22}\quad B_2] \tag{18}$$

于是由 (7b), (18) 推得 $\hat{J}=J_1$. □

由引理 1, 若存在实数 $\alpha$ 或 $\alpha_0$ 使得 $\hat{Q}\geqslant 0$ 或 $\tilde{Q}\geqslant 0$, 则问题 P 或 $\mathrm{P}_1$ 即可转化为奇异 LQ 问题求解. 下面给出 $\alpha$ 和 $\alpha_0$ 存在的条件.

**假设 1.**

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & E & 0\\ E & A & B\end{bmatrix}=n+p \tag{19}$$

**注 3.** 假设 1 成立等价于矩阵 $[A_{22}\quad B_2]$ 行满秩. 当系统 (1) 正则时，此即系统 (1) 脉冲能控的充要条件[1].

**定理 1.** 若假设 1 成立，则下面几个条件等价.

1) a) $\bar{\Phi} \in R^{(n+r)\times(r+p)}$ 为 $[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2]$ 的任一右零因子，即 $\bar{\Phi}$ 是满足

$$[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2]\bar{\Phi} = 0, \quad \mathrm{rank}\bar{\Phi} = r + p \tag{20a}$$

的任一矩阵.

b) $\bar{\Phi}$ 使得

$$\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}\bar{Q}\bar{\Phi} \geqslant 0 \tag{20b}$$

$$\mathrm{rank}\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}\bar{Q}\bar{\Phi} = \mathrm{rank}\bar{Q}\bar{\Phi} \tag{20c}$$

2) 存在 $\alpha_0 > 0$ 使得 $\tilde{Q} \geqslant 0$.

3) $\Phi \in R^{(n+r)\times(r+p)}$ 且 $\bar{\Phi}$ 列满秩为满足

$$\Psi[A \quad B]\Phi = 0 \tag{21a}$$

的任一矩阵，使得

$$\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi \geqslant 0 \tag{21b}$$

$$\mathrm{rank}\Phi^{\mathrm{T}}Q\Phi = \mathrm{rank}Q\Phi \tag{21c}$$

式中 $\Psi$ 如 (14) 所示.

4) 存在 $\alpha > 0$ 使得 $\hat{Q} \geqslant 0$.

**证明**. 见附录 A.

**注 4.** 引理 1 指出问题 P 等价于系统 (7) 在指标 (10) 下的最优控制问题，也等价于系统 (1) 在指标 (11) 下的最优控制问题，正是奇异系统的这一代数结构特点，使得奇异系统的不定号 LQ 问题的可解性成为可能. 事实上，若奇异系统 (1) 在二次指标

$$J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q_1 \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \mathrm{d}t \tag{22}$$

下的奇异 LQ 问题有解，式中 $Q_1 \geqslant 0$, 则对任一实数 $\alpha'$, 奇异系统 (1) 在任一二次指标

$$J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} (Q_1 + \alpha'[A \quad B]^{\mathrm{T}}\Psi^{\mathrm{T}}\Psi[A \quad B]) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \mathrm{d}t \tag{23}$$

下的 LQ 问题都有解，因为 $\alpha'$ 的任意性， (23) 有可能是不定号二次指标. 定理 1 则指出了保证 $\hat{Q} \geqslant 0$ 或 $\tilde{Q} \geqslant 0$ 的若干等价条件，这些条件是重要的，它是将不定号 LQ 问题 P 等价转化为奇异 LQ 问题的关键.

若定理 1 的条件被满足，则可按定理证明中给出的方法选取 $\alpha$, 以保证 $\hat{Q} \geqslant 0$. 令 $\hat{Q} = [C \quad D]^{\mathrm{T}}[C \quad D]$ 为 $\hat{Q}$ 的任一分解，并记 $CN = [C_1 \quad C_2]$,

$$J_2(\boldsymbol{u},(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)) = \int_0^{\infty} [\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}][C_1 \quad C_2 \quad D]^{\mathrm{T}}[C_1 \quad C_2 \quad D][\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t \tag{24}$$

并记系统 (7) 在指标 (24) 下的最优控制问题为 $\mathrm{P}_2$, 则由引理 1 知 P 等价于 $\mathrm{P}_2$.

由假设 1 知 $[A_{22} \quad B_2]$ 行满秩，故存在非奇异矩阵 $P \in R^{(n-p+r)\times(n-p+r)}$ 使得 $[A_{22} \quad B_2]P = 0$. 进一步，记

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{12} & B_1 \\ C_2 & D \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_2 & \bar{D} \end{bmatrix} \tag{25}$$

对系统 (7) 作非奇异线性变换 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix}$, 其中 $\bar{\boldsymbol{x}}_2 \in R^{n-p}$, $\bar{\boldsymbol{u}} \in R^r$. 则系统 (7) 等价地转化为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = (A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21})\boldsymbol{x}_1 + \bar{B}_1\bar{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{x}_1(0) = \boldsymbol{x}_{10}, \quad \bar{\boldsymbol{x}}_2 = -A_{21}\boldsymbol{x}_1 \tag{26}$$

系统 (7) 转化为系统 (26) 的变换为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ -P_{11}A_{21} & P_{12} \\ -P_{21}A_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \bar{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix} \tag{27}$$

在此变换下，指标 (24) 恒等地转化为

$$J_3(\bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{x}_1) = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \bar{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \bar{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix} \mathrm{d}t \tag{28}$$

$$Q_{11} = (C_1 - \bar{C}_2A_{21})^{\mathrm{T}}(C_1 - \bar{C}_2A_{21}),\ Q_{12} = (C_1 - \bar{C}_2A_{21})^{\mathrm{T}}\bar{D},\ Q_{22} = \bar{D}^{\mathrm{T}}\bar{D} \tag{29}$$

记系统 (26) 在指标 (28) 下的最优控制问题为 $\mathrm{P}_3$, 则 $\mathrm{P}_2$ 等价于 $\mathrm{P}_3$[5,6].

**引理 2.** 若假设 1 成立，则 $Q_{22} > 0$ 的充要条件为

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ E & A & B \\ 0 & C & D \end{bmatrix} = n - p + r \tag{30}$$

**引理 3**[5]**.** $(A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21}, \bar{B}_1)$ 能稳的充要条件为

$$\mathrm{rank}[sE - A \quad B] = n,\ \forall s, \mathrm{Re}s \geqslant 0 \tag{31}$$

**引理 4.** $(Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}},\ A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} - \bar{B}_1Q_{22}^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}})$ 能检的充要条件为

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - sE & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + r,\ \forall s, \mathrm{Re}s \geqslant 0 \tag{32}$$

引理 2, 引理 4 的证明类似于 [5,6] 中的方法，故略去.

**注 5.** 条件 (30), (32) 与 $C, D$ 有关，正是 $\alpha$ 的引入使得 $\hat{Q} \geqslant 0$, 从而有 $\hat{Q}$ 的分解. 容易验证 (30), (32) 若对较小的 $\alpha$ 成立，则对较大的 $\alpha$ 也成立. 故若定理 1 中的条件被满足，则可选较大的 $\alpha$ 构造 $\hat{Q}$, 验证条件 (30),(32) 是否成立.

注意到问题 $\mathrm{P}_3$ 是正常状态空间系统的 LQ 问题，若条件 (30)~(32) 成立，则根据线性系统的二次最优控制理论[7], $\mathrm{P}_3$ 存在唯一解 $(\bar{\boldsymbol{u}}^*, \boldsymbol{x}_1^*)$

$$\bar{\boldsymbol{u}}^* = -L\boldsymbol{x}_1^*,\ L = Q_{22}^{-1}(Q_{12}^{\mathrm{T}} + \bar{B}_1^{\mathrm{T}}X),\ \dot{\boldsymbol{x}}_1^* = (A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} - \bar{B}_1L)\boldsymbol{x}_1^*,\ \boldsymbol{x}_1^*(0) = \boldsymbol{x}_{10} \tag{33}$$

其中 $X$ 是下述代数 Riccati 方程

$$\begin{aligned} X(A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} - \bar{B}_1Q_{22}^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}}) + (A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} - \bar{B}_1Q_{22}^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}X - \\ X\ \bar{B}_1Q_{22}^{-1}\bar{B}_1^{\mathrm{T}}X + Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^{\mathrm{T}} = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

的唯一半正定解，且 $A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} - \bar{B}_1L$ 稳定，最优指标值为 $J_{3\min} = \boldsymbol{x}_{10}^{\mathrm{T}}X\boldsymbol{x}_{10}$.

对于问题 P, 根据 (27) 及 (6) 可推得最优控制—轨线对 $(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{x}^*)$ 为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^* \\ \boldsymbol{u}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \\ & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ -P_{11}A_{21} - P_{12}L \\ -P_{21}A_{21} - P_{22}L \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^* \tag{35}$$

将 $\boldsymbol{u}^*$ 综合为状态反馈

$$\boldsymbol{u}^* = K\boldsymbol{x}^* = K_1\boldsymbol{x}_1^* + K_2\boldsymbol{x}_2^*,\ K = [K_1 \quad K_2]N^{-1} \tag{36}$$

并由 (35) 可得

$$K_1 = (-P_{21}A_{21} - P_{22}L) + K_2(P_{11}A_{21} + P_{12}L) \tag{37}$$

其中 $K_2$ 为使得 $A_{22} + B_2K_2$ 非奇异的任一矩阵.

**定理 2.** 若 (19), (21) 及 (30)∼(32) 成立，则问题 P 的最优控制—轨线对唯一，最优控制可综合为状态反馈，反馈增益阵不唯一，最优闭环正则，无脉冲模，稳定.

## 4 算例

考虑如下奇异系统的不定号 LQ 问题 P:

$$\Sigma: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,\ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

经验证，假设 1 及定理 1 的条件被满足，故问题可转化为系统 $\Sigma$ 的奇异 LQ 问题. 取 $E$ 的左零因子 $\Psi = [0 \quad 1]$, 并取 $\alpha = 1$, 则由 (13) 得 $\hat{Q} = [1 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}}[1 \quad 1 \quad 0]$, 于是 P 等价于系统 $\Sigma$ 与指标

$$J_1 = \int_0^\infty [x_1 \quad x_2 \quad u][1 \quad 1 \quad 0]^{\mathrm{T}}[1 \quad 1 \quad 0][x_1 \quad x_2 \quad u]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t$$

的奇异 LQ 问题 $\mathrm{P}_1$. 又 (30)∼(32) 也成立，取 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 经过变换 (27), $\mathrm{P}_1$ 等价于如下 LQ 问题 $\mathrm{P}_2$

$$\dot{x}_1 = \bar{u},\ x_1(0) = 1,\ \bar{x}_2 = -x_1,\ J_2 = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x_1 \\ \bar{u} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \bar{u} \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

解 $\mathrm{P}_2$ 得最优控制—轨线对 $(\bar{u}^*, x_1^*)$ 为：$\bar{u}^* = -x_1^*$, $\dot{x}_1^* = -x_1^*$, $x_1^*(0) = 1$. 于是问题 P 的最优控制—轨线对为 $[x_1^* \quad x_2^* \quad u^*]^{\mathrm{T}} = [1 \quad -1 \quad -1]^{\mathrm{T}}x_1^*$, $u^*$ 的状态反馈综合为 $u^* = x_2^*$, 则最优闭环正则，无脉冲模，稳定. 最优指标为 $J_{\min} = 0$.

## 5 结语

本文讨论了奇异系统的不定号 LQ 问题，首先给出了问题等价转化为奇异系统的奇异 LQ 问题的充分必要条件，即定理 1, 这是本文的最关键的结论. 此充要条件本质上是由奇异系统的特有的代数结构特征决定的，这进一步说明奇异系统与正常状态空间系统的本质

区别．此外，本文还通过对等价的奇异系统的奇异 LQ 问题的讨论，给出了奇异系统的不定号 LQ 问题存在唯一最优控制－轨线对的充分条件，并给出最优控制－轨线对解，及最优控制的状态反馈综合，此状态反馈保证最优闭环是正则的，无脉冲模，稳定的．最后用一个算例具体说明了本文所得到的结论的正确性．

## References


1 Dai L. Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, New York: Springer-Verlag, 1989

2 Bender D J, Laub A J. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, **32**(8): 672∼688

3 Cheng Z, Hong H, Zhang J. The optimal regulation of generalized state-space systems with quadratic cost. *Automatica*, 1988, **24**(5): 707∼710

4 Yan J X, Cheng Z L. The linear-quadratic optimal control of time-varying descriptor systems. *Acta Automatica Sinica*, 1995, **21**(5): 537∼544

5 Zhu J, Ma S, Cheng Z. Singular LQ problem for descriptor systems. In: Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, AZ: IEEE Control Systems Society, 1999. 4098∼4099

6 Zhu J, Ma S, Cheng Z. Singular LQ problem for nonregular descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(7): 1128∼1133

7 Xie X S. Optimal Control Theory and Applications. Beijing: Tsinghua University Publishing House, 1986. 297∼312



**马树萍**　副教授，2000 年于山东大学获博士学位．研究领域为：奇异系统和鲁棒控制．

(**MA Shu-Ping**　Associate professor. She received her Ph. D. degree from Shandong University in 2000. Her research interests include singular systems and robust control.)

**程兆林**　教授，研究领域为：奇异系统，时滞系统，鲁棒控制．

(**CHENG Zhao-Lin**　Professor. His research interests include singular systems, time-delay systems, and robust control.)


### 附录 A

定理 1 的证明．

(1)→(2)．因为假设 1 成立，即 $[A_{22}\quad B_2]$ 行满秩，故 $\mathrm{rank}[A_{21}\quad A_{22}\quad B_2]=n-p$, 于是，存在非奇异矩阵 $\bar P\in R^{(n+r)\times(n+r)}$ 使得

$$[A_{21}\quad A_{22}\quad B_2]\bar P=[I_{n-p}\quad 0]\tag{A1}$$

记 $\hat\Phi=\bar P^{-1}\bar\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{bmatrix}$, 其中 $\Phi_1\in R^{(n-p)\times(r+p)}$, $\Phi_2\in R^{(r+p)\times(r+p)}$, 由 (20a), (A1) 推得

$$[A_{21}\quad A_{22}\quad B_2]\bar\Phi=[I_{n-p}\quad 0]\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{bmatrix}=\Phi_1=0\tag{A2}$$

于是

$$\hat\Phi=\begin{bmatrix}0\\ \Phi_2\end{bmatrix}\tag{A3}$$

并由 $\mathrm{rank}\bar\Phi=r+p$ 得 $\Phi_2$ 非奇异．记

$$\bar P^{\mathrm T}\bar Q\bar P=\begin{bmatrix}\bar Q_1 & \bar Q_2\\ \bar Q_2^{\mathrm T} & \bar Q_3\end{bmatrix}\tag{A4}$$

其中 $\bar Q_1\in R^{(n-p)\times(n-p)}$, 则由 (20b) 推得

$$\bar\Phi^{\mathrm T}\bar Q\bar\Phi=\hat\Phi^{\mathrm T}\bar P^{\mathrm T}\bar Q\bar P\hat\Phi=\begin{bmatrix}0\\ \Phi_2\end{bmatrix}^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\bar Q_1 & \bar Q_2\\ \bar Q_2^{\mathrm T} & \bar Q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \Phi_2\end{bmatrix}=\Phi_2^{\mathrm T}\bar Q_3\Phi_2\geqslant 0\tag{A5}$$

且由 $\Phi_2$ 非奇异得 $\bar Q_3\geqslant 0$. 由 (A4), (A5) 及 $\Phi_2$ 非奇异还可推得

$$\mathrm{rank}\bar\Phi^{\mathrm T}\bar Q\bar\Phi=\mathrm{rank}\bar Q_3,\ \mathrm{rank}\bar Q\bar\Phi=\mathrm{rank}\bar P^{\mathrm T}\bar Q\bar P\hat\Phi=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\bar Q_2\\ \bar Q_3\end{bmatrix}\tag{A6}$$

再联系 (20c), (A6) 得

$$\operatorname{rank}\bar{Q}_3 = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\bar{Q}_2\\ \bar{Q}_3\end{bmatrix} \tag{A7}$$

因为 $\bar{Q}_3 \geqslant 0$ 及 (A7) 成立，可令 $T_3 \in R^{(r+p)\times(r+p)}$ 为非奇异矩阵，使得

$$T_3^{\mathrm{T}}\bar{Q}_3T_3 = \begin{bmatrix}\hat{Q}_3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \hat{Q}_3 > 0,\ \bar{Q}_2T_3 = [\hat{Q}_{21} \quad 0] \tag{A8}$$

于是由 (12),(A1),(A4),(A8) 推得

$$\begin{bmatrix}I_{n-p} & \\ & T_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\bar{P}^{\mathrm{T}}\tilde{Q}\bar{P}\begin{bmatrix}I_{n-p} & \\ & T_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{Q}_1+\alpha_0I_{n-p} & \hat{Q}_{21} & 0\\ \hat{Q}_{21}^{\mathrm{T}} & \hat{Q}_3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{A9}$$

由 (A9) 及 Schur 补知，只须取

$$\alpha_0 \geqslant |\lambda_{\min}(\bar{Q}_1 - \hat{Q}_{21}\hat{Q}_3^{-1}\hat{Q}_{21}^{\mathrm{T}})| \tag{A10}$$

即可保证 $\tilde{Q} \geqslant 0$ 成立. 式中 $\lambda_{\min}$ 为对称矩阵的最小特征值.

(2)→(1). 显然.

(3)↔(1). 由 (17) 可以推得

$$\varPsi[A \quad B] = \varPsi_2[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2]\begin{bmatrix}N^{-1} & \\ & I_r\end{bmatrix} \tag{A11}$$

$$\operatorname{rank}\varPsi[A \quad B] = \operatorname{rank}[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2] = n-p \tag{A12}$$

因此，满足 (21a) 的列满秩阵 $\varPhi \in R^{(n+r)\times(r+p)}$ 为 $\varPsi[A \quad B]$ 的右零因子，并且 $\varPhi$ 与 $[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2]$ 的右零因子 $\bar{\varPhi}$ 满足 $\bar{\varPhi} = \begin{bmatrix}N^{-1} & \\ & I_r\end{bmatrix}\varPhi$. 此外，不难看出

$$\varPhi^{\mathrm{T}}Q\varPhi = \bar{\varPhi}^{\mathrm{T}}\bar{Q}\bar{\varPhi}, \quad \operatorname{rank}Q\varPhi = \operatorname{rank}\bar{Q}\bar{\varPhi} \tag{A13}$$

故 (3)↔(1).

(4)↔(2). 因为 $\varPsi_2$ 非奇异，故 $\varPsi_2^{\mathrm{T}}\varPsi_2 > 0$, 则

$$\begin{aligned}&\bar{Q}+\alpha\lambda_{\min}(\varPsi_2^{\mathrm{T}}\varPsi_2)[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2]^{\mathrm{T}}[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2] \leqslant\\ &\bar{Q}+\alpha[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2]^{\mathrm{T}}\varPsi_2^{\mathrm{T}}\varPsi_2[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2] \leqslant\\ &\bar{Q}+\alpha\lambda_{\max}(\varPsi_2^{\mathrm{T}}\varPsi_2)[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2]^{\mathrm{T}}[A_{21} \quad A_{22} \quad B_2]\end{aligned} \tag{A14}$$

联系到 (18), 于是有：若 $\hat{Q} \geqslant 0$, 可取 $\alpha_0 \geqslant \alpha\lambda_{\max}(\varPsi_2^{\mathrm{T}}\varPsi_2)$, 则 $\tilde{Q} \geqslant 0$; 反之，若 $\tilde{Q} \geqslant 0$, 可取 $\alpha \geqslant \dfrac{\alpha_0}{\lambda_{\min}(\varPsi_2^{\mathrm{T}}\varPsi_2)}$, 则 $\hat{Q} \geqslant 0$. □