第 32 卷 第 1 期 | 自 动 化 学 报 | Vol. 32, No. 1
2006 年 1 月 | ACTA AUTOMATICA SINICA | January, 2006

一类非线性不确定系统的最优自适应控制[1)]

陈奕梅[1] 韩正之[2]

[1](天津工业大学计算机技术与自动化学院 天津 300160)
[2](上海交通大学电子信息与电气工程学院 上海 200030)
(E-mail: chenplum@sohu.com)

摘 要 研究了一类含有系统扰动，并且状态项与控制项中同时含有未知参数的非线性系统的反馈稳定问题. 在控制器的设计中，将原系统的自适应稳定问题转化为扩展系统的非自适应稳定问题，并利用扩展系统的鲁棒控制 Lyapunov 函数，设计出使原系统自适应稳定的控制律. 进一步，利用逆最优的方法，证明了该控制律同时也是满足某种性能指标的最优控制.

关键词 控制 Lyapunov 函数，自适应控制，鲁棒稳定，逆最优
中图分类号 TP271

Optimal Adaptive Control of a Class of Nonlinear Uncertain Systems

CHEN Yi-Mei[1] HAN Zheng-Zhi[2]

[1](*Institute of Computer Technology and Automation, Tianjin Polytechnic University, Tianjin* 300160)
[2](*School of Electronic Information & Electrical Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)
(E-mail: chenplum@sohu.com)

Abstract In this paper, the problem of adaptive stabilization of a class of nonlinear systems with unknown parameters both in state and control vectors has been considered. The problem of adaptive stabilization of nonlinear systems is reduced to the problem of nonadaptive stabilization of an extended system. An adaptive controller is designed to complete the stabilization by employing the robust control Lyapunov function of the extended system. Furthermore, the controller is also verified to possess the optimality by applying the inverse optimal method.

Key words Control Lyapunov functions, adaptive control, robust stability, inverse optimal

1 引言

自从 1983 年 Artstein[1] 与 Sontag[2] 提出控制 Lyapunov 函数 (CLF) 概念后，借助于控制 Lyapunov 函数构造稳定控制律的方法得到了广泛的研究. 对于某些类型的非线性系统，如果能找到其 CLF, 我们便能直接利用一些基于 CLF 与系统动态的公式[3] 计算出使系统稳定的控制律. 这样，Lyapunov 函数不再局限于对非线性系统稳定性的描述，而在非

1) 福建省自然科学基金 (A0510025) 资助
Natural Science Foundation of Fujian Province (A0510025)
收稿日期 2004-11-23 收修改稿日期 2005-10-19
Received November 23, 2004; in revised form October 19, 2005

线性控制系统的设计方面也显示出巨大的应用价值[4,5]．Krstic 与 Kokotovic[6] 将 CLF 引入自适应非线性系统中，提出了自适应控制 Lyapunov 函数 (ACLF) 的概念，证明了对于一类非线性系统，只要存在 ACLF, 便存在反馈使系统实现自适应稳定．

本文研究一类状态项与控制项中同时含有未知参数，以及系统扰动的非线性系统的反馈稳定问题．利用系统的鲁棒控制 Lyapunov 函数，建立了使系统自适应稳定的充分条件，并设计出使系统自适应稳定的反馈控制律．进一步，利用逆最优方法证明了该控制律同时也是满足某种性能指标的最优控制．

2　预备知识

考虑如下仿射系统[7]

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{d}(t))+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))u(t) \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态向量；$\boldsymbol{d}(t)\in D\subseteq R^l$ 代表系统所受的扰动；$\boldsymbol{u}(t)\in U\subseteq R$ 为系统控制向量，f,g 为光滑函数，并且对于所有的 λ, $\boldsymbol{f}(0,\lambda)=0$.

定义 1[7]**.** 称 C^1 类正定、真的函数 $V(x)$ 为系统 (1) 的鲁棒控制 Lyapunov 函数 (RCLF), 如果 $V(x)$ 满足下列性质：

$$\inf_{u\in U}\{\hat{a}(\boldsymbol{x})+b(\boldsymbol{x})u\}<0,\quad \forall\boldsymbol{x}\neq 0 \tag{2}$$

其中，$\hat{a}(\boldsymbol{x})=\sup\limits_{\boldsymbol{d}\in D}a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})$, $a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})=\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})$, $b(\boldsymbol{x})=\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.

定理 1[7]**.** 如果对于系统 (1), 存在 V 是 RCLF, 则可以得到 $R^n/\{0\}$ 上光滑的反馈律

$$\begin{aligned}&u(\boldsymbol{x})=\kappa(\hat{a}(\boldsymbol{x}),b(\boldsymbol{x}))\\&\kappa(a,b)=\begin{cases}0, & b=0\\ -\left(c_0+\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^4}}{b^2}\right)b, & b\neq 0\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

使系统 (1) 鲁棒渐近稳定，其中 $c_0>0$.

3　自适应控制器的设计

考虑如下不确定系统：

$$\Sigma_1:\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+F(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\zeta}_1+G(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\zeta}_2u+\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t) \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态向量；$u(t)\in U\subseteq R$ 为系统控制；$\boldsymbol{\zeta}_1\in R^p,\boldsymbol{\zeta}_2\in R^q$ 为未知参数向量；$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),F(\boldsymbol{x}),G(\boldsymbol{x})$ 都是光滑的；且有 $\boldsymbol{f}(0)=0$; $F(0)=0$; $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)$ 是未知函数，并且满足 $|\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)|\leqslant\lambda(\boldsymbol{x})$, $\forall\boldsymbol{x}\in R^n,\forall t\in R_+$, 其中 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 是一已知非负光滑函数，$\lambda(0)=0$. 我们的目的是要寻找动态控制 $u=k(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)$, 使得对于任给 $\boldsymbol{\zeta}_1,\boldsymbol{\zeta}_2$, 都可以使系统 (4) 达到稳定．其中，$\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2$ 分别为 $\boldsymbol{\zeta}_1$ 与 $\boldsymbol{\zeta}_2$ 的估计值.

定义 2. 如果对于系统 (4) 存在一个在 $(R^n\backslash\{0\})\times R^p\times R^q$ 上光滑的控制律 $u(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)$ 满足 $u(0,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)\equiv 0$, 使系统的解 $(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)$ 全局有界，并且有 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$, 我们就称系统是全局自适应稳定.

定义 3. 函数 $V(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)$ 满足下列条件时被称为系统 (4) 的自适应鲁棒控制 Lyapunov 函数 (ARCLF):

1) $V(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)\in C^1$, 存在 κ_∞ 类函数 α_1,α_2, 成立

$$\alpha_1(\|\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2\|)\|\boldsymbol{x}\|\leqslant V(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)\leqslant\alpha_2(\|\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2\|)\|\boldsymbol{x}\| \tag{5}$$

2) 对所有的 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 成立:

$$\sup_{\omega\in D}\inf_{u\in R}\left\{\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{f}+F\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1+G\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2u+\boldsymbol{\omega}]+\frac{\partial V}{\partial\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1}\left(\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}F\right)^{\mathrm{T}}+\frac{\partial V}{\partial\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2}\left(\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}G\right)^{\mathrm{T}}u\right\}<0 \tag{6}$$

定理 **2.** 如果系统 (4) 存在 ARCLF, 则系统可通过状态反馈实现全局自适应稳定.

证明. 构造如下 (4) 的扩展系统 (系统的结构见图 1)

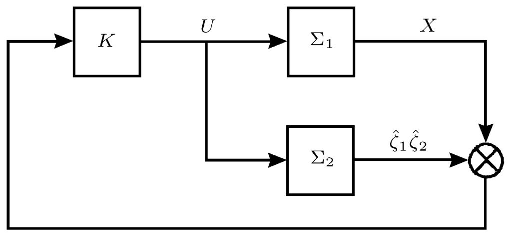


图 1 扩展后的系统结构图

Fig. 1 The extended system structure

$$\Sigma_2:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x})+F(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1+G(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2u+\omega\\ \dot{\hat{\boldsymbol{\zeta}}}=\left(\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}F\right)^{\mathrm{T}}\\ \dot{\hat{\boldsymbol{\zeta}}}_2=\left(\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}G\right)^{\mathrm{T}}u\end{cases} \tag{7}$$

显然, 扩展系统 (7) 中不存在不确定参数, 为非自适应系统. 因为 $V(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)$ 为系统 (4) 的 ARCLF, 由定义 1 可知, $V(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)$ 是 (7) 的 RCLF, 因此根据定理 1 可以构造一个如下在 $(R^n\backslash\{0\})\times R^p\times R^q$ 上光滑的控制律 $u=k(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)$ 使系统 (7) 全局渐近稳定.

$$u=\begin{cases}\kappa(a(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2),b(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)), & b\neq 0\\ 0, & b=0\end{cases} \tag{8}$$

其中, $a=\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}\left[\boldsymbol{f}+F\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1+\mathrm{sgn}\left(\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}\right)\lambda\right]+\dfrac{\partial V}{\partial\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1}\left(\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}F\right)^{\mathrm{T}}$, $b=\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}G\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2+\dfrac{\partial V}{\partial\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}G\right)^{\mathrm{T}}$.

下面我们来证明如上所设计的控制律以及由 (7) 所确定的 $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2$, 可以使系统 (4) 全局自适应稳定. 由 V 构造如下 Lyapunov 函数:

$$V_1(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)=V(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\zeta}_1-\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\zeta}_1-\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\zeta}_2-\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\zeta}_2-\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2) \tag{9}$$

记 $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_i=\boldsymbol{\zeta}_i-\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i$ $(i=1,2)$, 则 V_1 沿着 (4) 式对时间的导数可以表示为:

$$\dot{V}_1=\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}[\boldsymbol{f}+F\boldsymbol{\zeta}_1+G\boldsymbol{\zeta}_2u+\boldsymbol{\omega}]+\frac{\partial V}{\partial\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1}\left(\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}F\right)^{\mathrm{T}}+\frac{\partial V}{\partial\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2}\left(\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}G\right)^{\mathrm{T}}u-\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}F\right)^{\mathrm{T}}-$$

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_2^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}G\right)^{\mathrm{T}}u=\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{f}+F\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1+G\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2u+\boldsymbol{\omega}]+\frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\zeta}}_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}F\right)^{\mathrm{T}}+\frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\zeta}}_2}\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}G\right)^{\mathrm{T}}u$$

1) 当 $\boldsymbol{x}\neq 0, b\neq 0$ 时，将 (8) 代入上式，有：

$$\dot{V}_1=\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}[f+F\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1+G\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2u+\boldsymbol{\omega}]+\frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\zeta}}_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}F\right)^{\mathrm{T}}+\frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\zeta}}_2}\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}G\right)^{\mathrm{T}}u\leqslant -c_0b^2-\sqrt{a^2+b^4}<0$$

2) 当 $\boldsymbol{x}\neq 0, b=0$ 时，有 $u=0$. $\dot{V}_1=\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{f}+F\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1+\boldsymbol{\omega}]+\dfrac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\zeta}}_1}\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}F$. 因为 $V(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)$ 为系统 (4) 的 ARCLF, 由 (6) 式可推出

$$b=0\Rightarrow \sup_{\omega\in D}\left\{\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{f}+F\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1+\boldsymbol{\omega}]+\frac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\zeta}}_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}F\right)^{\mathrm{T}}\right\}<0\Rightarrow \dot{V}_1<0$$

3) 当 $\boldsymbol{x}=0$ 时，$\dot{V}_1=0$. 综上所述，$\dot{V}_1\leqslant 0$.

因此，我们可以得出结论系统的解 $(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)$ 全局有界. 进一步，由 LaSalle 不变性定理可知 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$. 因此，系统全局自适应稳定. □

4 控制器最优性能分析

这一节我们将利用逆最优的方法[8] 分析上节所设计的控制器的最优性. 定义 $R(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)$ 为如下形式：

$$R^{-1}(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)=\begin{cases}c_0, & b=0\\ c_0+\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^4}}{b^2}, & b\neq 0\end{cases}\tag{10}$$

显然，$R(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)>0$. 利用 (10), 我们将控制器 (8) 记为如下形式：

$$u(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)=-R^{-1}(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)b\tag{11}$$

定理 3. 使系统 (4) 渐近稳定的控制律 (11) 也是对于如下代价函数的最优控制律.

$$J=\lim_{t\to\infty}\Big[\sum_{i=1}^{2}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)\Big]+\int_0^{\infty}(l+u^{\mathrm{T}}Ru)\mathrm{d}t\tag{12}$$

(12) 式中的 l 为

$$l(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)=-2\left(\bar{a}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}F\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1+\left(\bar{b}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}G\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2\right)\left(-\frac{1}{2}R^{-1}\left(\bar{b}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}G\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2\right)\right)\right)\tag{13}$$

其中，$\bar{a}=\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\dfrac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\zeta}}_1}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}F\right)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\omega}$, $\bar{b}=\dfrac{\partial V}{\partial \hat{\boldsymbol{\zeta}}_2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}G\right)^{\mathrm{T}}$.

证明. 由上面定义，显然，$a\geqslant \bar{a}+\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}F\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1$, $b=\bar{b}+\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}G\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2$. 首先证明 $l(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2)\geqslant 0$, 由 (10) 得 $l=-2\left(\bar{a}+\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}F\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1+b\left(-\dfrac{1}{2}R^{-1}b\right)\right)\geqslant c_0b^2-a+\sqrt{a^2+b^4}\geqslant 0$. 记

$$v=u+R^{-1}b=u+R^{-1}\left(\bar{b}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}G\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2\right)\tag{14}$$

将 (13) 代入 (12), 并借助 (14), 以及 (7) 式，可以得到

$$\begin{aligned}
J = &\lim_{t\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i(t)-\boldsymbol{\zeta}_i)^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i(t)-\boldsymbol{\zeta}_i)\right]+\int_0^{\infty} l+u^{\mathrm{T}}Ru\mathrm{d}t = \\
&\lim_{t\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i(t)-\boldsymbol{\zeta}_i)^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i(t)-\boldsymbol{\zeta}_i)\right]+\int_0^{\infty}\left[-2\left(\bar{a}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}F\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1\right)-2b(v-R^{-1}b)+v^{\mathrm{T}}Rv\right]\mathrm{d}t = \\
&\sum_{i=1}^{2}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i(0)-\boldsymbol{\zeta}_i)^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i(0)-\boldsymbol{\zeta}_i)-\int_0^{\infty}\left[2\left(\bar{a}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}F\zeta_1\right)+2\left(\bar{b}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}G\zeta_2\right)^{\mathrm{T}}u+v^{\mathrm{T}}Rv\right]\mathrm{d}t = \qquad (15)\\
&\sum_{i=1}^{2}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i(0)-\boldsymbol{\zeta}_i)^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_i(0)-\boldsymbol{\zeta}_i)+2V(\boldsymbol{x}(0),\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1(0),\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2(0))-2\lim_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t),\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1(t),\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2(t))+\int_0^{\infty}v^{\mathrm{T}}Rv\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

进一步，由于 $u=-R^{-1}b$ 为渐近稳定控制律，即有 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=0$, 因此由 (5) 式得到 $\lim\limits_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t),\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1(t),\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2(t))=\lim\limits_{t\to\infty}V(0,\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1(t),\hat{\boldsymbol{\zeta}}_2(t))=0$. 同时，当 $u=-R^{-1}b$ 时，也使得 $\int_0^{\infty}v^{\mathrm{T}}Rv\mathrm{d}t=0$ 达到最小. 因此控制律 (8) 使代价函数 (12) 为最小. □

5 例

考虑如下二阶非线性系统：

$$\dot{x}_1=-x_1,\quad \dot{x}_2=\theta_1x_1^2+x_2^2+\theta_2u+\omega \tag{16}$$

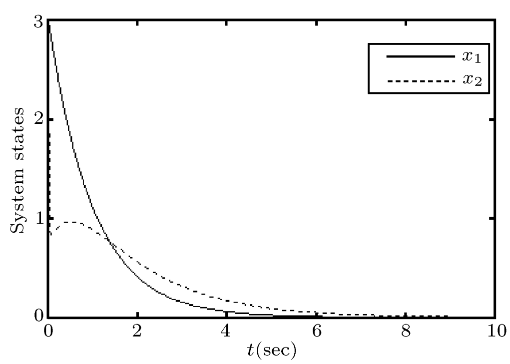
其中，θ_1,θ_2 为未知常数，$\omega\leqslant 2(x_1^2+x_2^2)$, 选取 $V=\dfrac{1}{2}(\hat{\theta}_1x_1)^2+\dfrac{1}{2}(\hat{\theta}_2x_2)^2$ 为 RCLF, 则扩展系统可表示为：

$$\dot{x}_1=-x_1,\ \dot{x}_2=\theta_1x_1^2+x_2^2+\hat{\theta}_2u+\omega,\ \dot{\hat{\theta}}_1=x_2\hat{\theta}_2^2x_1^2,\ \dot{\hat{\theta}}_2=x_2\hat{\theta}_2^2u \tag{17}$$

根据 (8) 选取

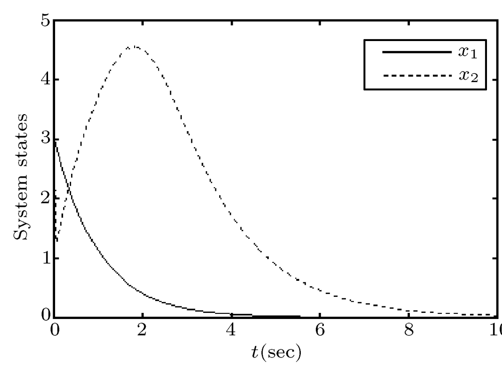
$$a=-x_1^2\hat{\theta}_1^2+x_2\hat{\theta}_2^2[x_2^2+x_1^2(\hat{\theta}_1+\Gamma_1x_1^2\hat{\theta}_1)+\mathrm{sgn}(x_2\hat{\theta}_2^2)(x_1^2+x_2^2)],\ b=x_2\hat{\theta}_2^3(1+\Gamma_2x_2^2)$$

仿真时选取初始值 $\{x_1(0),x_2(0),\hat{\theta}_1(0),\hat{\theta}_2(0)\}=\{3,3,1,1\}$. 对于 $\theta_1=1$, $\theta_2=3$ 以及 $\theta_1=20$, $\theta_2=10$ 分别进行仿真，结果如图 2 所示. 可以看到，尽管未知参数的实际值有很大的差别，但是并没有影响系统的渐近稳定性.



(a) $\theta_1=1,\theta_2=3$ 时系统的状态

(a) System states ($\theta_1=1,\theta_2=3$)



(b) $\theta_1=20,\theta_2=10$ 时系统的状态

(b) System states ($\theta_1=20,\theta_2=10$)

图 2 仿真结果

Fig. 2 Simulation results

6　结论

通过将鲁棒控制 Lyapunov 函数引入自适应控制的设计中，得出了一种对含有未知参数非线性系统进行稳定控制的方法．该控制器同时被证实具有最优性．当然，该方法的前提条件是找出一个合适的鲁棒控制 Lyapunov 函数，而关于鲁棒控制 Lyapunov 函数的设计已有许多有意义的结果可以利用[9,10]．因此，本文提出的方法有广泛的应用前景

References

1 Artstein Z. Stabilization with relaxed control. *Nonlinear Analysis*, 1983, **7**(11): 1163∼1173

2 Sontag E D. A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1983, **21**(3): 462∼471

3 Sontag E D. A universal construction of Artstein′s theorem on nonlinear stabilization. *Systems & Control Letters*, 1989, **13**(2): 117∼123

4 Liu Yun-Gang, Shi Song-Jiao, Pan Zi-Gang, Backstepping robust adaptive feedback control design for stochastic nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2001, **27**(5): 613∼620

5 Deng H, Krstic M, Williams R J. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, **46**(8): 1237∼1253

6 Krstic M, Kokotovic P V. Control Lyapunov function for adaptive nonlinear stabilization. *Systems and Control Letters*, 1995, **26**(1): 17∼23

7 Yuandan L, Sontag E D. Control Lyapunov universal formulas for restricted inputs. *Control Theory and Advanced Technology*, 1995, **10**(4): 1∼22

8 Freeman R A, Kokotovic P V. Inverse optimality in robust stabilization, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1996, **34**(4): 1365∼1391

9 McConley M W, Appleby B D, Dahleh M A. A control Lyapunov function approach to robust stabilization of nonlinear systems. In: Proceedings of the American Control Conference, Albuquerque, NM, USA: IEEE press, 1997. 329∼333

10 Marino R, Tomei P. Robust stabilization of feedback linearizable time-varying uncertain systems. *Automatica*, 1993, **29**(1): 181∼189

陈奕梅　2005 年于上海交通大学获博士学位，现为天津工业大学计算机与自动化学院讲师，主要研究方向为非线性控制与应用．

(**CHEN Yi-Mei**　Received her Ph. D. degree in control theory and control engineering from Shanghai Jiaotong University in 2005, and she is currently a lecturer in Institute of Computer Technology and Automatization at Tianjin Polytechnic University. Her research interests include nonlinear control and application.)

韩正之　上海交通大学电子技术与电气工程学院教授、博士生导师．主要研究方向为非线性控制、混沌动力学系统与控制、计算机网络控制等．

(**HAN Zheng-Zhi**　Professor in the School of Electronic Information & Electrical Engineering at Shanghai Jiaotong University. His research interests includes nonlinear control theory, chaotic dynamics systems and control, and computer network control.)