

非线性系统的鲁棒自适应模糊控制¹⁾

丁 刚 张曾科 韩曾晋

(清华大学自动化系 北京 100084)

(E-mail: g-ding@263.net)

摘 要 针对反馈线性化后的不确定非线性对象,提出了一种鲁棒自适应控制方法.采用模糊模型逼近不确定项,用逐步后推技术构造出自适应律,在线调节模糊模型的参数,同时处理存在估计误差时的干扰抑制问题.该方法还用于感应电动机速度控制的仿真.用李亚普诺夫方法证明了整个系统的稳定性和鲁棒性.该方法适用于任意有界时变干扰,通过模糊模型还可以加入对干扰的经验知识.

关键词 非线性控制,鲁棒自适应控制,自适应模糊模型,Lyapunov方法,感应电动机

中图分类号 TP273

ROBUST ADAPTIVE FUZZY CONTROL OF NONLINEAR SYSTEMS

DING Gang ZHANG Zeng-Ke HAN Zeng-Jin

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

(E-mail: g-ding@263.net)

Abstract Based on the feedback linearized model, a robust adaptive control method is presented. Fuzzy model is employed to approximate uncertainties. The adaptive law of parameters in fuzzy model is constructed, and the influence of inherent approximation error is attenuated as well. The proposed method is applied to the simulation of speed control of induction motor. The stability and robustness of the entire system is proved by Lyapunov method. The proposed method is applied to arbitrary time-varying and bounded disturbances. Human knowledge of disturbances can be used by fuzzy model.

Key words Nonlinear control, robust adaptive control, adaptive fuzzy model, Lyapunov method, induction motor

1 前言

不确定非线性系统的控制问题是日前控制理论界的一个研究热点.文献[1]运用微分几何方法研究一类可反馈线性化对象的逐步后推自适应控制,这是日前最系统的一种自适应

1) 清华大学博士生基金和教育部“二一一”工程基金资助

收稿日期 1999-06-21 收修改稿日期 2000-02-28

方法. 但该方法只考虑线性形式的定常未知参数, 从而限制了使用范围. 针对非参数不确定性, 鲁棒非线性控制近年来也取得了一定进展. 鲁棒控制通常只要求干扰的上界友知, 但结果往往较保守, 因此进一步挖掘干扰的结构, 并结合自适应方法的实时调整能力, 有可能提高鲁棒控制的效果. 另外, 近年来以模糊控制为代表的智能控制方法在应用中取得了很大成功, 它的主要特点是不需要对象模型, 而利用专家的模糊知识表达完成控制任务, 其不足是缺乏系统的理论分析和指导. 文献[2]运用自适应模糊方法讨论了非线性模糊系统的稳定性等问题, 并证明了模糊模型可作为一种万能逼近器以任意精度逼近连续非线性函数, 从而拓宽了模糊模型的应用范围.

本文研究如下不确定非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + p(x, w), \quad y = h(x) \quad (1)$$

的一种鲁棒自适应控制方法, 其中 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 为状态 $x \in R^n$ 的光滑向量场, $p(x, w)$ 为包含有界干扰 w 的未知光滑函数. 在一定的微分几何条件下, 上述对象可线性化为带干扰的线性部分和不可观测的稳定非线性部分. 本文将运用自适应模糊模型逼近干扰项, 然后用逐步后推法递推出需要的控制量. Lyapunov 方法被用来构造模糊模型参数的自适应律, 并保证整个系统的稳定性和鲁棒性. 最后将该方法用于感应电动机模型的速度控制.

2 问题描述

2.1 非线性系统的反馈线性化

根据文献[1], 设对象(1)满足以下假设:

(A1) 存在相对阶 $r (1 \leq r \leq n)$, 使得对 $\forall x \in R^n$,

$$L_g L_f^i h(x) = 0, \quad 0 \leq i \leq r - 2, \quad L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad (2)$$

其中 $L_f^0 h \triangleq h$, $L_f^1 h \triangleq \frac{\partial h}{\partial x} f$, 以此类推;

(A2) 向量场 $\tilde{g}, ad_{\tilde{f}} \tilde{g}, \dots, ad_{\tilde{f}}^{r-1} \tilde{g}$ 完备, 其中 $ad_{\tilde{f}} \tilde{g} \triangleq \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} \tilde{g}$, $\tilde{f} = f - \frac{g}{L_g L_f^{r-1} h} L_f^r h$,

$$\tilde{g} = \frac{g}{L_g L_f^{r-1} h};$$

(A3) $d(L_p L_f^i h) \in \text{span}\{dh, d(L_f h), \dots, d(L_f^i h)\}$, $0 \leq i \leq r - 1$, $\forall x \in R^n$.

在上述假设下, 存在全局微分同胚坐标变换

$$z_1 = h(x), \quad z_2 = L_f h, \quad \dots, \quad z_r = L_f^{r-1} h, \quad z_j = T_j(x), \quad r + 1 \leq j \leq n \quad (3)$$

而且 $T_j(x)$ 满足 $d(T_j(x)) \cdot ad_{\tilde{f}}^i \tilde{g} = 0$, $0 \leq i \leq r - 1$.

定义 $z_0 = [z_{r+1}, \dots, z_n]^T$, 在 z -坐标下, 对象(1)被线性化为如下三角型^[1]:

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + \phi_i(z_1, \dots, z_i, w), \quad 1 \leq i \leq r - 1 \quad (4a)$$

$$\dot{z}_r = L_f^r h + L_g L_f^{r-1} h \cdot u + \phi_r(z, w) \quad (4b)$$

$$\dot{z}_0 = \phi_0(z) + \phi_1(z, w) \quad (4c)$$

$$y = z_1 \quad (4d)$$

在新坐标下, 系统包含 r 维线性部分式(4a), (4b)和 $n-r$ 维不可观测的非线性部分式(4c). 线性部分式(4a), (4b)中还包含干扰项 $\phi_i = L_p L_f^{i-1} h(x) (1 \leq i \leq r)$, 它们是由未知干扰

项 p 产生的.

对于非线性部分式(4c),有如下假设:

(A4) 对于输入 z_1, \dots, z_r 和 w, z_0 的动态方程(4c)满足输入有界-状态有界(BIBS)条件. 另外,对于待跟踪的参考轨迹有如下假设:

(A5) 参考信号 y_r 及其前 r 阶导数已知且有界.

2.2 自适应模糊模型

一个模糊系统包括模糊发生器、模糊规则库、模糊推理机制和模糊消除器. 设多输入-单输出模糊规则为 $R^{(j)}$: 如果 $x_1 = A_1^j, x_2 = A_2^j, \dots, x_n = A_n^j$, 则 $y_j = C^j$, 其中 x_i, y_j 分别为输入和输出模糊语言变量, A_i^j, C^j 分别为对应的模糊语言值, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, M$ (M 为规则数). 根据文献[2],当采用单值模糊发生器、乘积推理和中心平均模糊消除器时,上述模糊模型的输出可表示为

$$y = \sum_{j=1}^M \bar{y}_j \cdot \xi_j(x) \triangleq \theta^T \xi(x) \quad (5)$$

其中 $\xi_j(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)}{\sum_{j=1}^M \left(\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i) \right)}$ 称为模糊基函数, A_i^j 的隶属度函数为 $\mu_{A_i^j}(x) = \exp\left(-\left(\frac{x - \bar{x}_i}{\sigma_i}\right)^2\right)$,

\bar{y}_j 是使 C^j 的隶属度函数取最大值的点. 根据文献[2],该模糊模型可作为一种逼近器,并以任意精度逼近连续函数. 采用模糊逼近器,一方面是利用它的任意逼近能力,另一方面是它可以系统有效地利用语言信息,这一点是其它逼近器无法做到的.

3 鲁棒自适应模糊控制方法

根据 2.2 小节,模糊模型(5)可用于任意连续函数的逼近,现有的自适应模糊控制方法^[2,3]都是用它来估计对象模型或控制器,而且要求实际输出的前 r 阶导数可测,这在应用中是不现实的. 本文方法则是根据对象已知标称模型和可测状态来计算控制量,而模糊模型被用来估计未知干扰项.

用模糊模型 $\theta_i^T \xi_i(z_1, \dots, z_i)$ 估计干扰 ϕ_i , 模型输入为可测状态 z_1, \dots, z_i , θ_i 为可调参数向量,并限制其取值范围为 Ω_i (为讨论方便,假设 Ω_i 是半径为 r_{Ω_i} 的闭球). 由于有界干扰 w 的存在,估计值与真实值之间可能有偏差,因此首先定义使估计误差最小的最优参数值为

$$\theta_i^* = \arg \min_{\theta_i \in \Omega_i} \left[\sup_{z_1, \dots, z_i, w} \left| \theta_i^T \xi_i(z_1, \dots, z_i) - \phi_i(z_1, \dots, z_i, w) \right| \right], \quad 1 \leq i \leq r-1 \quad (6a)$$

$$\theta_r^* = \arg \min_{\theta_r \in \Omega_r} \left[\sup_{z, w} \left| \theta_r^T \xi_r(z) - \phi_r(z, w) \right| \right] \quad (6b)$$

进而定义最小估计误差为

$$d_i = \phi_i(z_1, \dots, z_i, w) - \theta_i^{*T} \xi_i(z_1, \dots, z_i), \quad 1 \leq i \leq r-1,$$

$$d_r = \phi_r(z, w) - \theta_r^{*T} \xi_r(z),$$

则式(4)可重新表示为

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + \theta_i^{*T} \xi_i(z_1, \dots, z_i) + d_i, \quad 1 \leq i \leq r-1 \quad (7a)$$

$$\dot{z}_r = L_f h + L_g L_f^{-1} h \cdot u + \theta_r^{*T} \xi_r(z) + d_r \quad (7b)$$

$$\dot{z}_0 = \phi_0(z) + \phi_1(z, w) \tag{7c}$$

$$y = z_1 \tag{7d}$$

根据文献[2],只要选择的模糊模型足够复杂(即向量 θ_i 中的可调参数或模糊规则足够多),最小估计误差 d_i 就会足够小. 另外,可以利用专家的经验知识预先确定估计模型的初始参数,从而提高后面参数调节的速度. 但是文献[2]并没有给出一般的参数调节方法,因此本文后面的控制律中应该既包含参数 θ_i 的在线调节方法,又要考虑有界估计误差向量 $\underline{d} = [d_1, \dots, d_r]^T$ 对系统性能的影响. 最终目标是保证整个系统稳定,并在外扰存在时保证系统输出以给定精度跟踪参考轨迹. 为此,给出如下干扰抑制指标

(P) 给定指标 $\gamma > 0$,当初始状态为零时,对 $\forall T > 0$

$$\int_0^T \|y(t) - y_r(t)\|^2 dt < \gamma \int_0^T \|\underline{d}\|^2 dt \tag{8}$$

下面采用递推方法,一步步构造出需要的控制量 u .

第 1 步. 令 $e_1 = z_1 - y_r$, 则 $\dot{e}_1 = z_2 + \theta_1^{*T} \xi_1(z_1) + d_1 - \dot{y}_r$. 如果将上式中的 z_2 视为控制量, 则取 $z_2 = z_2^* \triangleq -\lambda_1 e_1 - \theta_{1.1}^T \xi_1(z_1) + \dot{y}_r - \frac{1}{4} k e_1$, 其中 $-\frac{1}{4} k e_1$ 用来处理干扰 d_1 , $\theta_{1.1}$ 为 θ_1^* 的一个估计值,后面将给出统一的自适应律.

第 2 步. 由于实际的 z_2 并非上一步假定的虚拟量 z_2^* , 我们定义 $e_2 = z_2 - z_2^*$, 求得

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 = & z_3 + \theta_1^{*T} \xi_1(z_1) \left(\lambda_1 + \frac{1}{4} + \theta_{1.1}^T \frac{\partial \xi_1}{\partial z_1} \right) + \theta_2^{*T} \xi_2(z_1, z_2) + d_1 \left(\lambda_1 + \frac{1}{4} + \theta_{1.1}^T \frac{\partial \xi_1}{\partial z_1} \right) + \\ & d_2 + \left[\left(\lambda_1 + \frac{1}{4} \right) (z_2 - \dot{y}_r) + \dot{\theta}_{1.1}^T \xi_1 - \ddot{y}_r + \theta_{1.1}^T \frac{\partial \xi_1}{\partial z_1} z_2 \right] \triangleq \\ & z_3 + \theta_1^{*T} \phi_{1.2} + \theta_2^{*T} \phi_{2.2} + d_1 \rho_{1.2} + d_2 \rho_{2.2} + \psi_2(e_1, e_2, \theta_{1.1}, y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r). \end{aligned}$$

同理选择虚拟控制量

$$z_3^* \triangleq -\lambda_2 e_2 - \theta_{1.2}^T \phi_{1.2} - \theta_{2.2}^T \phi_{2.2} - \frac{1}{4} k e_2 (\rho_{1.2}^2 + \rho_{2.2}^2) - \psi_2,$$

其中 $\theta_{1.2}, \theta_{2.2}$ 分别为 θ_1^*, θ_2^* 的估计值.

第 i 步 ($2 \leq i \leq r-1$). 定义

$$e_i = z_i - z_i^* \tag{9}$$

求得

$$\dot{e}_i \triangleq z_{i+1} + \sum_{j=1}^i (\theta_j^{*T} \phi_{j,i} + d_j \rho_{j,i}) + \psi_i \tag{10}$$

其中 $\phi_{j,i}, \rho_{j,i}$ 和 ψ_i 为 $e_1, \dots, e_i, \theta_{1.1}, \dots, \theta_{1,i}, \dots, \theta_{i,i}, y_r, \dots, y_r^{(i)}$ 的函数. 选择虚拟控制量

$$z_{i+1}^* \triangleq -\lambda e_i - \sum_{j=1}^i \left(\theta_{j,i}^T \phi_{j,i} + \frac{1}{4} k e_i \rho_{j,i}^2 \right) - \psi_i \tag{11}$$

其中 $\theta_{j,i}$ 为 θ_j^* 的第 i 个估计值,为了保证 $\theta_{j,i} \in \Omega_j$, 其自适应律中应加入投影算法,同时为了保证其可微性,选择如下光滑投影自适应算法^[3] ($\tilde{\theta}_{j,i} \triangleq \theta_{j,i} - \theta_j^*$)

$$\dot{\theta}_{j,i} = \text{proj}_j(e_i \phi_{j,i}, \theta_{j,i}) = \begin{cases} e_i \phi_{j,i}, & p(\theta_{j,i}) \leq 0 \text{ 或 } p(\theta_{j,i}) > 0, \langle \text{grad } p(\theta_{j,i}), e_i \phi_{j,i} \rangle \leq 0 \\ e_i \phi_{j,i} - \frac{p(\theta_{j,i}) \text{grad } p(\theta_{j,i})^T \text{grad } p(\theta_{j,i})}{\|\text{grad } p(\theta_{j,i})\|^2} e_i \phi_{j,i}, & \text{其它} \end{cases} \tag{12}$$

其中 $p(\theta_{j,i}) = \frac{\|\theta_{j,i}\|^2 - r_{\Omega_j}^2}{\epsilon^2 + 2\epsilon r_{\Omega_j}}$. 根据文献[4], 当 $\theta_{j,i}(0) \in \Omega_j$ 时,

$$\|\theta_{j,i}(t)\| \leq r_{\Omega_j} + \epsilon \tag{13}$$

$$\tilde{\theta}_{j,i}^T \text{proj}(e_i \phi_{j,i}, \theta_{j,i}) \leq \tilde{\theta}_{j,i}^T e_i \phi_{j,i} \tag{14}$$

第 r 步. 定义 $e_r = z_r - z_r^*$, 求得 $\dot{e}_r \triangleq L_f h + L_g L_f^{-1} h \cdot u + \sum_{j=1}^r (\theta_j^{*T} \phi_{j,r} + d_j \rho_{j,r}) + \psi_r$, 其中 $\phi_{j,r}, \rho_{j,r}$ 和 ψ_r 是 $e_1, \dots, e_r, z_0, \theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,r}, \dots, \theta_{r,r}, y_r, \dots, y_r^{(r)}$ 的函数. 得到实际控制律为

$$u = -\frac{1}{L_g L_f^{-1} h} \left(L_f h + \lambda_r e_r + \sum_{j=1}^r \left(\theta_{j,r}^T \phi_{j,r} + \frac{1}{4} k e_r \rho_{j,r}^2 \right) + \psi_r \right) \tag{15}$$

其中 $\theta_{j,r}$ 的自适应律同式(12).

定理. 在假设(A1)~(A5)下, 对象式(1)经坐标变换式(3)后, 采用递推算法(9)~(11)、自适应律(12)和控制律(15), 则闭环系统稳定, 且满足干扰抑制指标(P). 证明见附录.

该定理的结论不仅仅适用于模糊逼近器, 只要选用类似于式(5)形式的逼近器, 比如用神经网络逼近器, 定理证明过程同样适用. 甚至当不使用任何函数逼近, 上述结论仍成立, 此时该方法退化为鲁棒干扰抑制控制.

推论. 如果估计误差 $\underline{d} \in L_2$ (L_2 代表平方可积信号集合), 则系统输出 y 渐近跟踪参考轨迹 y_r . 证明见附录.

4 举例

为了验证本文算法, 将其用于感应电动机非线性控制问题^[5]. 限于篇幅, 直接给出反馈线性化后解耦的速度子系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - \frac{1}{J} p_1 \\ \dot{z}_2 = v + \frac{R_m}{J^2} p_1 - \zeta \left(\frac{R_m}{J} z_1 + z_2 + \frac{T_{LN}}{J} \right) p_2 \\ y = z_1 \end{cases} \tag{16}$$

其中输出 y 为转速, $p_1 = R_r - R_{rN}$, $p_2 = T_L - T_{LN}$ 分别为转子电阻和负载转矩实际值与标称值的误差, 为不确定扰动. 首先用模糊模型估计误差项, 将式(16)重新表示为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \theta_1^{*T} \xi_1 + d_1 \\ \dot{z}_2 = v + \theta_2^{*T} \xi_2(z_1, z_2) + d_2 \\ y = z_1 \end{cases} \tag{17}$$

由于 ξ_1 与状态无关, 可直接取 $\xi_1 = -\frac{1}{J}$. 对于 $\xi_2(z_1, z_2)$, 选择 z_1 的五个隶属度函数:

$$\begin{aligned} \mu_{z_1^1}(\mathbf{x}) &= \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{x}}{15}\right)^2\right), \mu_{z_1^2}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{x}-30}{15}\right)^2\right), \mu_{z_1^3}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{x}-60}{15}\right)^2\right), \mu_{z_1^4}(\mathbf{x}) = \\ & \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{x}-90}{15}\right)^2\right), \mu_{z_1^5}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{x}-120}{15}\right)^2\right) \text{ 和 } z_2 \text{ 的五个隶属度函数: } \mu_{z_2^1}(\mathbf{x}) = \\ & \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{x}+100}{25}\right)^2\right), \mu_{z_2^2}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{x}+50}{25}\right)^2\right), \mu_{z_2^3}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\left(\frac{\mathbf{x}}{25}\right)^2\right), \mu_{z_2^4}(\mathbf{x}) = \end{aligned}$$

$\exp\left(-\left(\frac{x-50}{25}\right)^2\right)$, $\mu_{z_2^5}(x) = \exp\left(-\left(\frac{x-100}{25}\right)^2\right)$. 依照上一节方法求得

$$e_1 = z_1 - y_r, \quad e_2 = -\lambda_1 e_1 + z_2 + \theta_{1.1} \xi_1 + \frac{1}{4} k e_1 - \dot{y}_r,$$

$$v = -\lambda_2 e_2 - \theta_{1.2} \xi_1 \left(\lambda_1 + \frac{1}{4} k\right) - \theta_{2.2}^T \xi_2(z_1, z_2) - \frac{1}{4} k e_2 \left(1 + \left(\lambda_1 + \frac{1}{4} k\right)^2\right) + \left(\lambda_1 + \frac{1}{4} k\right) (z_2 - \dot{y}_r) + \alpha_1 \text{proj}(e_1 \xi_1, \theta_{1.1}) \xi_1 - \ddot{y}_r,$$

$$\dot{\theta}_{1.1} = \alpha_1 \text{proj}(e_1 \xi_1, \theta_{1.1}), \quad \dot{\theta}_{1.2} = \alpha_2 \text{proj}\left(e_2 \xi_1 \left(\lambda_1 + \frac{1}{4} k\right), \theta_{1.2}\right), \quad \dot{\theta}_{2.2} = \alpha_3 \text{proj}(e_2 \xi_2, \theta_{2.2}).$$

仿真对象参数及参考轨迹见文献[5], 未知参数在 $0.2T_{LN} \leq T_L \leq 0.8T_{LN}$, $0.5R_{rN} \leq R_r \leq 1.5R_{rN}$ 范围内随机变化. 选择 $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 30$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 10$, $\alpha_3 = 1000$, $k = 10$. 图 1 为转速参考轨迹和实际输出结果, 二者几乎完全重合.

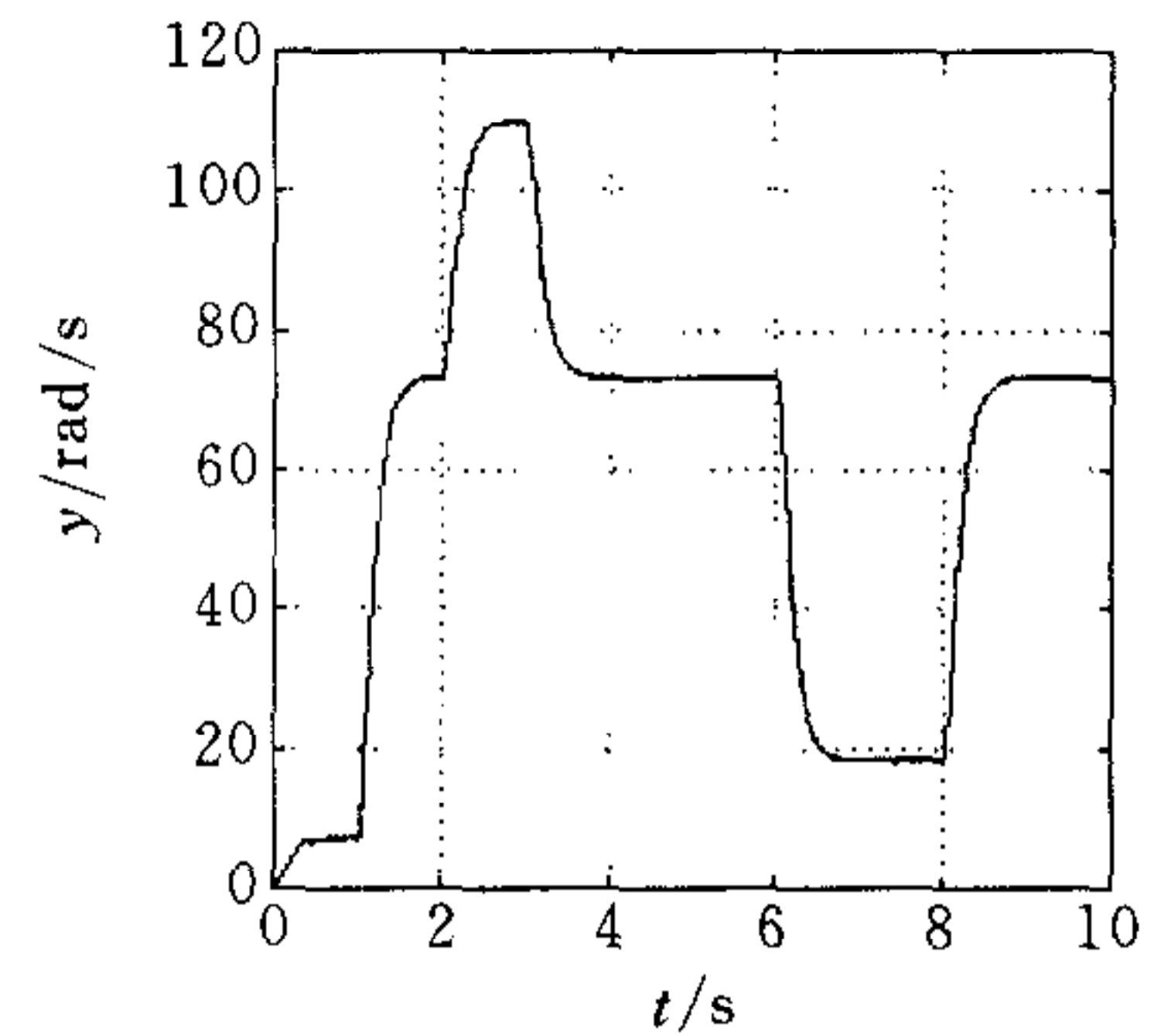


图 1 转速跟踪结果

5 结论

针对一类可反馈线性化的不确定非线性对象, 本文提出一种鲁棒自适应控制方法. 与已有的自适应方法比较, 该方法适用于任意有界时变干扰, 提高了自适应方法的鲁棒性. 另外, 由于采用模糊模型逼近不确定项, 可以自然地融入人工知识, 提高估计精度和速度. 为了处理不匹配干扰, 该方法采用逐步递推形式得到控制量, 系统稳定性和鲁棒性由 Lyapunov 方法保证.

参 考 文 献

- 1 Kanellakopoulos I, Kokotović P V, Morse A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1991, **36**(9):1241~1253
- 2 Wang L X. *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*. NJ: Prentice Hall, 1994
- 3 Fischle K, Schroder D. An improved stable adaptive fuzzy control method. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 1999, **7**(1): 27~40
- 4 Marino R, Tomei P. Robust adaptive state-feedback tracking for nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**(1):84~89
- 5 Romeo Ortega, Greg Asher, Eduardo Mendes. Control of induction motors: a benchmark problem for nonlinear control. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, 2000, **14**(2):79~81
- 6 Narendra K S, Annaswamy A M. *Stable Adaptive Systems*. NJ: Prentice-Hall, 1989

附 录

1) 定理证明.

根据文中递推算法, 得到 e_1, \dots, e_r 的动态方程如下:

$$\dot{e}_1 = -\lambda_1 e_1 + e_2 - \tilde{\theta}_{1.1}^T \phi_{1.1} + d_1 - \frac{1}{4} k e_1 \quad (\text{A1a})$$

$$\dot{e}_i = -\lambda_i e_i + e_{i+1} - \sum_{j=1}^i \tilde{\theta}_{j,i}^T \phi_{j,i} + \sum_{j=1}^i \left(d_j \phi_{j,i} - \frac{1}{4} k e_i \rho_{j,i}^2 \right), \quad 2 \leq i \leq r-1 \quad (\text{A1b})$$

$$\dot{e}_r = -\lambda_r e_r - \sum_{j=1}^r \tilde{\theta}_{j,r}^T \phi_{j,r} + \sum_{j=1}^r \left(d_j \phi_{j,r} - \frac{1}{4} k e_r \rho_{j,r}^2 \right) \quad (\text{A1c})$$

设一个候选 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r e_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i \tilde{\theta}_{j,i}^T \tilde{\theta}_{j,i} \quad (\text{A2})$$

沿式(A1)求导并配方得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i^2 + \sum_{i=1}^{r-1} e_i e_{i+1} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i \tilde{\theta}_{j,i}^T (\text{proj}(e_i \phi_{j,i}, \theta_{j,i}) - e_i \phi_{j,i}) - \\ & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i \left(\left(\frac{1}{2} \sqrt{k} e_i \rho_{j,i} - \frac{1}{\sqrt{k}} d_j \right)^2 - \frac{1}{k} d_j^2 \right). \end{aligned}$$

由式(14)得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\sum_{i=1}^r (\lambda_i - 1) e_i^2 - \sum_{i=1}^{r-1} \left(\frac{1}{2} e_i^2 - e_i e_{i+1} + \frac{1}{2} e_{i+1}^2 \right) - \frac{1}{2} e_1^2 - \frac{1}{2} e_r^2 + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i d_j^2 \leq \\ & -\sum_{i=1}^r (\lambda_i - 1) e_i^2 + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^r (r-j+1) d_j^2 \quad (\text{A3}) \end{aligned}$$

取参数满足 $\lambda_i > 1$, $\bar{\lambda} = \min_i (\lambda_i - 1)$ ($i=1, \dots, r$), $k \geq \frac{r}{\bar{\lambda} \gamma}$, 则 $\dot{V} \leq -2\bar{\lambda} V + \bar{\lambda} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^i \tilde{\theta}_{j,i}^T \tilde{\theta}_{j,i} + \frac{r}{k} \sum_{j=1}^r d_j^2$. 因为

$d_j \in L_\infty$ (L_∞ 代表所有有界信号集合), 又由式(13)和(6)可知 $\tilde{\theta}_{j,i} \in L_\infty$, 因此 $V \in L_\infty$, 则由式(A2)知 $e_1, \dots, e_r \in L_\infty$, 又由假设(A5)和式(11), (9)知 $z_1, \dots, z_r \in L_\infty$, 则由假设(A4)知 $z_0 \in L_\infty$. 最后, 因为坐标变换(3)为全局微分同胚, 原对象(1)的状态亦有界, 即闭环系统稳定.

对式(A3)两边从 $t=0$ 至 $t=T$ 积分得

$$\int_0^T e_1^2 dt \leq \int_0^T \sum_{i=1}^r e_i^2 dt \leq \frac{r}{k\bar{\lambda}} \int_0^T \sum_{j=1}^r d_j^2 dt + \frac{1}{\bar{\lambda}} (V(0) - V(T)) \leq \gamma \int_0^T \sum_{j=1}^r d_j^2 dt \quad (\text{A4})$$

即干扰抑制指标式(8)成立.

证毕.

2) 推论证明.

如果 $d \in L_2$, 根据式(A4), 令 $T \rightarrow \infty$, 易知 $e_1 \in L_2$, 前面分析已知 $e_1 \in L_\infty$, 又据式(A1)可知 $\dot{e}_1 \in L_\infty$, 则根据 barbalat 定理(见文献[6])得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} |e_1(t)| = 0$, 即跟踪误差渐近趋于零. 证毕.

丁 刚 1995 年和 1997 年分别获得清华大学自动化系学士和硕士学位. 研究方向为智能控制、自适应控制、鲁棒控制和运动控制系统等.

张曾科 清华大学自动化系教授、博士生导师. 研究方向为模糊控制、计算机系统及应用和工业自动化系统等.

韩曾晋 清华大学自动化系教授、博士生导师. 研究方向为自适应控制、神经网络控制、离散事件动态系统和交流驱动系统运动控制等.