



滞后离散线性定常系统的 准滑模变结构控制¹⁾

张新政¹ 邓则名¹ 高存臣²

¹(广东工业大学自动化研究所 广州 510080)

²(烟台师范学院数学与计算机科学系 烟台 264025)

(E-mail: lucy@gdut.edu.cn)

摘 要 研究了滞后离散线性定常系统的准滑模变结构控制问题,给出了滞后离散线性定常系统的准滑模,理想准滑模,非理想准滑模与准滑模带的概念;还给出了实现准滑模的条件.通过非奇异线性变换,将上述系统化成了简约型,并给出了变结构控制律的设计方案.利用 Lyapunov 函数法,证明了系统准滑模的稳定性.

关键词 滞后,离散系统,准滑模,准滑模带,变结构控制

中图分类号 TP13

QUASI-SLIDING MODE VSC FOR DISCRETE LINEAR CONSTANT SYSTEM WITH TIME DELAY¹⁾

ZHANG Xin-Zheng¹ DENG Zhe-Ming¹ GAO Cun-Chen²

¹(Guangdong University of Technology, Guangzhou 510080)

²(Mathematics and Computer Department, Yantai Normal College, Yantai 264025)

(E-mail: lucy@gdut.edu.cn)

Abstract In this paper, concepts of a linear time-invariant system are presented, including quasi-sliding mode (ideal and nonideal quasi-sliding modes) and quasi-sliding sector. Condition to realize quasi-sliding control is developed. The system mentioned above is simplified by nonsingular transform, design strategy of VSC law is given. Finally, quasi-sliding state of the system is proved stable by Lyapunov function.

Key words Time delay, discrete system, quasi-sliding mode, quasi-sliding sector, VSC(Variable Structure Control)

1) 国家自然科学基金(69874005)、广东省自然科学基金(010060)和科技计划项目(C31801)资助

收稿日期 2000-04-05 收修改稿日期 2001-12-04

1 引言

大量的动力学系统,通常为时间滞后系统,对其构成变结构控制(VSC)律时,在切换面 $S=CX=0$ 上建立滑动模态(简称滑模),并研究其稳定性.构造 VSC 器以保证状态运动在有限时间内到达并趋近切换面已有不少研究成果^[1~5].对于整个过程的全局稳定性,即最终完成 VSC 的综合也有一些漂亮的成果^[5~6].上述研究的问题皆为连续型的,随着信息处理技术计算机设计与应用技术,机器人技术的发展完善与广泛应用,对大量实际系统有必要采用数字采样与离散化,再由数字计算机进行实际控制,这就需要研究滞后离散系统的变结构控制问题,关于离散系统的 VSC 的分析与设计问题已有一些研究成果^[5~7].然而,由于滞后离散系统的复杂性,其 VSC 的分析与设计问题的研究至今只有少量工作^[1,5,6,8],可以说是刚刚起步,理论上还很不完善,Dote^[9]在 1980 年提出了“准滑动模态”的概念,但未给出严格的数学模型. Milosavijevic^[10]在 1985 年研究了状态运动在有限时间内到达准滑模. Dofe 等人在 1980 年将连续时间系统的到达条件推广到离散时间系统,但此条件不是充分的,因此, Sarpturk^[11]在 1987 年又提出了更强的到达条件,但由此条件求控制律是十分困难的,甚至是求不出来的.到了 1990 年, Furuta^[12]对标量输入离散控制系统又提出了新的到达条件是 Lyapunov 函数.但由此得到的 VSC 律都很复杂,且不易实现,推广到多输入的情形也很难.1995 年,高为炳^[13]指出了以往研究存在的不足.

本文将建立准滑模与准滑模带的概念,并建立新的到达条件,给出理想准滑模运动、趋近运动与非理想准滑模运动的差分方程,并给出 VSC 律的设计方案及准滑模的稳定性.

2 有关概念及定理

考虑单滞后单输入离散线性控制系统^[1]

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A^{(1)}\mathbf{x}(k) + A^{(2)}\mathbf{x}(k-\tau) + \mathbf{B}u(k) \\ s(\mathbf{x}(k)) = s(k) = \mathbf{C}^T\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_0, t_0 - \tau \leq k \leq t_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\tau > 0$ 为常数, $\mathbf{x}(k) \in R^n$ 为系统在 k 时刻的状态, $u(k) \in R$ 为系统在 k 时刻的控制输入, $\mathbf{x}_0 \in R^n$ 为初始状态, $A^{(1)}, A^{(2)} \in R^{n \times n}$ 为定常矩阵, $s(k)$ 为切换函数, $k=1, 2, \dots$.

2.1 准滑模与准滑模 VSC 器

我们给出准滑模的定义如下

定义 1. 定义一个包围切换面的切换带 S_H

$$S_H = \{\mathbf{x} \in R^n; -H < s(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^T\mathbf{x} < H\} \quad (2)$$

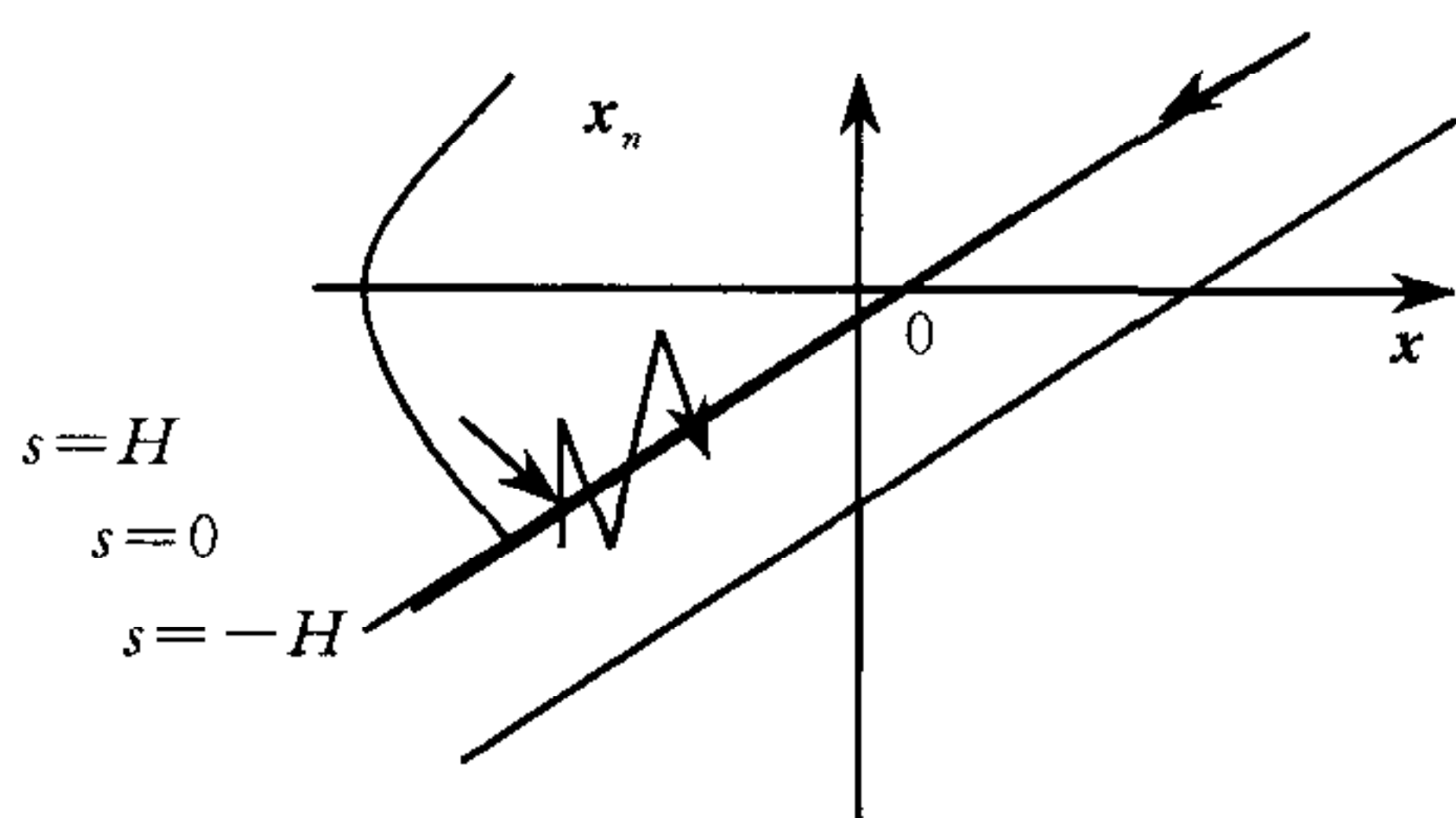


图 1 状态 $\mathbf{x}(k)$ 在边界层 S_H 的运动示意图

则从任意状态 \mathbf{x}_0 出发的滞后离散系统(1)的运动,若在有限步到达切换面 S ,然后在其上运动,称此为理想准滑模;若在有限步到达切换面 S_H ,且在其内运动,并步步穿越 S ,称此为非理想准滑模.系统(1)发生在边界层(2)内的二种准滑模,称为系统(1)在变结构控制下的准滑模, $2H$ 称为切换带 S_H 的厚度(见图 1).

定义 2. 称 $u(k)$ 是滞后离散系统(1)的一个

准滑模 VSC 器,若下列条件被满足

1)存在切换函数 $s(\mathbf{x}(k))$,使该系统(1)在切换面 $s=0$ 上的运动是渐近稳定的.

2)控制 $u(k)$ 可使系统(1)的任一解 $\mathbf{x}(k)$ 都在有限时间 K 内到达切换面 $s(\mathbf{x}(k))=0$ 的切换带 S_H 内(此称为有限能达性),即有 $|s(\mathbf{x}(k))| < H$.

3)存在某常数 μ ,使当系统(1)的解 $\mathbf{x}(k)$ 进入边界层 $S_{\mu H}$ 后,它将永远保持在切换带 $S_{\mu H}$ 内,不会离开.

上述定义的准滑模之所以称为准滑模 VSC,是由于系统的状态在时刻 K 之后的运动并非全在准滑模上,而是在准滑模的一个带形区域 $S_{\mu H}$ 上.

2.2 到达条件

为给出合理的到达条件,我们首先分析滞后离散系统的性质,然后给出其正确的到达条件

$$s(k+1) - s(k) = -\epsilon T \text{sign } s(k) - \partial T s(k), \quad \epsilon > 0, \partial > 0 \quad (3)$$

$$\partial T < 1 \quad (4)$$

其中 T 为采样周期,它是影响滞后离散系统的一个重要常数,由式(3),(4)给出的到达条件满足上述离散滞后系统的到达条件的特点要求,用离散趋近律求解 VSC $u^\pm(\mathbf{x}(k))$ 称为离散趋近律方法.

2.3 理想准滑模

理想准滑模是发生在切换面 $S(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{C}^T \mathbf{x} = 0$ 上的运动,故应满足

$$S(k+1) = S(k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

不失一般性,设 $\mathbf{C}^T \mathbf{b} \neq 0$, 此条件为变结构能控条件,由式(1)可解出等效控制为

$$u_{eq} = -(\mathbf{C}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{x}(k) - (\mathbf{C}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{x}(k - \tau) \quad (5)$$

将 u_{eq} 代入系统(1)得理想准滑模的运动方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A}^{(1)} - (\mathbf{C}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(1)}] \mathbf{x}(k) + [\mathbf{A}^{(2)} - (\mathbf{C}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(2)}] \mathbf{x}(k - \tau) \\ \mathbf{C}^T \mathbf{x}(k) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

现在用状态分解法得出式(6)变换成容易研究的标准形式(或称简约型).

作线性变换

$$\mathbf{y}(k) = T_1 \mathbf{x}(k), \quad \begin{bmatrix} y_1(k) \\ S(k) \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{C}}_1^T & \bar{\mathbf{C}}_2 \end{bmatrix}.$$

将系统(1)变换成

$$\begin{cases} y_1(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{11}^{(1)} y_1(k) + \bar{\mathbf{A}}_{12}^{(1)} s(k) + \bar{\mathbf{A}}_{11}^{(2)} y_1(k - \tau) + \bar{\mathbf{A}}_{12}^{(2)} s(k - \tau) \\ s(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{21}^{(1)} y_1(k) + \bar{\mathbf{A}}_{22}^{(1)} s(k) + \bar{\mathbf{A}}_{21}^{(2)} y_1(k - \tau) + \bar{\mathbf{A}}_{22}^{(2)} s(k - \tau) + \bar{\mathbf{C}}_2 B_2 u(k) \end{cases} \quad (7)$$

系统(7)将系统(1)的运动分为二部分,准滑模运动和趋近运动.

现在只考虑理想准滑模运动,设 $(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{b})$ 可控,则 $(\mathbf{A}_{11}^{(1)}, \mathbf{A}_{12}^{(1)}, \mathbf{A}_{11}^{(2)}, \mathbf{A}_{12}^{(2)})$ 也可控,因此有向量 $\boldsymbol{\omega}$,使 $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{11}^{(1)} - \mathbf{A}_{12}^{(1)} \boldsymbol{\omega}^T + \mathbf{A}_{11}^{(2)} - \mathbf{A}_{12}^{(2)} \boldsymbol{\omega}^T$ 的极关系 $\Lambda(\mathbf{A}_0)$ 可任意配置. 设 $\boldsymbol{\omega}$ 已取为 $\boldsymbol{\omega}^T = \bar{\mathbf{C}}_2^{-1} \bar{\mathbf{C}}_1^T$, 因 u 是标量,故在上述分析中可以确定所有向量及矩阵的维数,至此,我们已经确定了切换函数

$$s = \mathbf{C}^T \mathbf{x} = \bar{\mathbf{C}}_2 [\boldsymbol{\omega}^T, 1] T_1 \mathbf{x} \quad (8)$$

其中向量 $\boldsymbol{\omega}$ 是由理想准滑模的任意配置的极关系确定的.

2.4 非理想准滑模

现在用趋近律^[14]的方法求出 VSC $u^\pm(k)$ 来, 首先计算差分, 考虑到式(6)得

$$\begin{aligned} s(k+1) - s(k) &= \mathbf{C}^T \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{C}^T \mathbf{x}(k) = \\ &= \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{x}(k-\tau) + \mathbf{C}^T \mathbf{b} u(k) - \mathbf{C}^T \mathbf{x}(k) = \\ &= -\epsilon T \text{sign } s(k) - \alpha T s(k), \end{aligned}$$

由此可解得 VSC 为

$$u(k) = -(\mathbf{C}^T \mathbf{b})^{-1} [\mathbf{C}^T (\mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{I} + \alpha T \mathbf{I}) \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{x}(k-\tau) + \epsilon T \text{sign } \mathbf{C}^T \mathbf{x}(k)] \quad (9)$$

在滞后离散 VSC 中, 无论是趋近运动还是非理想准滑模(理想准滑模除外)都是在式(9)作用下的运动, 把式(9)代入系统(1), 得到其运动的差分方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= [(\mathbf{I} - (\mathbf{C}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b} \mathbf{C}^T) \mathbf{A}^{(1)} + (\mathbf{C}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b} \mathbf{C}^T] \mathbf{x}(k) + \\ &+ (\mathbf{I} - (\mathbf{C}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b} \mathbf{C}^T) \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{x}(k-\tau) - (\mathbf{C}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b} \alpha T \mathbf{C}^T \mathbf{x}(k) - (\mathbf{C}^T \mathbf{b})^{-1} \mathbf{b} \epsilon T \text{sign } \mathbf{C}^T \mathbf{x}(k) \quad (10) \end{aligned}$$

2.5 准滑模带

定义 3. 在系统(1)的状态空间 R^n 内的某区域里, 若在控制(9)的作用下, 从任一点出发的状态运动都为准滑模, 则称该区域为准滑模带.

定理 1. 系统(1)在控制(12)的作用下的准滑模带就是切换带 S_H (由式(2)给出), 其中 $H = \epsilon T$. (证明从略)

由定理 1 知, 系统(1)的准滑模带就是切换带, 其厚度 $2H = 2\epsilon T$, 与步长的选取无关, 也与序 $k = 1, 2, \dots$ 无关, 它与 ϵ, T 均成正比例关系, 这是刻划准滑模的重要参数关系, 它是由离散趋近律(4)得到的, 这也是离散趋近律方法的最大优点.

3 准滑模变结构控制及其稳定性

我们知道, 理想准滑模是发生在 $n-1$ 维超平面 $\mathbf{C}^T \mathbf{x} = 0$ 上的运动, 其差分方程式为(9); 而非理想准滑模是发生在 n 维状态空间 R^n 中的切换带之内的运动, 由差分方程(10)给出, 为简便起见, 假定系统(1)为简约型

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(k+1) = \mathbf{A}_{11}^{(1)} \mathbf{x}_1(k) + \mathbf{A}_{12}^{(1)} \mathbf{x}_2(k) + \mathbf{A}_{11}^{(2)} \mathbf{x}_1(k-\tau) + \mathbf{A}_{12}^{(2)} \mathbf{x}_2(k-\tau) \\ \mathbf{x}_2(k+1) = \mathbf{A}_{21}^{(1)} \mathbf{x}_1(k) + \mathbf{A}_{22}^{(1)} \mathbf{x}_2(k) + \mathbf{A}_{21}^{(2)} \mathbf{x}_1(k-\tau) + \mathbf{A}_{22}^{(2)} \mathbf{x}_2(k-\tau) + b_2 u(k) \\ s(k) = \mathbf{C}_1^T \mathbf{x}_1(k) + C_2 x_2(k) \end{cases} \quad (11)$$

此时运动方程(11)的分解方程(7)便可写成

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{11}^{(1)} \mathbf{x}_1(k) + \bar{\mathbf{A}}_{12}^{(1)} s(k) + \bar{\mathbf{A}}_{11}^{(2)} \mathbf{x}_1(k-\tau) + \bar{\mathbf{A}}_{12}^{(2)} s(k-\tau) \\ s(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{21}^{(1)} \mathbf{x}_1(k) + \bar{\mathbf{A}}_{22}^{(1)} s(k) + \bar{\mathbf{A}}_{21}^{(2)} \mathbf{x}_1(k-\tau) + \bar{\mathbf{A}}_{22}^{(2)} s(k-\tau) + C_2 b_2 u(k) \end{cases} \quad (12)$$

用新变量 $\mathbf{x}(k), s(k)$ 代替 VSC 律(9)中的 $\mathbf{x}_1(k), \mathbf{x}_2(k)$, 有

$$u(k) = -C_2^{-1} b_2^{-1} [\mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{x}(k) - s(k) + \alpha T s(k) + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{x}(k-\tau) + \epsilon T \text{sign } s(k)] \quad (13)$$

最后得到分解后的系统运动差分方程

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{11}^{(1)} \mathbf{x}_1(k) + \bar{\mathbf{A}}_{12}^{(1)} s(k) + \bar{\mathbf{A}}_{11}^{(2)} \mathbf{x}_1(k-\tau) + \bar{\mathbf{A}}_{12}^{(2)} s(k-\tau) \\ s(k+1) = (1 - \alpha T) s(k) - \epsilon T \text{sign } s(k) \end{cases} \quad (14)$$

其中 $\bar{A}_{11}^{(i)} = A_{11}^{(i)} - C_2^{-1} A_{12}^{(i)} C_1^T$ ($i=1, 2$) 是渐近稳定的, 由以上结果可见, 虽然经过了复杂的推导过程, 但趋近过程仍为趋近律的形式, 这是我们所期望的结果.

用 Lyapunov 函数法, 可以证明非理想准滑模的稳定性, 注意到非理想准滑模是发生在 S^H 之内的运动, 构造 Lyapunov 函数

$$V(k) = \mathbf{x}_1^T(k) P \mathbf{x}_1(k) + s^2(k),$$

其中 P 为待定的正定矩阵, 求 $V(k)$ 沿系统(18)的运动的差分.

最后可以证得在区域 $\Omega = S^H \cap \{R^n - N\}$ 内的差分符号

$$\begin{cases} N = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{x}_1^T P \mathbf{x}_1 \leq l\} \\ \Delta V = V(k+1) - V(k) < 0 \end{cases} \quad (15)$$

此即表明状态运动由曲线族

$$V(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1^T P \mathbf{x}_1 = C \quad (16)$$

的外部走向其内部. (证明从略)

我们对切换带的定义以及对准滑模的定义均表明, 系统的运动在 VSC 的作用下, 由切换带之外进入其内部, 而内部的运动不可能走出切换带, 这对多输入的情况也同样可以解释.

下面我们对变结构系统中的运动给以描述, 从任一状态出发的运动, 先到达 $S_{i_1}^H$, 再到达 $S_{i_1 i_2}^H$, 这样继续下去, 最后进入 S_0^H , 然后在 S_0^H 内渐近地趋于并进入原点的一个邻域 Ω . 该邻域是由 S_0^H 及 \tilde{N}_0 确定的. 此处的 $\tilde{N}_0 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_1^T P \mathbf{x}_1 \leq l\}$ 是一个以 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ 为轴的柱体, 其截面为 $\mathbf{x}_1^T P \mathbf{x}_1 = l$, 而 $\Omega_0 = S_0^H \cap \tilde{N}_0$, 它是所有准滑模的极限点集. 所有准滑模经有限步后, 变成在 Ω_0 内抖动运动, 即离散 VSC 的平稳状态, 这样, 也同时证明了在切换函数(11)之下的准滑模是稳定的,

注 1. Ω_0 的大小决定于 H , 即与采样时间 T, ϵ 成比例, 它随 T 与 ϵ 的减小而减小, 若 T 与 ϵ 趋于零, 则 Ω_0 也趋于零.

注 2. 由定理 1 知, 系统(1)的准滑模带就是切换带, 其宽度 $\alpha H = 2\epsilon T$ 与步长的选取无关, 也与步序 $k=1, 2, \dots$ 无关, 它与 ϵ, T 分别成线性关系, 这是刻划准滑模的一个重要参数, 它是由离散趋近律(3), (4)得到的. 这是离散趋近律的极大优点.

注 3. 关于滞后离散 VSC 系统的鲁棒性, 理想准滑模对系统的外部干扰及其摄动的不变性, 以及仿真例子将另文给出.

4 结论

对于单滞后单输入离散线性控制系统, 我们首次给出了理想准滑模、非理想准滑模、准滑模、准滑模 VSC 器与准滑模带的概念, 并分析了到达条件, 还给出了理想准滑模运动与趋近运动及非理想准滑模运动的差分方程. 对理想准滑模, 还确定了切换函数 $s(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{C}^T \mathbf{x}(k)$ 中的向量 \mathbf{C} , 它保证了理想准滑模的稳定性, 且有任意配置的极点集, 并且在一定的条件下, 我们还可证明如此确定的切换函数可保证非理想准滑模的稳定性.

参 考 文 献

- 1 刘永清, 高存臣, 袁付顺. 大型动力系统的理论与应用——滞后系统的变结构控制(9). 广州: 华南理工大学出版社,

- 1998, 138~145
- 2 胡跃明,周其节. 带有滞后影响的控制系统的变结构控制. 自动化学报, 1991, **17**(5): 587~591
 - 3 郑 锋,程 勉,高为炳. 时滞系统变结构控制及其实现问题. 控制理论与应用, 1994, **11**(3): 294~302
 - 4 Jafarov E M. Analysis and synthesis of multidimensional systems of variable structure with delays in sliding modes. In: Proc. 11th IFAC World Congress, Tallinn, 1990, **6**:46~49
 - 5 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法. 北京:科学出版社, 1996
 - 6 Emelyanov S V, Korovin S K, Mamedov I G. Variable-Structure Control Systems; Discrete and Digital. Mir Publishers, Inc, Florida, CRC Press, 1995. 1~167
 - 7 高存臣,王天成,刘永清. 时滞线性离散系统:准滑模变结构控制. 见:刘永清等编,微分方程理论和应用. 广州:南海出版公司, 1998. 153~158
 - 8 刘永清,温香彩. 大型动力系统的理论与应用——广义系统的变结构控制(6). 广州:华南理工大学出版社, 1997. 51~56
 - 9 Dote Y, Hoft R G. Microprocessor based sliding mode controller for d. c motor drives. IAS Annual Meeting, Cincinnati, OH, 1980
 - 10 Milosavijevic D. General conditions for the existance of a quasi-sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems. *Automatic, Remote control*, 1985, **46**(3):307~314
 - 11 Sarpturk S Z, Istefanoplos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1987, **32**(10):930~932
 - 12 Furuta K. Sliding mode control of a discrete systems. *Systems & Control Letters*, 1990, **14**(2):145~152
 - 13 高为炳,程 勉. 变结构控制系统的品质控制. 控制与决策, 1989, **4**(3):1~7
 - 14 贺元东. 数字控制系统. 北京:人民邮电出版社, 1986. 1~20

张新政 博士、教授、博士生导师、自动化所所长、广东省“千、百、十”工程省级学术骨干、系统工程学科带头人、中国人工智能学会理事、广东省系统工程学会副理事长. 目前主要侧重于研究:时滞线性、非线性控制(大)系统的结构、关联稳定镇定、鲁棒控制及算法仿真、系统工程与大系统理论及其应用、变结构控制.