

月球探测器重力转弯软着陆的最优制导¹⁾

王大轶¹ 李铁寿¹ 马兴瑞²

¹(北京控制工程研究所 北京 100080)

²(中国航天科技集团公司 北京 100830)

(E-mail: Dayiwang@263.net)

摘要 对于月球表面重力转弯软着陆过程,应用极大值原理研究了最优制导律,证明了其在着陆过程中不存在奇异状态,并且至多进行一次开关切换.最后,给出了一种易于实现的次优制导律.

关键词 月球软着陆, 燃耗最优控制, 制导律

中图分类号 TP273.1

OPTIMAL GUIDANCE FOR LUNAR GRAVITY-TURN DESCENT

WANG Da-Yi¹ LI Tie-Shou¹ MA Xing-Rui²

¹(Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100080)

²(China Aerospace Science Corporation, Beijing 100830)

(E-mail: Dayiwang@263.net)

Abstract The maximum principle is utilized to generate an optimal guidance law for lunar gravity-turn descent. It is shown that there exists no singular arc for the problem and there is at most one switching during landing. Finally, an easily-mechanized near optimal guidance law is presented.

Key words Lunar soft landing, minimal fuel control, guidance law

1 引言

月球探测器软着陆过程从一条环月停泊轨道开始,经霍曼变轨到达近月点时开始制动段,在水平速度被基本抵消之后进入最终着陆段,最后探测器以垂直姿态软着陆到月面.制动段制导律的设计要以燃耗最优性为出发点,而最终着陆段的制导律则要兼顾最优性和安全性.本文研究在最终着陆段以重力转弯方式进行软着陆的最优制导过程.

重力转弯(gravity-turn)软着陆,是指在着陆过程中通过姿控系统使制动加速度方向与速度矢量的反方向始终保持一致.它的主要优点是着陆姿控及测量比较简单(见文献[1]).

1) 国家自然科学基金(19782004)资助

人们对重力转弯软着陆过程进行了一定的研究^[1~3],并已成功地将其应用于月球和火星表面软着陆的实际任务中^[4,5].但是,这些研究和应用大都没有考虑燃耗最优问题,并且是基于结构相对复杂和可连续调节的变推力制动发动机进行的.本文以软着陆过程的燃耗最优性要求为出发点,基于推力开关调节的制动发动机,设计了月球重力转弯软着陆最优开关式闭环制导律.对最优制导律的奇异条件进行了分析,证明了最优制导律中不存在奇异状态,并且在软着陆过程中至多进行一次开关切换.最后,考虑到测量误差和执行机构的偏差对着陆效果的影响,给出了一种易于实现的次优制导律,来满足软着陆最优性和安全性的要求.

2 重力转弯软着陆过程

对于最终着陆段,假设探测器的下降轨迹在一平面内,且月球引力场为垂直于月面 XY 的均匀引力场,引力加速度 g 沿 $-Z$,如图 1 所示.制动推力方向沿探测器的本体轴 z .重力转弯软着陆过程中探测器质心动力学方程可表示为

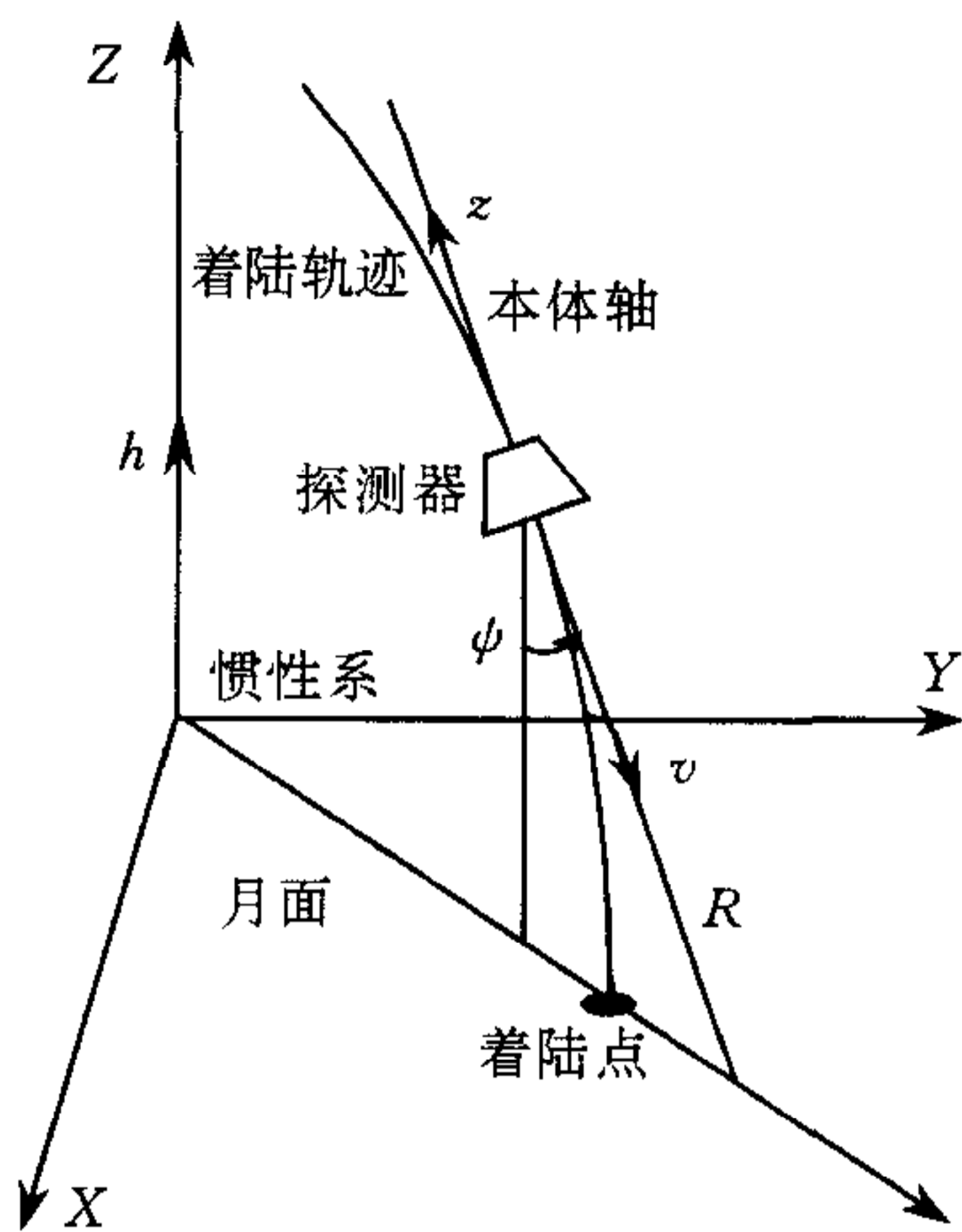


图 1 重力转弯软着陆过程示意图

$$\begin{cases} \dot{h} = -v \cos \psi \\ \dot{v} = \frac{ku}{m} + g \cos \psi \\ v \dot{\psi} = -g \sin \psi \\ \dot{m} = u \end{cases} \quad (1)$$

上式中各变量的物理意义如图 1 中所示,其中 $m > 0$ 为探测器质量; $k > 0$ 为制动发动机比冲; u 表示制动发动机的秒耗量 ($-\alpha \leq u \leq 0, \alpha > 0$ 为常数),可通过一定的机构加以调节,故作为软着陆问题的控制变量.假定制动发动机的最大推力与初始质量之比大于月面引力加速度,并且制动推进系统能够在一定的初始条件下将探测器停于月面上.

重力转弯过程中,探测器的高度、速度和姿态角度可由雷达高度表、多普勒雷达及惯性仪表测得^[3,4].令软着陆初始条件为 $h(0) = h_0, v(0) = v_0, \psi(0) = \psi_0, m(0) = m_0$;要设计制导律实现软着陆,就是使探测器到达月面时速度减小到给定的值,故终端条件 $h(t_f) = h_f = 0, v(t_f) = v_f > 0$, 着陆时间 t_f 及相应的 m_f 和 ψ_f 自由.

3 软着陆燃耗最优问题的描述

对于最终着陆段,可假设 $v > 0, t \in [0, t_f]$ 且 ψ 为一小角度.由此可将系统方程(1)化简为

$$\begin{cases} \dot{h} = -v & (2a) \\ \dot{v} = \frac{ku}{m} + g & (2b) \\ \dot{\psi} = -\frac{g\psi}{v} & (2c) \\ \dot{m} = u & (2d) \end{cases}$$

对于月球软着陆的燃耗最优控制问题,其性能指标可表示为

$$J = \int_0^{t_f} \dot{m}(t) dt = - (m(0) - m(t_f)) \quad (3)$$

对于系统(2)的软着陆过程, 能耗最优问题等价于着陆时间最优问题^[6], 性能指标为

$$J = - \int_0^{t_f} dt = - t_f \quad (4)$$

在月球重力转弯软着陆过程中, 如果存在一个推力控制程序将探测器从初始条件转移到终端条件, 并使性能指标(3)或(4)式最大, 则称这个推力程序为软着陆能耗最优或时间最优制导律.

根据 Pontryagin 极大值原理, 系统的哈密顿函数及其对 u 的偏导数为

$$H = - \lambda_h v + g \lambda_v - g \frac{\psi \lambda_\psi}{v} + \frac{\partial H}{\partial u} u - 1, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{k \lambda_v}{m} + \lambda_m \quad (5)$$

其中 $\lambda_h, \lambda_v, \lambda_\psi, \lambda_m$ 为共轭变量, 满足共轭方程

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_h = 0 & (6a) \\ \dot{\lambda}_v = \lambda_h - \frac{g \psi \lambda_\psi}{v^2} & (6b) \\ \dot{\lambda}_\psi = \frac{g \lambda_\psi}{v} & (6c) \\ \dot{\lambda}_m = \frac{k u \lambda_v}{m^2} & (6d) \end{cases}$$

使哈密顿函数(5)式达到极大的控制输入 u 就是最优控制, 可表示为

$$u(t) = \begin{cases} -\alpha, & \text{当 } \frac{k \lambda_v}{m} + \lambda_m < 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } \frac{k \lambda_v}{m} + \lambda_m > 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad t \in [0, t_f] \quad (7)$$

如果存在一个有限区间 $[t_1, t_2] \subset [0, t_f]$ 使

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{k \lambda_v}{m} + \lambda_m = 0, \quad t \in [t_1, t_2] \quad (8)$$

则最优控制 $u(t)$ 取值不能由哈密顿函数确定. 此时如果最优解存在, 则称为奇异解, (8)式称为奇异条件.

最优制导问题的性质: 1) 对于自治系统(2)的时间最优控制问题, 沿最优轨迹其哈密顿函数满足 $H(t) = 0, t \in [0, t_f]$; 2) 令 $T(t) = \lambda_\psi(t) \psi(t)$, 将其对时间求导并将(2c)和(6c)式代入, 得

$$\dot{T}(t) = \dot{\lambda}_\psi(t) \psi(t) + \lambda_\psi(t) \dot{\psi}(t) = 0, \quad t \in [0, t_f] \quad (9)$$

另外, 由于 $\psi(t_f)$ 自由, 根据横截条件有 $\lambda_\psi(t_f) = 0$, 所以 $T(t_f) = 0$. 又由(9)式可得 $T(t) = 0, t \in [0, t_f]$; 3) 根据(6a)式, λ_h 在 $[0, t_f]$ 上为常数; 4) 根据极大值原理, 系统的状态变量和共轭变量都是时间的连续可微函数. 将切换函数 $\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{k \lambda_v}{m} + \lambda_m$ 对时间求导, 利用(2), (6)式和

性质 2) 得 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = \frac{k \lambda_h}{m}, t \in [0, t_f]$.

4 软着陆最优控制中奇异条件的分析

对于月球重力转弯软着陆问题, 其最优制导律具有两个很好的性质.

定理 1. 月球重力转弯软着陆系统(2)的能耗最优制导或时间最优制导问题不存在奇异条件.

证明. 用反证法,假设存在奇异条件,则在某个闭区间 $[t_1, t_2] \subset [0, t_f]$ 内(8)式成立. 根据反证假设,并由(5)式得

$$-\lambda_h v + g\lambda_v - g\psi\lambda_\psi \frac{1}{v} - 1 = 0, \quad t \in [t_1, t_2] \quad (10)$$

将(10)式两边对时间求导,并将(2)和(6)式代入化简得 $\lambda_h \frac{ku}{m} - g \frac{\psi\lambda_\psi ku}{v^2 m} = 0, t \in [t_1, t_2]$. 根据性质 2),并考虑到 $k > 0, m > 0, t \in [0, t_f]$,得 $\lambda_h(t)u(t) = 0, t \in [t_1, t_2]$,由性质 3)必有 $\lambda_h = 0$ 或者 $\lambda_h \neq 0, u \equiv 0, t \in [t_1, t_2]$. 下面证明这两种情形均与反证假设矛盾.

情形 1. $\lambda_h \neq 0, u \equiv 0, t \in [t_1, t_2]$. 根据式(2b), (2d), (6d)及性质 2)可知 λ_v 是时间 t 的斜率非零的线性函数, m 和 λ_m 在区间 $[t_1, t_2]$ 内为常数. 这与反证假设 $\frac{k\lambda_v}{m} + \lambda_m = 0, t \in [t_1, t_2]$ 矛盾.

情形 2. $\lambda_h = 0, t \in [t_1, t_2]$. 此时由(6b)式有 λ_v 为常数, $t \in [0, t_f]$. 下面再分三种情况进行分析.

1) 若 $\lambda_v > 0, t \in [0, t_f]$. 因为 $-a \leq u \leq 0$,因此由(6d)式得 $\lambda_m(t) \leq 0, t \in [0, t_f]$. 又因为 $m(t_f)$ 不定,根据横截条件有 $\lambda_m(t_f) = 0$,因此有 $\lambda_m(t) \geq 0, t \in [0, t_f]$,此时有 $\frac{k\lambda_v}{m} + \lambda_m > 0, t \in [0, t_f]$,与反证假设矛盾. 2) 若 $\lambda_v < 0, t \in [0, t_f]$. 与 1)同理,可得 $\frac{k\lambda_v}{m} + \lambda_m < 0, t \in [0, t_f]$,与反证假设矛盾. 3) 若 $\lambda_v = 0, t \in [0, t_f]$. 根据(6d)式可得 $\lambda_m(t) = 0, t \in [0, t_f]$,又因为 $\lambda_m(t_f) = 0$,所以 $\lambda_m(t) = 0, t \in [0, t_f]$,因此有 $\frac{k\lambda_v}{m} + \lambda_m \equiv 0, t \in [0, t_f]$,此时(10)式在 $[0, t_f]$ 上成立,这与 $\lambda_h = \lambda_v = 0$ 且 $\psi\lambda_\psi = 0$ 矛盾. 证毕.

根据定理 1,重力转弯软着陆的最优制导律是一种开关(Bang-Bang)控制,只须控制发动机开关,不需要调节推力的大小.

定理 2. 对于月球重力转弯软着陆过程,其开关控制器的最优推力程序(7)最多进行一次切换.

证明. 只要证明 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 最多只在一个时间点 $t \in [0, t_f]$ 成立即可. 软着陆系统(2)在最优推力控制程序(7)的作用下,按最优轨迹降落. 由性质 3)知, λ_h 为常数. 根据性质 4),若 $\lambda_h \neq 0$,则 $\frac{\partial H}{\partial u}$ 严格单调,因而在 $[0, t_f]$ 上至多有一个零点,即至多进行一次切换;若 $\lambda_h = 0$,则 $\frac{\partial H}{\partial u}$ 在 $[0, t_f]$ 上为常数. 由定理 1, $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 不可能在任何区间 $[t_1, t_2]$ 上成立,故必有 $\frac{\partial H}{\partial u} \neq 0$,即没有切换点. 证毕.

5 软着陆最优开关制导律

对于最优推力控制程序(7),其切换函数 $\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{k\lambda_v}{m} + \lambda_m$ 中含有共轭变量,它是一个关于状态变量的隐式表达式. 为实现实时制导,需求出关于状态变量的切换函数来.

根据定理 1 和定理 2,重力转弯软着陆最优控制程序没有奇异值状态,并且在着陆过程

中最多切换一次,其工作方式有 4 种:1)全开; 2)全关; 3)先开后关; 4)先关后开. 对于方式 1)软着陆起始点即是开机点;方式 2),3)不能实现软着陆;最后一种是通常情况下的最优着陆方式,即探测器先做无制动下降,然后打开发动机软着陆到月面.

设开机时刻为 $t'_0=0$,发动机工作时间为 $t'_f=T$. 对(2a),(2b)式,在区间 $t \in [t'_0, t'_f]$ 内积分,并考虑到 $\dot{m}=u$, $h(T)=0$, $v(T)=v_f$,得

$$\begin{cases} h_0 = -k \frac{m_0}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0} T\right) - kT - \frac{1}{2}gT^2 + v_f T \\ v_0 = -k \ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0} T\right) - gT + v_f \end{cases} \quad (11)$$

将(11)式中的对数按泰勒展开,忽略 v_f ,并令 $h=h_0$, $v=v_0$,消掉 T 得到切换函数为

$$f(h, v) = v - 2a \sqrt{\frac{h}{a}} - b \frac{h}{a} \quad (12)$$

其中 $a = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{m} k - g \right)$, $b = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{m_0^2} k$, $T = \sqrt{\frac{h}{a}}$.

由切换函数(12)式可以看出,速度、位置的误差和制动发动机推力的偏差将直接影响着陆的效果. 一种方法是将终端高度从到达月面时实现软着陆设置为离月面还有几米高时实现软着陆. 另一种方法是考虑制动过程由一个主发动机和一组小推力发动机共同完成,通过调整开启的小发动机的数量,来实现变推力降落. 具体地,令切换函数为

$$f'(h, v) = h - h' - \frac{(v^2 - v'^2)}{2a'} \quad (13)$$

式中各符号的含义如图 2 所示,关机点可取为 2m, h' 可取为 20m, v' 可取为 1m/s. 为实现着陆的最优性,减速度 a' 取为

$$a' = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{k\dot{m}(t)}{m(t)} dt - g = -\frac{k}{T} \ln\left(1 - \frac{\alpha T}{m_0}\right) - g \quad (14)$$

其中 T 如(12)式中所示, m_0 为探测器的初始质量.

图 3 为最优着陆过程与其改进方法按图 2 降落的次优着陆过程的对比图. 由图中可看出,改进方法提高了着陆的安全性. 当探测器的初始质量 $m_0=350\text{kg}$,发动机 $I_{sp}=300\text{s}$ 时,改进方法比最优着陆过程多消耗燃料 2.2kg.

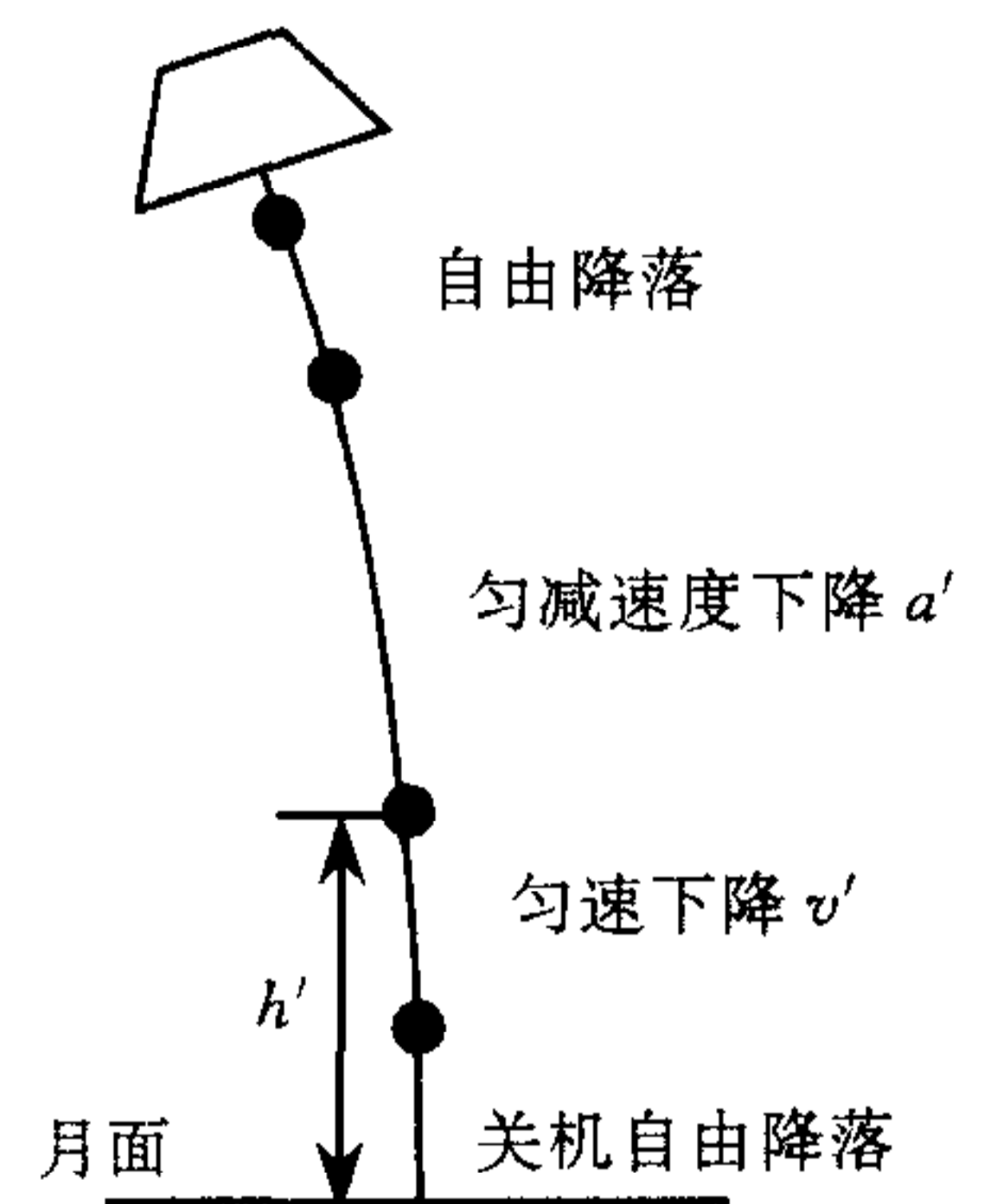


图 2 软着陆过程示意图

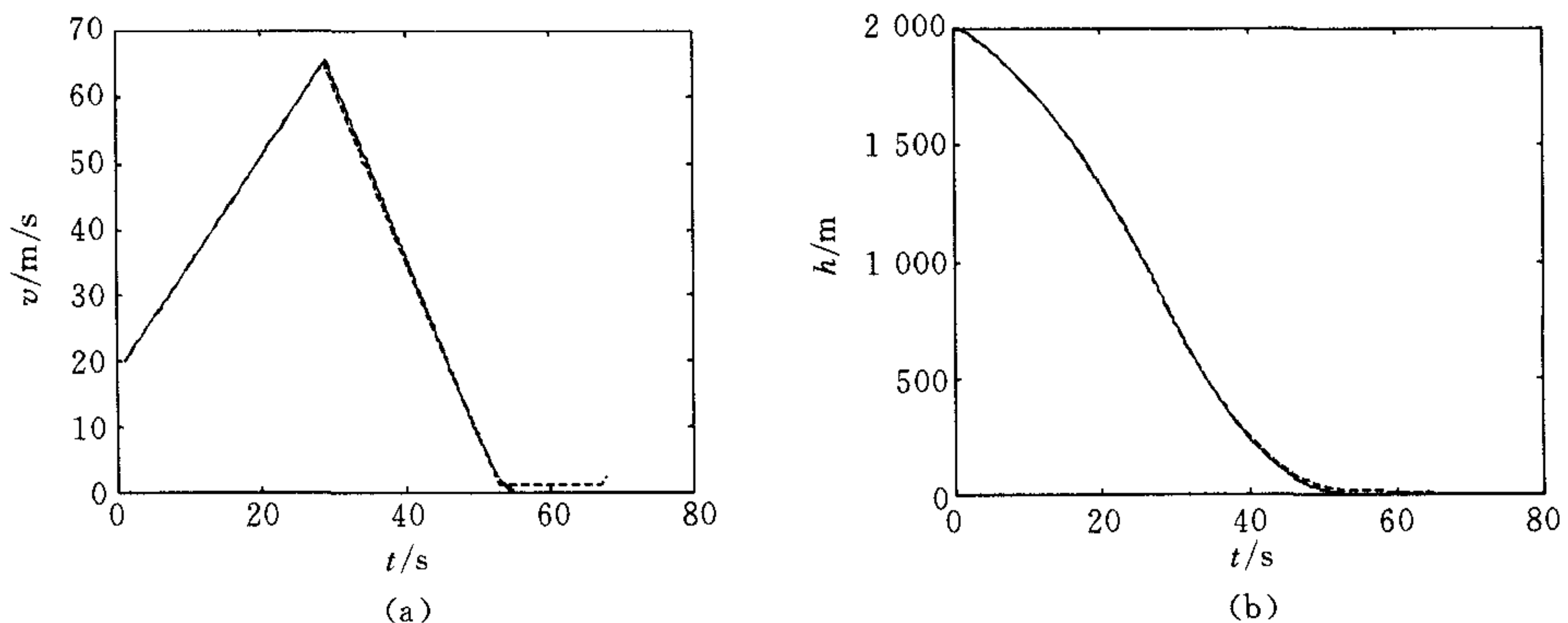


图 3 软着陆曲线(实线为最优着陆曲线,切换函数为(12)式;虚线为按图2降落的次优着陆曲线,切换函数为(13)式)

6 结束语

本文以软着陆过程的能耗最优性要求为出发点,设计了月球重力转弯软着陆最优开关制导律,证明了最优制导律中不存在奇异状态,且其在软着陆过程中至多进行一次开关切换.根据最优制导律的切换函数给出一种次优制导律,使制动过程先进行匀减速下降,然后匀速下降,保证了软着陆的安全性和最优性.这种制导律只需测量高度和速度信号,且计算量小,适于低成本的软着陆任务.

参 考 文 献

- 1 Cheng R K. Lunar terminal guidance. *Lunar Missions and Exploration*. New York: Wiley, 1964. 308~355
- 2 Citron S J, Dunin S E, Meissinger H F. A terminal guidance technique for lunar landing. *AIAA Journal*, 1964, 2(3):503~509
- 3 McInnes C R. Nonlinear transformation methods for gravity-turn descent. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1996, 19(1):247~248
- 4 Cheng R K, Meredith C M, Conrad D A. Design consideration for surveyor guidance. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1966, 3(11):1569~1576
- 5 Ingoldby R N. Guidance and control system design of the viking planetary lander. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1978, 1(3):189~196
- 6 Meditch J S. On the problem of optimal thrust programming for a lunar soft landing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1964, AC-9(4):477~484

王大轶 2000年于哈尔滨工业大学获博士学位.现在北京控制工程研究所工作.研究方向为非线性控制、最优控制和空间飞行器控制.

李铁寿 1964年毕业于北京大学数学力学系,1968在中国科学院自动化研究所研究生毕业.现为北京控制工程研究所研究员,博士生导师.研究方向为空间飞行器动力学及控制.

马兴瑞 博士,毕业于哈尔滨工业大学.现为中国航天科技集团副总经理,教授,博士生导师.研究方向为空间飞行器动力学及卫星总体设计.