基于加权最小二乘法的最优适应控制器[1)]

姜 睿[1,2]　　罗贵明[2]
[1](清华大学计算机科学与技术系　北京　100084)
[2](清华大学软件学院　北京　100084)
(E-mail: jiangr00@mails.tsinghua.edu.cn)

摘　要　普通的最小二乘算法 LS, 并不能保证它的收敛性，而加权的最小二乘算法 WLS, 却有很好的收敛性，采用这种算法进行随机系统的辨识，能够保证算法所得的参数收敛于某一个向量，而且这种算法在很多方面具有同普通最小二乘算法一样的性质，采用这种算法对随机系统进行适应控制，能够保证系统是闭环全局稳定的，而且这种适应控制还能收敛于“一步超前”最优控制.

关键词　WLS 算法，“一步超前”最优适应控制器，闭环全局稳定
中图分类号　TP301.6

Optimal Adaptive Controller for Stochastic Systems Based on Weighted Least-squares Algorithm

JIANG Rui[1,2]　　LUO Gui-Ming[2]
[1](*Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing*　100084)
[2](*School of Software, Tsinghua University, Beijing*　100084)
(E-mail: jiangr00@mails.tsinghua.edu.cn)

Abstract　In general, we can not guarantee the convergence of the common LS method. A recursive least-squares algorithm with slowly decreasing weights for linear stochastic systems is found to have self-convergence property, i.e., it converges to a certain random vector almost surely irrespective of the control law design. Such algorithms enjoy almost the same nice asymptotic properties as the standard least-squares. With adaptive control, the closed-loop system is globally stable and the adaptive controller may converge to the one-step-ahead optimal controller.

Key words　WLS algorithm, one-step-ahead optimal adaptive controller, globally stable

1　引言

近年来适应控制逐渐成为一门在科技领域中极具挑战性的学科，这方面的早期工作是 Aström 和 Wittenmark 引入的基于普通最小二乘算法的自调整器[1]. 建立一个控制器的原则就是随机系统的参数可以被尽可能准确的估计，从而保证系统的输出在一定范围内变化，因此所采用的适应控制算法就显得至关重要. 最优适应控制的优点大大促进了适应控

1) 国家自然科学基金 (60474026) 和清华大学亚洲研究中心基金资助
Supported by National Natural Scicence Foundation of P. R. China (60474026), the Asia Research Center of Tsinghua University
收稿日期 2005-5-13　收修改稿日期 2005-10-27
Received May 13, 2005; in revised form October 27, 2005

制的发展，一些基于最小二乘算法的适应控制器相继产生[2~4]，但是这些工作都是要求持续激励条件，并且建立在系统是逆稳定的基础之上，此外在控制中还含有由 Riccati 方程确定的量.

为了扩充控制系统的应用范围，并考虑控制代价，通过对"一步超前"适应控制器的分析，[5] 和 [6] 中提出了"输入匹配"方法，将系统的信号跟踪问题转化为对系统输入的研究，其优点是在最优控制器的运算中并没有 Riccati 方程，并且能够降低系统最小相位的要求.

在本文中，我们对"一步超前"随机系统进行分析，并且建立了基于 WLS 算法的"一步超前"适应控制器，获得了如下的结论：

1) 给出了针对"一步超前"随机系统，运用 WLS 算法进行系统参数辨识的收敛性分析；

2) 不加任何的激励条件，能够保证闭环系统是全局稳定的；

3) 适应控制器趋近于"一步超前"最优适应控制器.

2　WLS 算法的收敛性分析

考虑如下的线性随机系统：

$$A(z)y_n = zB(z)u_n + w_n \tag{1}$$

这里 $A(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_p z^p$, $B(z) = \beta + b_1 z + \cdots + b_q z^q$, y_n, u_n, w_n 分别是系统的输出、输入和噪声，$A(z)$, $B(z)$ 中的多项式系数未知，p, q 已知，$\beta \neq 0$.

我们将系统重写成最小二乘的回归形式

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = \boldsymbol{\theta}^\tau \boldsymbol{\varphi}_n + w_{n+1} \\ &\boldsymbol{\theta} = (-a_1, \cdots, -a_p, \beta, b_1, \cdots, b_q)^\tau,\ \boldsymbol{\varphi}_n = (y_n, \cdots, y_{n-p+1}, u_n, u_{n-1}, \cdots, u_{n-q+1})^\tau \end{aligned} \tag{2}$$

为了进一步描述 WLS 算法，我们引进如下的一个函数集合：

$$F = \{f(\cdot) : f(x)\ \text{是缓慢递增的函数，并对某些} M > 0 \text{满足} \int_M^\infty \frac{\mathrm{d}x}{xf(x)} < \infty\} \tag{3}$$

这里，$f(\cdot)$ 是一个非减函数，当 x 取的充分大时，满足 $f(x^2) = O(f(x))$.

接下来，我们给出递推的 WLS 算法如下：

$$\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \boldsymbol{\theta}_n + L_n(y_{n+1} - \boldsymbol{\theta}_n^\tau \boldsymbol{\varphi}_n) \tag{4}$$

$$L_n = \frac{P_n \boldsymbol{\varphi}_n}{c_n^{-1} + \boldsymbol{\varphi}_n^\tau P_n \boldsymbol{\varphi}_n} \tag{5}$$

$$P_{n+1} = P_n - \frac{P_n \boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^\tau P_n}{c_n^{-1} + \boldsymbol{\varphi}_n^\tau P_n \boldsymbol{\varphi}_n} \tag{6}$$

这里初值 $\boldsymbol{\theta}_0$ 和 $P_0 = \delta I, (0 < \delta < 1)$ 可以随便选取，可以选取权值序列 $\{c_n\}$ 如下：

$$c_n = \frac{1}{f(r_n)}, \quad r_n = \|P_0^{-1}\| + \sum_{i=0}^n \|\boldsymbol{\varphi}_i\|^2$$

其中的 $f(\cdot)$ 即为 (3) 中所定义的函数.

进一步可以给出：

$$c_t^{-1} = O(\log^L r_t), \quad L > 0 \tag{7}$$

为了分析 WLS 算法，我们有如下的假设：

A1) $\{w_n, F_n\}$ 是一个鞅差序列，并且满足：$\sup\limits_{n\geqslant 0} E\{|w_{n+1}|^r|F_n\} < \infty$ a.s.(几乎处处成立) $r \geqslant 2$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} w_i^2 = R > 0$ a.s.

A2) u_n 是 F_n 可测的；

注. 为了保证算法的收敛性，我们选取鞅差序列作为扰动噪声，相似的技术参考[7~10].

由 Borel-Cantelli 引理，我们立刻可以得到

$$|w_{n+1}|^2 = O(n^{\varepsilon_0}) \text{ a.s. } \forall \varepsilon_0 \in \left(\frac{2}{r}, 1\right) \tag{8}$$

引理 1. 设系统 (1) 满足条件 A1)–A2), 那么由 (4)~(6) 所描述的 WLS 算法有如下的性质 (见 [7])

$$1)\ \|P_{n+1}^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{n+1}\| = O(1) \text{ a.s.} \tag{9}$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(\boldsymbol{\varphi}_n^\tau \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{n+1})^2] < \infty \text{ a.s.} \tag{10}$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c_n^\tau \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)^2}{c_n^{-1} + \boldsymbol{\varphi}_n^\tau P_n \boldsymbol{\varphi}_n} < \infty \text{ a.s.} \tag{11}$$

这里 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n \triangleq \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_n$.

定理 1. 设系统 (1) 满足条件 A1) 和 A2), 那么由 (4)~(6) 所描述的 WLS 算法有如下的自收敛性质，$\boldsymbol{\theta}_n$ 收敛于一个确定的向量 $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ (并不一定要与 $\boldsymbol{\theta}$ 相等).

证明. 见参考文献 [11].

3 最优适应控制器以及系统闭环全局稳定

由于 WLS 算法是收敛的，所以 β_n 一定是收敛于某一个确定的值，不妨将其设为 $\bar{\beta}$ (并不一定与 β 相等), 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \bar{\beta}$.

假设

$$\bar{\beta}B(z) + \lambda A(z) \neq 0, \quad \forall z : |z| \leqslant 1, \lambda \geqslant 0 \tag{12}$$

对于系统 (1), 令 $\{y_n^*\}$ 是一个给定的并且有界的参考信号序列，并且 y_{n+1}^* 是 F_n 可测的，考虑如下的性能指标

$$J(u_n) = E\{|y_{n+1} - y_{n+1}^*|^2|F_n\} + \lambda u_n^2, \quad \lambda \geqslant 0 \tag{13}$$

这样，通过最小化性能指标 (13) 以及 [12], 可以得到 "一步超前" 最优控制

$$u_n^* = \beta(\beta^2 + \lambda)^{-1}(y_{n+1}^* + \beta u_n^* - \boldsymbol{\theta}^\tau \boldsymbol{\varphi}_n) \tag{14}$$

同时，也可以得到采用递推算法求得的系统 (1) 的适应控制为

$$u_n = \beta_n(\beta_n^2 + \lambda)^{-1}(y_{n+1}^* + \beta_n u_n - \boldsymbol{\theta}_n^\tau \boldsymbol{\varphi}_n) \tag{15}$$

引理 2. 定义 $z_n = \boldsymbol{\varphi}_n^\tau \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n$, 由引理一立刻可以得到如下的结论

$$\sum_{n=1}^{N} z_n^2 = o(r_N) \tag{16}$$

证明. 由 $|c_i^{-1} + \boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_i \boldsymbol{\varphi}_i| = c_i^{-1}|I + c_i \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_i| = c_i^{-1}|P_i^{-1} + c_i \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^\tau||P_i| = c_i^{-1}|P_{i+1}^{-1}||P_i|$, 可得

$$\boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_i \boldsymbol{\varphi}_i = \frac{|P_i| - |P_{i+1}|}{|P_{i+1}|} c_i^{-1} \tag{17}$$

又由 (6) 可得：

$$c_i \boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_{i+1} \boldsymbol{\varphi}_i = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_i \boldsymbol{\varphi}_i}{c_i^{-1} + \boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_i \boldsymbol{\varphi}_i} \tag{18}$$

综合 (17) 和 (18), 可得

$$\sum_{i=1}^{t} c_i \boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_{i+1} \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=1}^{t} \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_i \boldsymbol{\varphi}_i}{c_i^{-1} + \boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_i \boldsymbol{\varphi}_i} = \sum_{i=1}^{t} \frac{|P_i| - |P_{i+1}|}{|P_i|} = \sum_{i=1}^{t} \frac{\int_{|P_{i+1}|}^{|P_i|} \mathrm{d}x}{|P_i|} < \sum_{i=1}^{t} \int_{|P_{i+1}|}^{|P_i|} \frac{\mathrm{d}x}{x} = O(\log r_t) \tag{19}$$

而由 (6) 和类似定理 1 中的证明可知，当 $i \to \infty$ 时，$P_i - P_{i+1} \to 0$, 故可得

$$\sum_{i=1}^{t} \boldsymbol{\varphi}_i^\tau (P_i - P_{i+1}) \boldsymbol{\varphi}_i = o\left(\sum_{i=1}^{t} \|\boldsymbol{\varphi}_i\|^2\right) \tag{20}$$

所以，综合 (19) 和 (20), 有下式成立：

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{t} \boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_i \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=1}^{t} \boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_{i+1} \boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{i=1}^{t} \boldsymbol{\varphi}_i^\tau (P_i - P_{i+1}) \boldsymbol{\varphi}_i = O(c_t^{-1} \sum_{i=1}^{t} c_i \boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_{i+1} \boldsymbol{\varphi}_i) + \\ &\sum_{i=1}^{t} \boldsymbol{\varphi}_i^\tau (P_i - P_{i+1}) \boldsymbol{\varphi}_i = O(c_t^{-1} \log r_t) + o(\sum_{i=1}^{t} \|\boldsymbol{\varphi}_i\|^2) = O(c_t^{-1} \log r_t) + o(r_t) \end{aligned} \tag{21}$$

而由于 (7) 中 c_t^{-1} 的定义，并结合 (21) 立刻可以得到：

$$\sum_{i=1}^{t} \boldsymbol{\varphi}_i^\tau P_n \boldsymbol{\varphi}_i = o(r_t) \tag{22}$$

所以进一步可得

$$\boldsymbol{\varphi}_n^\tau P \boldsymbol{\varphi}_n = o(r_n) \tag{23}$$

利用 (11) 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{\varphi}_n^\tau \tilde{\boldsymbol{\theta}}_n)^2}{r_n} < \infty, \text{即} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^2}{r_n} < \infty \tag{24}$$

由条件 A1) 和 (8) 可得：$n = O(r_n)$, 由 Kronecker 引理和 (24), 立刻得 (16). □

注. 由 (2), 可得

$$y_{n+1} = \boldsymbol{\theta}^\tau \boldsymbol{\varphi}_n + w_{n+1} = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_n)^\tau \boldsymbol{\varphi}_n + \boldsymbol{\theta}_n^\tau \boldsymbol{\varphi}_n + w_{n+1} = z_n + \boldsymbol{\theta}_n^\tau \boldsymbol{\varphi}_n + w_{n+1} \tag{25}$$

所以可得

$$\beta_n A(z) z_n = (\bar{\beta} B(z) + \lambda A(z)) u_n + (1 - A(z)) \beta_n w_{n+1} - \beta_n A(z) y_{n+1}^* + (\beta_n - \bar{\beta}) B(z) u_n \quad (26)$$

同理也可以得到：

$$\beta_n B(z) z_n = (\bar{\beta} B(z) + \lambda A(z)) y_{n+1} - (\lambda + \beta_n B(z)) w_{n+1} - \beta_n B(z) y_{n+1}^* + (\beta_n - \bar{\beta}) B(z) y_{n+1} \quad (27)$$

考虑到 (12), (26) 和 (27) 表明：一定存在一个常量 $s \in (0,1)$, 使得下式成立

$$u_n^2 = O(\sum_{i=0}^{n} s^{n-i} z_i^2) + O(\sum_{i=0}^{n} s^{n-i} w_i^2) + O[\sum_{i=0}^{n} (\beta_n - \bar{\beta}) s^{n-i} u_i^2] + O(1) \text{ a.s.} \quad (28)$$

$$y_n^2 = O(\sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i} z_i^2) + O(\sum_{i=0}^{n} s^{n-i} w_i^2) + O[\sum_{i=0}^{n} (\beta_n - \bar{\beta}) s^{n-i} y_i^2] + O(1) \text{ a.s.} \quad (29)$$

由以上两式，立刻可得

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n\|^2 = O(\sum_{i=0}^{n} s^{n-i} z_i^2) + O(\sum_{i=0}^{n} s^{n-i} w_i^2) + O[\sum_{i=0}^{n} (\beta_n - \bar{\beta}) s^{n-i} u_i^2] + O[\sum_{i=0}^{n} (\beta_n - \bar{\beta}) s^{n-i} y_i^2] + O(1) \quad (30)$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \bar{\beta}$, 故可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \|\boldsymbol{\varphi}_n\|^2 = O(\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} s^{n-i} z_i^2) + O(\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} s^{n-i} w_i^2) + \\
&O[\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} (\beta_n - \bar{\beta}) s^{n-i} u_i^2] + O[\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} (\beta_n - \bar{\beta}) s^{n-i} y_i^2] + O(1) = \\
&O(\sum_{n=1}^{N} z_n^2) + O(\sum_{n=1}^{N} w_n^2) + O(1)
\end{aligned} \quad (31)$$

定理 2. 如果系统 (1) 满足条件 A1), A2) 和 (12), 那么对于由 (4)~(6) 和 (15) 所定义的自适应控制器，可以得到如下的结论

$$1) \quad \lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} (u_n^2 + y_n^2) < \infty \quad \text{a.s.} \quad (32)$$

$$2) \quad \lim_{N\to\infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} (u_n - u_n^*)^2 = C \quad \text{a.s.} \quad (33)$$

证明. 1) 通过 (16) 和 (31), 可得

$$r_N = \sum_{n=1}^{N} \|\boldsymbol{\varphi}_n\|^2 + r_0 = O(\sum_{n=1}^{N} z_n^2) + O(\sum_{n=1}^{N} w_n^2) + O(1) = o(r_N) + O(N) \quad \text{a.s.}$$

由上式可看出

$$r_N = O(N) \quad \text{a.s.} \quad (34)$$

所以 (32) 成立. □

2) 下面就 $\beta_n \neq 0$ 和 $\beta_n = 0$ 分别讨论

如果 $\beta_n \neq 0$, 那么利用 (14) 和 (15), 可得

$$\lambda\beta^{-1}(u_n - u_n^*) + \lambda(\beta_n^{-1} - \beta^{-1})u_n = z_n \tag{35}$$

这样我们可以进一步得到

$$|u_n - u_n^*|^2 \leqslant |\lambda\beta^{-1}|^{-2}(|z_n| + |\lambda(\beta_n^{-1} - \beta^{-1})u_n|)^2 \leqslant 2|\lambda\beta^{-1}|^{-2}(|z_n|^2 + |\lambda(\beta_n^{-1} - \beta^{-1})u_n|^2) \tag{36}$$

如果 $\beta = 0$, 由 (15) 可知，$u_n = 0$, 由 (14) 和 (15) 可得：

$$|u_n - u_n^*|^2 = |\lambda\beta^{-1}|^{-2}|z_n|^2$$

令 $\beta_n = \bar{\beta} + d_n$, $(\beta - \bar{\beta})^2 = M$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \bar{\beta}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

利用引理 2, (34) 和 Kronecker 引理，可以得到

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\sup\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}(u_n - u_n^*)^2 \leqslant 2|\lambda\beta^{-1}|^{-2}(\lim_{N\to\infty}\sup\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|z_n|^2 + \lim_{\substack{N\to\infty\\ \beta_n\neq 0}}\sup\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|\lambda(\beta_n^{-1} - \\ &\beta^{-1})u_n|^2) = O(\lim_{\substack{N\to\infty\\ \beta_n\neq 0}}\sup\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|(\frac{\beta-\beta_n}{\beta\beta_n})u_n|^2) = O(\lim_{\substack{N\to\infty\\ \beta_n\neq 0}}\sup\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|(\beta-\beta_n)^2u_n^2|) = \\ &O(\lim_{\substack{N\to\infty\\ \beta_n\neq 0}}\sup\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|(\beta-\bar{\beta}_n)^2u_n^2|) + O(\lim_{\substack{N\to\infty\\ \beta_n\neq 0}}\sup\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|d_n^2u_n^2|) = O(1)\end{aligned} \tag{37}$$

故此时得到的适应控制器为次优控制器. □

推论. 如果系统 (1) 满足条件 A1), A2) 和 (12), 对于由 (4)~(6) 和 (15) 所定义的自适应控制器，如果 $\bar{\beta} = \beta$, 则适应控制器 u_n 收敛于最优控制器 u_n^*.

事实上，由 (37) 的推导得到

$$\lim_{N\to\infty}\sup\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|(\beta-\bar{\beta})^2u_n^2| = o(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|u_n^2|)$$

由 (34) 和 (37) 即可得到推论结论.

4　仿真结果

首先，为了证明 WLS 算法的收敛性，我们给出如下的仿真实验

例. 选取系统

$$y_n = \frac{z^{-1}(\beta + b_1z^{-1})}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}u_n + \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}w_n \tag{38}$$

这里被辨识系统的真实参数为：$a_1 = 0.3$, $a_2 = -0.4$, $\beta = 0.1$, $b_1 = 1$.

输入信号 $\{u_n\}$ 是由方波发生器所产生的，$\{w_n\}$ 是一个方差为 1 的白噪声序列，$\{y_n^*\}$ 是一个给定的参考信号序列，$\{y_n\}$ 是 (15) 所定义的适应控制 $\{u_n\}$ 作用下的输出序列.

将系统写成最小二乘形式：$y_{n+1} = \boldsymbol{\theta}^\tau\boldsymbol{\varphi}_n + w_{n+1}$, 这里 $\boldsymbol{\varphi}_n = (y_n, y_{n-1}, u_n, u_{n-1})^\tau$.

选取白噪声方差为 0.01, (12) 中所定义的 λ 也是 0.01.

由图 2 和图 3 可以看出，WLS 算法和 LS 算法的跟踪曲线是很相似的，如果选取 $N=1000$, 把 $\sum_{i=0}^{N}(y_n-y_n^*)^2$ 作为判断跟踪能力好坏的标准，可以计算得到图 2 的跟踪误差为 18.09, 而图 3 的跟踪误差则为 19.03, 两者相差并不大.

同时，我们注意到，在获得近似的跟踪误差的情况下，采取由 $\sum_{n=0}^{N}u_n^2$ 定义的控制能量消耗两者却有很大的差别，图 2 中的 $\sum_{n=0}^{N}u_n^2=384.8589$, 而图 3 的 $\sum_{n=0}^{N}u_n^2=5.5904e+003$, 所以，从图 1 可以看出， WLS 算法具有很好的收敛性，而从图 2 和图 3 可以看出，基于 WLS 算法的适应控制器具有良好的跟踪能力，与基于普通 LS 算法的适应控制器相比，如果要想得到同样的跟踪精度，前者节省了很多的控制能量消耗.

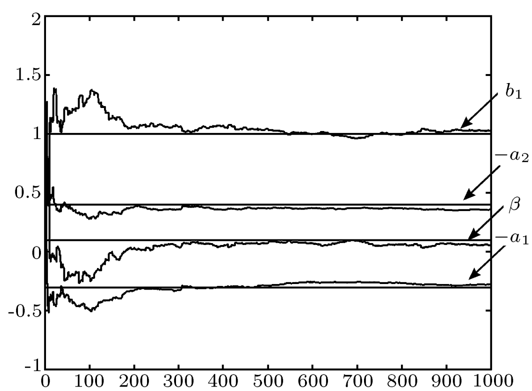

图 1 WLS 算法辨识参数曲线

Fig. 1 Identification of parameters by WLS algorithm

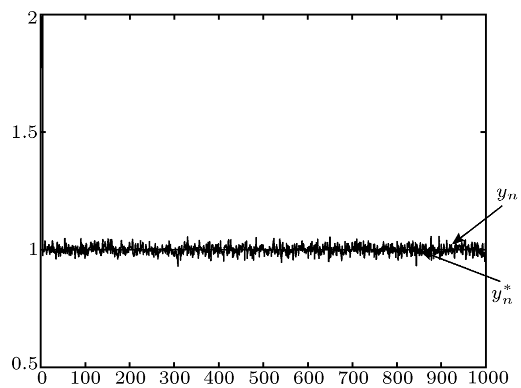

图 2 WLS 算法跟踪曲线

Fig. 2 Tracking error by WLS algorithm

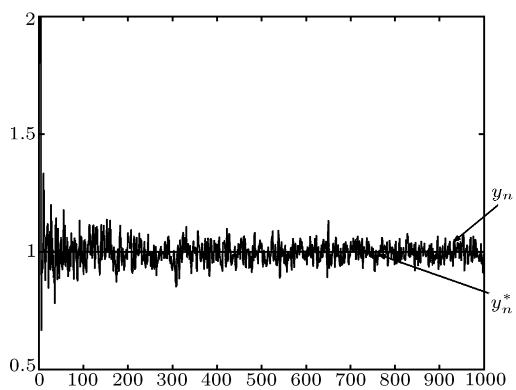

图 3 LS 算法跟踪曲线

Fig. 3 Tracking error by LS algorithm

5　结论

我们对“一步超前”随机系统进行了一些分析，采取的辨识方法是 WLS 算法，利用 WLS 算法的收敛性，获得了适应控制的很好的结论.

值得一提的是，我们并没有使用任何的持续激励条件，却得到了适应控制器作用下的系统是闭环全局稳定的，并且所采取的适应控制能够收敛于最优控制.

同时，与以往的基于普通 LS 算法的适应控制器进行比较，基于 WLS 算法的适应控制器有更好的跟踪能力，并且消耗的控制能量更少.

References

1 Aström K J, Wittenmark B. Adaptive Control. Second Edition. Canada: Addison-Wesley Publishing Company, 1995

2 Hijab O B. The adaptive LOG problem–Part I. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1983, **28**(2): 171∼178

3 Kumar P R. Optimal adaptive control of linear quadratic Gaussion systems. *SIAM Control and Optimization*, 1983, **21**(2): 163∼178

4 Caines P E, Chen H F. Optimal adaptive LOG control for systems with finite state process parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, **30**(2): 185∼189

5 Johnson C R, J R, Tse E. Adaptive implementation of one-step-ahead optimal control via input matching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, **23**(5): 856∼872

6 Goodwin G C, Johnson C R, J R, Sin KS. Global convergence for adaptive one-step-ahead optimal controllers based on input matching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(6): 1269∼1273

7 Landau I D. Near supermartingales for convergence analysis of recursive identification and adaptive control schemes. *International Journal of Control*, 1982, **35**(2): 197∼226

8 Becker A H, Kumar P R, Wei C Z. Adaptive control with the stochastic approximation algorithm, geometry and convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, **30**(4): 330∼338

9 Johansson R. Supermartingales analysis of minimum variance adaptive control. *Control-Theory and Advanced Technology*, 1995, **10**(4): 993∼1013

10 Guo L, Chen H F. The Aströn-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(7): 802∼812

11 Guo L. Self-convergence of weighed least-squares with applications to stochastic adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(1): 79∼89

12 Luo G M. Optimal adaptive controllers based on LS algorithms. *Acta Automatica Sinica*, 1996, **8**(1): 73∼79

姜　睿　2004 年获得清华大学自动化系工学学士学位，现就读于清华大学计算机科学与技术系.

(**JIANG　Rui**　Received his bachelor degree in Department of Automation from Tsinghua University in 2004. Now he is a graduate student in the Department of Computer Science and Technology at Tsinghua University.)

罗贵明　清华大学软件学院教授，主要研究方向为系统辨识，自适应控制，非线性控制和变结构控制.

(**LUO Gui-Ming**　Professor in School of Software Tsinghua University. His research interests include system identification, adaptive control, nonlinear control, and variable structure control.)