第28卷 第5期 自动化学报 Vol. 28, No. 5
2002年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 2002

广义 Hamilton 实现及其在电力系统中的应用[1)]

王玉振[1] 程代展[2] 李春文[1]
[1](清华大学自动化系 北京 100084)
[2](中国科学院系统科学研究所 北京 100080)
(E-mail: yzwang@tsinghua.edu.cn)

摘 要 基于能量的 Lyapunov 函数方法在电力系统的稳定性分析中日益受到人们的重视. 应用该方法的关键问题是如何把所考虑的系统表示为 Hamilton 系统，即如何完成 Hamilton 实现. 文中首先研究一般系统的广义 Hamilton 实现问题，给出了几个充分条件；然后把所得到的结果应用到电力系统中，得到了双机系统的局部 Hamilton 耗散实现，并给出了其基于能量的 Lyapunov 函数.

关键词 广义 Hamilton 实现，双机电力系统，基于能量的 Lyapunov 函数
中图分类号 O231. 2

GENERALIZED HAMILTONIAN REALIZATION AND ITS APPLICATION TO POWER SYSTEMS

WANG Yu-Zhen[1] CHENG Dai-Zhan[2] LI Chun-Wen[1]
[1](*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing* 100084)
[2](*Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)
(E-mail: yzwang@tsinghua.edu.cn)

Abstract The energy-based Lyapunov function approach plays an important role in the stability analysis of power systems. The key problem of this approach is how to express a system as a Hamiltonian system, i. e., how to complete Hamiltonian realizations. This paper deals with Hamiltonian realizations of general nonlinear systems and gives several sufficient conditions for the realizations first. Then, as an example, a two-machine power system is investigated and a locally dissipative Hamiltonian realization is proposed.

Key words Generalized Hamiltonian realization, two-machine power system, energy-based Lyapunov functionn

1) 国家自然科学基金(G59837270, G69774008)和“973”项目(G1998020308)资助
收稿日期 2000-09-20 收修改稿日期 2001-11-21

1 引言

基于能量的 Lyapunov 函数在电力系统的稳定性分析中起着重要的作用. 近几年,有关基于能量的 Lyapunov 函数方法在电力系统中的研究取得了不少成果[1~5]. 文献[2]应用该方法对单机无穷大系统的镇定进行了研究,取得了令人满意的效果. 随后,文献[3]应用该方法对五阶模型进行了研究,也取得了可喜的结果. 我们知道,基于能量的 Lyapunov 函数选自广义 Hamilton 系统的 Hamilton 函数. 因此,在应用该方法进行镇定分析中,一个关键步骤就是如何把所研究的系统表示为一个耗散 Hamilton 受控系统,即所谓广义 Hamilton 实现问题[6]. 虽然基于能量的 Lyapunov 函数方法在单机无穷大系统的研究中取得了若干重要的成果,但该方法在多机电力系统中的研究目前尚无较好的成果. 主要困难在于,对多机电力系统难以完成广义 Hamilton 实现. 广义 Hamilton 实现是一个较新的课题,目前还没有系统的、有效的实现方法.

本文首先对广义 Hamilton 实现问题进行研究,给出几个较系统又便于应用的新结果. 然后,再把有关结果应该于双机电力系统中,完成双机系统的局部 Hamilton 耗散实现,并且给出其基于能量的 Lyapunov 函数.

2 广义 Hamilton 实现

考虑非线性动态系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in R^n \tag{1}$$

定义 1. 称系统(1)有一个广义 Hamilton 实现,如果存在一个适当的坐标卡及一个 Hamilton 函数,使得式(1)能表示为一个广义哈密顿系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = T(\boldsymbol{x}) \nabla H \tag{2}$$

若结构矩阵 $T(\boldsymbol{x})$ 可分解为 $T(\boldsymbol{x})=J(\boldsymbol{x})-R(\boldsymbol{x})$,其中 $J(\boldsymbol{x})$ 反对称, $R(\boldsymbol{x})(>0)\geqslant 0$,则称式(2)是一个(严格)耗散实现.

有关 Hamilton 实现,本文得到了如下结果.

定理 1. 考虑系统(1). 若 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}$ 可逆,则系统(1)有如下 Hamilton 实现

$$\dot{\boldsymbol{x}} = T(\boldsymbol{x}) \nabla H, \quad T(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{-\mathrm{T}}, \quad H(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i^2(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$.

证明. 直接计算可得

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \cdots + f_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}},$$

又因为$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}$可逆，所以定理成立.　　证毕.

注 1. 由式(3)给出的 $H(x)$，除在平衡点等于零外其他点都大于零. 因此 $H(x)$是平衡点附近的正定函数.

注 2. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}}$是一种结构矩阵，它的对称及反对称分解不依赖于坐标. 事实上，设 $y=\varphi(x)$是任一坐标变换，则 $\dot{y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\dot{x}$，$\nabla_x H=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\nabla_y H$. 再由定理 1 的证明可得

$$\dot{y}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\nabla_y H \tag{4}$$

因此，符合结构矩阵坐标变换的规律.

下面我们给出一个耗散实现的充分条件.

定理 2. 考虑系统(1). 若$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}+\frac{\partial f}{\partial x}$负定，则系统(1)的一个耗散实现为

$$\dot{x}=(J(x)-R(x))\nabla H \tag{5}$$

其中 $J(x)$是反对称阵，$R(x)$是负定对称矩阵，$H(x)=1/2\sum_{i=1}^{n}f_i^2$.

为证明定理 2，先证明一个引理.

引理 1. 设 $J(x)$是 $n\times n$ 反对称矩阵，$R(x)$是 $n\times n$ 的(半)正定对称矩阵. 若 $J(x)-R(x)$可逆，则$(J(x)-R(x))^{-1}$也可表示为反对称与(半)正定对称矩阵之差.

证明. 对$\forall\ 0\neq x\in R^n$，因为 $J(x)-R(x)$可逆，所以 $y:=(J(x)-R(x))^{-1}x\neq 0$. 又因为 $J(x)$反对称，$R(x)$(半)正定，所以 $y^{\mathrm{T}}(J(x)-R(x))y=-y^{\mathrm{T}}R(x)y<0(\leqslant 0)$. 把 y 代入并整理得

$$x^{\mathrm{T}}(J(x)-R(x))^{-\mathrm{T}}x<0(\leqslant 0) \tag{6}$$

把式(6)转置后再与式(6)相加得 $x^{\mathrm{T}}[(J(x)-R(x))^{-\mathrm{T}}+(J(x)-R(x))^{-1}]x<0(\leqslant 0)$. 由此可知$(J(x)-R(x))^{-\mathrm{T}}+(J(x)-R(x))^{-1}$是负(半负)定矩阵. 又因为

$$\begin{aligned}(J(x)-R(x))^{-1}=\,&1/2[(J(x)-R(x))^{-1}-(J(x)-R(x))^{-\mathrm{T}}]+\\&1/2[(J(x)-R(x))^{-1}+(J(x)-R(x))^{-\mathrm{T}}],\end{aligned}$$

上式右端第一项是反对称的，第二项是(半)负定的，所以引理成立.　　证毕.

注 3. 引理 1 中，若 $R(x)$是正定对称矩阵，则 $J(x)-R(x)$可逆. 事实上，若 $J(x)-R(x)$不可逆，则必存在 $\alpha\neq 0$ 使得$(J(x)-R(x))\alpha=0$. 由此可知 $0=\alpha^{\mathrm{T}}(J(x)-R(x))\alpha=-\alpha^{\mathrm{T}}R(x)\alpha$，这与 $R(x)$正定相矛盾. 所以，$J(x)-R(x)$可逆.

注 4. 引理 1 中，把 $R(x)$换成(半)负定对称矩阵，引理仍成立.

定理 2 的证明. 首先证明$\frac{\partial f}{\partial x}$非奇异. 事实上，$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\right]$，其中右端第一项是反对称，第二项负定，由注 3 知$\frac{\partial f}{\partial x}$可逆. 由定理 1 知

$$\dot{x}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}}\nabla H,\quad H(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}f_i^2(x) \tag{7}$$

又因为$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}-\frac{\partial f}{\partial x}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\right]$，由引理 1 知，存在反对称阵 $J(x)$和正定对称矩阵 $R(x)$使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}} = J(x) - R(x) \tag{8}$$

由式(7)及(8)知定理 2 成立. 证毕.

考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x), \quad f(\mathbf{0}) = 0, \quad x \in R^n \tag{9}$$

设系统(9)在原点附近有如下 Taylor 展开式 $\dot{x}=Ax+O(\|x\|^2)$. 由定理 2 可得如下结论.

推论 1. 若 A 的特征值实部小于零,即 $\mathrm{Re}\sigma(A)<0$,则在原点的某个邻域内系统(9)有一个耗散实现

$$\dot{x} = M(x)\nabla H \tag{10}$$

其中 Hamilton 函数 $H(x)>0(x\neq 0)$ 且 $\dot{H}(x)<0$,即 $H(x)$构成式(9)的一个 Lyapunov 函数.

证明. 考虑两个 Jordan 块

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & \lambda & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{k\times k} \text{和 } J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & \cdots & 0 \\ & \lambda & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & \lambda & \varepsilon \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{k\times k},$$

这里 ε 是任意正数. 容易验证 J_1和 J_2相似(事实上,它们具有相同的初等因子). 由 J_1,J_2相似性及 Jordan 标准形定理,不难推得在复数域内存在可逆矩阵 P,使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{pmatrix} := B,\ \text{其中 } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & \cdots & 0 \\ & \lambda_i & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_i & \varepsilon \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i\times k_i},\ \lambda_i \in \sigma(A),\ \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0,$$

$i=1,2,\cdots,t$ 且 $k_1+\cdots+k_t=n$. 在坐标变换 $y=P^{-1}x$ 下, 有

$$\dot{y} = P^{-1}APy + P^{-1}O(\|x\|^2) = By + O(\|y\|^2) := g(y) \tag{11}$$

注意到$\dfrac{\partial g(y)}{\partial y}=B+C(y)$,其中 $C(y)$是高阶部分的 Jacobi 矩阵,则

$$\frac{\partial g(y)}{\partial y} + \left(\frac{\partial g(y)}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} = (B + B^{\mathrm{T}}) + (C^{\mathrm{T}}(y) + C(y)).$$

因为 $\mathrm{Re}\sigma(B)<0$, 可取充分小的 ε,使得 $B+B^{\mathrm{T}}$是负定矩阵. 再由 $C(y)$的构成知,存在原点的某个邻域 U, 在 U 上有$\dfrac{\partial g(y)}{\partial y}+\left(\dfrac{\partial g(y)}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}<0$. 由定理 2 知,在 U 上系统(11)有一个耗散实现 $\dot{y}=T(y)\nabla H$,其中 $H(y)=1/2\sum_{i=1}^{n}g_i^2$,并且 $\dot{H}(y)=(\nabla H)^{\mathrm{T}}T(y)\nabla H<0$. 回到 x 坐标得 $\dot{x}=PT(x)P^{\mathrm{T}}\nabla_x H|_{y=P^{-1}x} := M(x)\nabla_x H(x)$, $\dot{H}(x)=(\nabla_x H)^{\mathrm{T}}M\nabla_x H=(\nabla_y H)^{\mathrm{T}}P^{-1}MP^{-T}(\nabla_y H)=(\nabla_y H)^{\mathrm{T}}T(y)(\nabla_y H)<0$. 证毕.

定理 3. 假设系统(9)的 Jacobi 矩阵奇异且有一个固定常秩($\geqslant 1$)块,那么存在一个 $n\times n$ 矩阵 $M(x)$及一个其 Jacobi 矩阵非奇异的向量场 $g(x)$,使得 $f(x)=M(x)g(x)$. 并且,系统(9)可 Hamilton 实现为

$$\dot{x} = M(x)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}} \nabla H \tag{12}$$

其中 $H(x)=1/2\sum_{i=1}^{n} g_i^2$, $g(x)=(g_1,\cdots,g_n)^{\mathrm{T}}$.

下面，给出定理 3 的证明. 证明本身将提供一个寻找 $M(x)$和 $g(x)$的算法. 为此，先给出如下引理.

引理 2[6]. 设标量函数 $h(x)(x\in R^n)$具有连续的一阶偏导数且 $h(0)=0$,则 $h(x)$可表示为 $h(x)=a_1(x)x_1+\cdots+a_n(x)x_n$，其中 $a_i(x)$是标量函数，$i=1,2,\cdots,n$.

定理 3 的证明. 不妨假设 Rank $\frac{\partial f}{\partial x}=k<n$ 且$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_k)}{\partial(x_1,\cdots,x_k)}$非奇异. 记

$$f^1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix},\quad f^2 = \begin{pmatrix} f_{k+1} \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},\quad x^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix},\quad x^2 = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

由 $f(0)=0$ 可知，$f^1(0)=0$，$f^2(0)=0$. 再由引理 2 知,存在$(n-k)\times n$ 矩阵 $A(x)$,使得

$$f^2(x) = A(x)x = A_1(x)x^1 + A_2(x)x^2 \tag{13}$$

这里 $A(x)=(A_1(x),A_2(x))$，$A_1(x)$是一个$(n-k)\times k$ 矩阵，$A_2(x)$是一个$(n-k)\times(n-k)$矩阵. 另一方面，$f^1=f^1(x^1,x^2)$，$f^1(0)=0$ 且$\frac{\partial f^1}{\partial x^1}$非奇异,由隐函数存在定理知,存在函数 φ 使得

$$x^1 = \varphi(f^1,x^2),\quad \varphi(0,0) = 0 \tag{14}$$

再由引理 2 知,存在 $k\times n$ 矩阵 $B(x)=(B_1(x),B_2(x))$使得式(14)可表示为

$$x^1 = B(x)\begin{pmatrix} f^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = B_1(x)f^1 + B_2(x)x^2,$$

代入式(13)得 $f^2=A_1(x)B_1(x)f^1+(A_1(x)B_2(x)+A_2(x))x^2$,由此可得

$$\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ A_1(x)B_1(x) & A_1(x)B_2(x)+A_2(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

令
$$M(x) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ A_1(x)B_1(x) & A_1(x)B_2(x)+A_2(x) \end{pmatrix},\quad g(x) = \begin{pmatrix} f^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

则 $f(x)=M(x)g(x)$,并且$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^{\mathrm{T}} & 0 \\ \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)^{\mathrm{T}} & I_{n-k} \end{pmatrix}$是可逆矩阵. 由定理 1 知，

$$\dot{x} = f(x) = M(x)\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-\mathrm{T}}\nabla H = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ A_1(x)B_1(x) & A_1(x)B_2(x)+A_2(x) \end{pmatrix}\times$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^{-\mathrm{T}} & 0 \\ -\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^{-\mathrm{T}} & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^{-\mathrm{T}} & 0 \\ T_1(x) & T_2(x) \end{pmatrix}\nabla H,$$

其中 $T_1(x) = A_1(x)B_1(x)\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^{-\mathrm{T}} - (A_1(x)B_2(x)+A_2(x))\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)^{-\mathrm{T}}$,

$$T_2(\boldsymbol{x}) = A_1(\boldsymbol{x})B_2(\boldsymbol{x}) + A_2(\boldsymbol{x}), \quad H(\boldsymbol{x}) = 1/2\sum_{i=1}^{k} f_i^2 + 1/2\sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 .$$ 证毕.

3 双机电力系统的 Hamilton 实现

这里应用上一节的结果把双机电力系统在平衡点附近表示为广义受控耗散哈密顿系统. 双机电力系统的模型为[8]

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = \omega_i - \omega_0 \\ \dot{\omega}_i = \dfrac{\omega_0}{H_1}(P_{mi} - P_{ei} - P_{Di}) \\ \dot{E}'_{qi} = -\dfrac{1}{T_{doi}}E_{qi} + \dfrac{1}{T_{doi}}u_{fi} \end{cases} \tag{16}$$

其中

$$\begin{cases} P_{ei} = G_{ii}E'^2_{qi} + E'_{qi}\sum_{j=1,j\neq i}^{2} B_{ij}E'_{qj}\sin(\delta_i - \delta_j) \\ E_{qi} = E'_{qi} + (x_{di} - x'_{di})(B_{ii}E'_{qi} - \sum_{j=1,j\neq i}^{2} B_{ij}E'_{qj}\cos(\delta_i - \delta_j)), \; i = 1,2 \\ P_{Di} = \dfrac{D_i}{\omega_0}(\omega_i - \omega_0), \quad B_{12} = B_{21} \end{cases} \tag{17}$$

这里 δ_i 是转子角(单位:弧度);ω_i 是转子角速度(单位:弧度/秒),$\omega_0=2\pi f_0$;E'_{qi}是 q 轴内部暂态电压(单位:p. u.),x_{di}是 d 轴绕组自感抗(单位:p. u.),x'_{di}是 d 轴绕组暂态电抗(单位:p. u.),u_{fi}是发电机励磁电压,视为控制变量(单位:p. u.),H_i是发电机的惯性常数(单位:s);D_i是阻尼常数(单位:p. u.);T_{doi}励磁电路时间常数(单位:s);P_{Di}是阻尼功率(单位:p. u.);P_{mi}是机械功率,假定为常数(单位:p. u.);P_{ei}发电机有功功率(单位:p. u.),$i=1,2$.

令

$$\begin{cases} x_1 = \delta_1,\; x_2 = \omega_1,\; x_3 = E'_{q1},\; u_1 = u_{f1} \\ x_4 = \delta_2,\; x_5 = \omega_2,\; x_6 = E'_{q2},\; u_2 = u_{f2} \end{cases} \tag{18}$$

则式(16)可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{x} \in R^6 \tag{19}$$

其中

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_2 - \omega_0 \\ \dfrac{\omega_0}{H_1}P_{m1} - \dfrac{\omega_0}{H_1}G_{11} - \dfrac{\omega_0}{H_1}B_{12}x_3x_6\sin(x_1 - x_4) - \dfrac{D_1}{H_1}(x_2 - \omega_0) \\ -\dfrac{1}{T_{do1}}x_3 - \dfrac{x_{d1} - x'_{d1}}{T_{do1}}(B_{11}x_3 - B_{12}x_6\cos(x_1 - x_4)) \\ x_5 - \omega_0 \\ \dfrac{\omega_0}{H_2}P_{m2} - \dfrac{\omega_0}{H_2}G_{22}x_6^2 - \dfrac{\omega_0}{H_2}B_{21}x_3x_6\sin(x_4 - x_1) - \dfrac{D_2}{H_2}(x_5 - \omega_0) \\ -\dfrac{1}{T_{do2}}x_6 - \dfrac{x_{d2} - x'_{d2}}{T_{do2}}(B_{22}x_6 - B_{21}x_3\cos(x_4 - x_1)) \end{pmatrix},$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{T_{do1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{T_{do2}} \end{bmatrix}, \ u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

现求式(19)的平衡点,即解方程 $f(x)=0$ 得一平衡点 $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_6^{(0)})^{\mathrm{T}}$,它满足

$$\begin{cases} \cos(x_1^{(0)} - x_4^{(0)}) = \sqrt{\Delta_1\Delta_2}/|B_{12}| \\ \sin(x_1^{(0)} - x_4^{(0)}) = (P_{m1}G_{22}\Delta_1 - P_{m2}G_{11}\Delta_2)/((P_{m1}+P_{m2})\sqrt{\Delta_1\Delta_2}) \\ x_3^{(0)} = \sqrt{(P_{m1}+P_{m2})\Delta_2/(G_{11}\Delta_2+G_{22}\Delta_1)} := c \\ x_6^{(0)} = \sqrt{(P_{m1}+P_{m2})\Delta_1/(G_{11}\Delta_2+G_{22}\Delta_1)} := d \\ x_2^{(0)} = x_5^{(0)} = \omega_0 \\ \cos^2(x_1^{(0)} - x_4^{(0)}) + \sin^2(x_1^{(0)} - x_4^{(0)}) = 1 \end{cases} \tag{20}$$

其中 $\begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{1+(x_{d1}-x'_{d1})B_{11}}{x_{d1}-x'_{d1}} \\ \Delta_2 = \dfrac{1+(x_{d2}-x'_{d2})B_{22}}{x_{d2}-x'_{d2}} \end{cases}$. 取平移变换

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \ z_2 = x_2 - \omega_0, \ z_3 = x_3 - c \\ z_4 = x_4 + \delta, \ z_5 = x_5 - \omega_0, \ z_6 = x_6 - d \end{cases} \tag{21}$$

其中 $\delta = x_1^{(0)} - x_4^{(0)}$. 在平移变换下,式(19)变为

$$\dot{z} = \bar{f}(z) + Bu, \ \bar{f}(\mathbf{0}) = 0, \ z \in R^6 \tag{22}$$

其中

$$\bar{f}(z) = \begin{bmatrix} z_2 \\ -\dfrac{2\omega_0}{H_1}cG_{11}z_3 - \dfrac{\omega_0}{H_1}G_{11}z_3^2 - \dfrac{\omega_0}{H_1}B_{12}(z_3z_6 + cz_6 + dz_3 + cd)\sin(z_1 - z_4 + \delta) + \dfrac{\omega_0}{H_1}B_{12}cd\sin\delta - \dfrac{D_1}{H_1}z_2 \\ -\dfrac{x_{d1} - x'_{d1}}{T_{do1}}(\Delta_1 z_3 - B_{12}(z_6 + d)\cos(z_1 - z_4 + \delta) + B_{21}d\cos\delta) \\ z_5 \\ -\dfrac{2\omega_0}{H_2}dG_{22}z_6 - \dfrac{\omega_0}{H_2}G_{22}z_6^2 - \dfrac{\omega_0}{H_2}B_{21}(z_3z_6 + cz_6 + dz_3 + cd)\sin(z_1 - z_4 + \delta) + \dfrac{\omega_0}{H_2}B_{21}cd\sin\delta - \dfrac{D_1}{H_2}z_5 \\ -\dfrac{x_{d2} - x'_{d2}}{T_{do2}}(\Delta_2 z_6 - B_{12}(z_3 + c)\cos(z_1 - z_4 + \delta) + B_{21}c\cos\delta) \end{bmatrix}$$

$B = g(x)$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. 式(22)可重写为

$$\dot{z} = Az + (\bar{f}(z) - Az) + Bu \tag{23}$$

其中

$$A = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\bigg|_{z=0} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega_0}{H_1}B_{12}cd\cos\delta & -\frac{D_1}{H_1} & -\frac{\omega_0}{H_1}(2cG_{11}+B_{12}d\sin\delta) & \frac{\omega_0}{H_1}cdB_{12}\cos\delta & 0 & -\frac{\omega_0}{H_1}B_{12}c\sin\delta \\ -\frac{x_{d1}-x'_{d1}}{T_{do1}}B_{21}d\sin\delta & 0 & -\frac{x_{d1}-x'_{d1}}{T_{do1}}\Delta_1 & \frac{x_{d1}-x'_{d1}}{T_{do1}}B_{12}d\sin\delta & 0 & \frac{x_{d1}-x'_{d1}}{T_{do1}}B_{12}\cos\delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\omega_0}{H_2}B_{21}cd\cos\delta & 0 & \frac{\omega_0}{H_2}B_{21}\sin\delta & -\frac{\omega_0}{H_2}B_{21}cd\cos\delta & -\frac{D_2}{H_2} & -\frac{\omega_0}{H_2}(2dG_{22}-B_{21}c\sin\delta) \\ -\frac{x_{d2}-x'_{d2}}{T_{do2}}B_{21}c\sin\delta & 0 & \frac{x_{d2}-x'_{d2}}{T_{do2}}B_{21}\cos\delta & \frac{x_{d2}-x'_{d2}}{T_{do2}}B_{21}c\sin\delta & 0 & -\frac{x_{d2}-x'_{d2}}{T_{do2}}\Delta_2 \end{pmatrix}.$$

不难验证(A,B)是完全可控对，取控制$\boldsymbol{u}=-Kz+\boldsymbol{v}$($K$为$2\times 6$的常值矩阵)使得

$$\sigma(A-BK)=\{-\lambda_1,-\lambda_2,-\lambda_3,-\lambda_4,-\lambda_5,-\lambda_6\},$$

其中$\lambda_i>0$且互不相同，$i=1,2,\cdots,6$. 把上控制代入(23)得

$$\dot{z}=A_1 z+(\bar{f}(z)-Az)+B\boldsymbol{v} \tag{24}$$

其中$A_1=A-BK$. 由于A_1的特征值互异，于是存在可逆矩阵T,使得

$$TA_1T^{-1}=\begin{pmatrix} -\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda_6 \end{pmatrix} := A_2.$$

系统(24)在坐标变换$\boldsymbol{y}=Tz$下变为

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\psi(\boldsymbol{y})+B_1\boldsymbol{v} \tag{25}$$

其中

$$\psi(\boldsymbol{y})=A_2\boldsymbol{y}+T(\bar{f}(T^{-1}\boldsymbol{y})-AT^{-1}\boldsymbol{y})=T\bar{f}(T^{-1}\boldsymbol{y})-TBKT^{-1}\boldsymbol{y},$$

$$T(\bar{f}(T^{-1}\boldsymbol{y})-AT^{-1}\boldsymbol{y})=O(\|\boldsymbol{y}\|^2),\ B_1=TB.$$

由$A_2+A_2^{\mathrm{T}}$的负定性，知$\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{y}}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{y}}\right)^{\mathrm{T}}$在原点附近是负定的. 由定理2可知，在原点附近式(25)可耗散实现为$\dot{\boldsymbol{y}}=M(\boldsymbol{y})\nabla H+B_1\boldsymbol{v}$,其中$M(\boldsymbol{y})=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{y}}\right)^{-\mathrm{T}}$, $H(\boldsymbol{y})=1/2\psi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y})>0$且$\dot{H}<0$,即$H(\boldsymbol{y})$是式(25)的一个Lyapunov函数(当$\boldsymbol{v}=0$时). 回到$z$坐标，在原点附近有

$$\dot{z}=T^{-1}T^{-\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\bar{f}(z)}{\partial z}-BK\right)^{-\mathrm{T}}\nabla_z H(z)+B\boldsymbol{v} \tag{26}$$

这里

$$H(z)=1/2(T\bar{f}(z)-TBKz)^{\mathrm{T}}(T\bar{f}(z)-TBKz)>0 \tag{27}$$

且$\dot{H}<0$.

式(26),(27)是双机系统式(16),(17)的局部Hamilton耗散实现，式(27)构成它的基于能量的Lyapunov函数.

4 结束语

本文首先研究了一般非线性系统的广义Hamilton实现问题，给出了几个实现的充分条

件. 然后又研究了多机电力系统的 Hamilton 实现问题,得到了双机系统的局部耗散 Hamilton 实现,给出了其基于能量的 Lyapunov 函数. 为简单起见,本文仅对双机系统完成了 Hamilton 实现. 实事上,本文的理论和方法也适用于一般多机电力系统.

参 考 文 献

1 Escobar G, van der Schaft A J, Ortega R. A Hamiltonian viewpoint in the modeling of switching power converters. *Automatica*, 1999, **35**(3):445～452

2 Cheng D, Xi Z, Hong Y, Qin H. Energy-based stabilization of forced Hamiltonian systems with its application to power systems. In: Proc 14th IFAC World Congress, Vol. O, Beijing, China, 1999. 297～303

3 Wang Y, Cheng D, Hong Y. Stabilization of synchroous generators with Hamiltonian function approach. *Int. J. of Systems Science*, 2001, **32**(8): 971～978

4 Maschke M J, Ortega R, van der Schaft A J. Energy-based lyapunov functions for forced Hamiltonian systems with dissipation. In: Proc the 37th IEEE Conference on Decision and Control, New YorK: IEEE, 1998. 3599～3604

5 Maschke B, Ortega R, Van der Schaft A, Escobar G. An energy-based derivation of Lyapunov functions for forced systems with applications to stabilizing control. In: Proc the 14th IFAC World Congress, Vol. E, Beijing: 1999. 409～415

6 王玉振. 哈密顿实现理论及其在电力系统中的应用[博士学位论文]. 北京: 中国科学院数学与系统科学研究院,2001

7 Cheng D, Xi Z, Lu Q, Mei S. Geometric structure of generalized controlled Hamiltonian systems and its application. *Science in China*, Series E, 2000, **43**(4):365～379

8 Lu Q, Sun Y *et al*. Decontrallized nonlinear optimal excitation control. *IEEE Trans. Power Systems*, 1996, **11**(4): 1957～1962

王玉振　2001 年 7 月毕业于中科院数学与系统科学研究院,获博士学位. 现为清华大学博士后. 主要研究领域为非线性控制、Hamilton 系统理论.

程代展　1985 年毕业于 Washington University,获博士学位. 现为中国科学院系统所研究员、博士生导师. 主要研究兴趣为非线性控制与数值方法.

李春文　清华大学自动化系教授,博士生导师. 主要研究兴趣为非线性控制及逆系统方法.