第 28 卷 第 4 期
2002 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 4
July, 2002

短文

广义系统具有完整性的鲁棒二次稳定[1)]

陈跃鹏 张庆灵 姚 波
(东北大学理学院 沈阳 110006)

摘 要 考虑带有 Frobenius 范数界的不确定广义系统，具有完整性的鲁棒二次稳定问题. 用 Riccati 不等式给出不确定广义系统在状态反馈和输出反馈作用下所构成的闭环系统二次稳定，并且当执行器出现故障时，不确定广义系统仍能保持二次稳定的充分条件，即不确定广义系统具有完整性的鲁棒二次稳定的充分条件.

关键词 完整性，二次稳定，不确定广义系统，执行器
中图分类号 TP13

ROBUST QUADRATIC STABILIZATION WITH INTEGRITY FOR DESCRIPTOR SYSTEMS

CHEN Yue-Peng ZHANG Qing-Ling YAO Bo
(*College of Science, Northeastern University, Shenyang* 110006)

Abstract In this paper, robust quadratic stabilization owning integrity is explored for an uncertain descriptor system with Frobenius-norm bound. By algebraic Riccati inequality, sufficient conditions for quadratic stabilization of the uncertain descriptor system are given by means of state feedback and output feedback. Meanwhile, the feedback control is designed so as to keep the resultant closed-loop system to be quadratically stable when the system actuator is fault, i. e., the system possesses integrity.

Key words Integrity, quadratic stabilization, uncertain descriptor system, actuator

1 引言

系统的完整性控制器设计是指设计鲁棒控制器，使得系统在正常和出现故障两种情况下，该控制器都能使系统保持二次稳定或其它的良好性能. 目前，人们对正常系统完整性控制器设计做了研究并取得一定进展[1,2]，但对于广义系统完整性控制器设计的研究还很

1) 教育部骨干教师基金及辽宁省教委基金(991121118)资助
收稿日期 2000-04-20 收修改稿日期 2001-10-15

少[3]. 本文将设计鲁棒控制器使带有不确定项的广义闭环系统二次稳定并具有完整性. 这里的不确定项 Δ 用 Frobenius 范数按 $\|\Delta\|_F=(\mathrm{Trace}\Delta^{\mathrm{T}}\Delta)^{1/2}$形式定义. 并有如下假设

假设 1. 矩阵

$$\Delta=\begin{bmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1s}\\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Delta_{r1} & \Delta_{r2} & \cdots & \Delta_{rs}\end{bmatrix},$$

满足$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_{ij}\|^2\leqslant 1$. 如果令

$$\Delta_N:=\begin{bmatrix}\|\Delta_{11}\| & \|\Delta_{12}\| & \cdots & \|\Delta_{1s}\|\\ \|\Delta_{21}\| & \|\Delta_{22}\| & \cdots & \|\Delta_{2s}\|\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \|\Delta_{r1}\| & \|\Delta_{r2}\| & \cdots & \|\Delta_{rs}\|\end{bmatrix},$$

则$\|\Delta\|_F=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\|\Delta_{ij}\|^2\leqslant 1$.

本文限于篇幅,某些证明从略.

2 问题的引入

考虑如下不确定广义系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}=(A+\Delta A)\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x} \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{x}\in R^n$, $\boldsymbol{u}\in R^m$, $\boldsymbol{y}\in R^l$ 分别是系统的状态、输入和输出;ΔA 是不确定项,矩阵 E,A,B,C 是具有适当维数的常阵.

定义 1. 称系统(1)二次稳定,如果 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 时,存在矩阵 $P\in R^{n\times n}$和常数 $\alpha>0$,使得对任何允许的扰动 ΔA, Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$ 都满足

$$L(\boldsymbol{x}):=\dot{V}\leqslant-\alpha\|\boldsymbol{x}\|^2,\quad E^{\mathrm{T}}P=P^{\mathrm{T}}E\geqslant 0 \tag{2}$$

由定义 1 可知, 如果系统 (1) 二次稳定, 则该系统必定正则,渐近稳定而且没有脉冲,即该系统是容许的. 系统 (1) 中的不确定结构为 $\Delta A=D\Delta F$,其中矩阵 D,F 是已知常阵, 并有如下形式

$$D=[D_1D_2\cdots D_r],\quad F=[F_1^{\mathrm{T}}F_2^{\mathrm{T}}\cdots F_s^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

不确定项 Δ 满足假设 1.

3 具有完整性的鲁棒二次稳定控制器

引理 1[4]. 系统(1)容许并且 $\|G\|_\infty<\gamma$ 的充要条件是存在矩阵 $X\in R^{n\times n}$满足

$$A^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}A+C^{\mathrm{T}}C+\gamma^{-2}X^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}X<0,\ E^{\mathrm{T}}X=X^{\mathrm{T}}E\geqslant 0,$$

这里 $G=C(sE-A)^{-1}B$, $\gamma>0$ 预先给定.

引理 2[5]. 对于具有适当维数的向量 $\boldsymbol{x}$,有

$$\max_{\|\Delta\|\leqslant\alpha}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PD\Delta F\boldsymbol{x})=\alpha(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PDD^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}F\boldsymbol{x})^{1/2},$$

这里 $\alpha>0$ 为给定常数.

引理 3[6]. 对于满足假设 1 中的 Δ_{ij}，式(3)中的 $D_i,F_j(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$以及任意具有适当维数的向量 $\boldsymbol{x}$，有

$$\max_{\|\Delta_N\|_F\leqslant 1}\left\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}D_i\Delta_{ij}F_j\boldsymbol{x}\right\}=\Omega$$

成立,这里的 $\Omega=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{r}P^{\mathrm{T}}D_iD_i^{\mathrm{T}}P\right)\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{j=1}^{s}F_j^{\mathrm{T}}F_j\right)\boldsymbol{x}\right]^{1/2}$.

引理 4[5]. 若对任意给定的具有适当维数矩阵 $X\geqslant0$，$Y<0$,$Z\geqslant0$ 以及非零向量 $\xi\in R^n$，有$(\xi^{\mathrm{T}}Y\xi)^2-4(\xi^{\mathrm{T}}X\xi\xi^{\mathrm{T}}Z\xi)>0$，则存在常数 $\lambda>0$ 使得

$$\lambda^2X+\lambda Y+Z<0.$$

定理 1. 在假设 1 下，系统(1)二次稳定的充要条件是该系统容许并且

$$\|F(sE-A)^{-1}D\|_\infty<1.$$

证明. 必要性. 若系统(1)二次稳定，则存在矩阵 P 和常数 $\alpha>0$ 使得式(2)成立. 这样对于任意的 $\boldsymbol{x}\neq0$ 有

$$L(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[(A+D\Delta F)^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}(A+D\Delta F)]\boldsymbol{x}<0,$$

即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{x}+2\max_{\|\Delta_N\|_F\leqslant1}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}D_i\Delta_{ij}F_j\boldsymbol{x}\right)<0.$$

由引理 3 得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{x}<-2\Omega\leqslant0.$$

从而有

$$[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{x}]^2>4\Omega^2.$$

由引理 4 可知存在常数 $\lambda>0$ 使

$$\lambda^2\left(\sum_{i=1}^{r}P^{\mathrm{T}}D_iD_i^{\mathrm{T}}P\right)+\lambda(A^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}A)+\left(\sum_{j=1}^{s}F_j^{\mathrm{T}}F_j\right)<0.$$

令 $V=\lambda P$，则

$$V^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{r}D_iD_i^{\mathrm{T}}\right)V+A^{\mathrm{T}}V+V^{\mathrm{T}}A+\left(\sum_{j=1}^{s}F_j^{\mathrm{T}}F_j\right)<0,$$

即

$$A^{\mathrm{T}}V+V^{\mathrm{T}}A+V^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}V+F^{\mathrm{T}}F<0.$$

这样由引理 1(取 $\gamma=1$)，系统(1)容许且 $\|F(sE-A)^{-1}D\|_\infty<1$.

充分性. 若系统(1)容许且 $\|F(sE-A)^{-1}D\|_\infty<1$，则根据引理 1 存在矩阵 P 使得

$$-Q:=A^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}A+P^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}P+F^{\mathrm{T}}F<0\tag{4}$$

同时满足式(2)中的广义限制条件. 又

$$L(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\{A^{\mathrm{T}}P+P^{\mathrm{T}}A+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(P^{\mathrm{T}}D_i\Delta_{ij}F_j+F_j^{\mathrm{T}}\Delta_{ij}^{\mathrm{T}}D_j^{\mathrm{T}}P)\}\boldsymbol{x},$$

根据引理 2 有

$$\max_{\|\Delta_{ij}\| \leqslant \alpha_{ij}} \{x^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} D_i \Delta_{ij} F_j x\} = \alpha_{ij} (x^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} D_i D_i^{\mathrm{T}} P x x^{\mathrm{T}} F_j^{\mathrm{T}} F_j x)^{1/2}.$$

由引理 3 得到

$$L(x) \leqslant x^{\mathrm{T}}\{A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A\}x + 2\Omega \leqslant$$
$$x^{\mathrm{T}}\{A^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}A + P^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}P + F^{\mathrm{T}}F\}x = -x^{\mathrm{T}}Qx \leqslant -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2,$$

这里 $\lambda_{\min}(\cdot)$表示“·”的最小特征值，显然有 $\lambda_{\min}(Q)>0$. 所以系统(1)二次稳定. 证毕.

定理 1 表明系统(1)的小增益条件与其二次稳定是等价的. 于是在此定理基础上可以研究系统(1)的二次能稳定及其完整性问题.

假设系统(1)中执行器出现了故障，为了表示这种故障，引入切换阵 $L_k=\mathrm{diag}[l_{k1}, l_{k2}, \cdots, l_{km}]$，当 $l_{ki}=1$ 时，表示第 k 个故障状态中第 i 个执行器正常；当 $l_{ki}=0$ 时，表示第 k 个故障状态中第 i 个执行器出现故障. 显然，具有 m 个执行器的系统(1)最多有 2^m-1 个执行器故障状态.

对于状态反馈作用下的闭环系统，当处于第 k 个故障状态时，实际进入被控对象的输入是

$$u = L_k K x \tag{5}$$

这里 K 为具有适当维数的反馈矩阵. 相应的闭环系统为

$$E\dot{x} = (A + \Delta A)x + BL_k Kx \tag{6}$$

假设在第 k 个故障状态中出现故障的执行器和正常的执行器序号分别是 $i_1, i_2, \cdots, i_q; j_1, j_2, \cdots, j_{m-q}$并满足 $R(b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_{(m-q)}}) \subset R(b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_q})$. 这里 $R(\cdot)$表示矩阵“·”的象空间，b_i 表示矩阵 B 的第 i 列. 则存在矩阵 $S=S_{q\times(m-q)}$使得$(b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_{(m-q)}}) = (b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_q})S$.

定理 2. 在假设 1 下，若存在矩阵 P 满足代数 Riccati 不等式

$$Q + P^{\mathrm{T}}B_k SS^{\mathrm{T}}B_k^{\mathrm{T}}P > 0 \tag{7}$$

及式(2)中广义限制条件. 这里，$B_k := (b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_q})$，矩阵 Q 满足式(4). 则存在状态反馈

$$u = -\frac{1}{2}B^{\mathrm{T}}Px \tag{8}$$

使系统(1)二次能稳定. 如果该系统的执行器出现故障，对于第 k 个故障状态来说，此状态反馈仍能使该闭环系统二次稳定，即此状态反馈对该闭环系统的二次稳定具有完整性.

下面讨论系统(1)在输出反馈作用下的二次能稳定及当该系统的执行器出现故障时所具有的完整性. 假设 G_i 表示在 $\mathrm{Im}\, C^{\mathrm{T}}$ 的正交投影，则 $G_i=C^+C$ 这里 C^+表示 Moore-Penrose 逆.

定理 3. 在假设 1 下，若存在矩阵 P 使 Riccati 不等式

$$-Q + P^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}P + G_i^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}PG_i < 0,$$

及式(2)中广义限制条件成立，则系统(1)在输出反馈

$$u = Ky, \quad K = -B^{\mathrm{T}}PC^+$$

作用下二次能稳定. 并且此输出反馈对该闭环系统的二次稳定具有完整性.

参 考 文 献

1 Shimemura E, Fujita M A. Design method for linear state feedback systems possessing integrity based on a solution of a Riccati-type equation. *Int. J. Control*, 1985, **42**(4):881～889

2 葛建华,孙优贤. 容错控制系统的分析与综合. 杭州:浙江大学出版社,1994

3 Chen Y P, Zhang Q L, Liu W Q. Fault-tolerant control about integrity for descriptor systems. In: Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney Australia: IEEE Press, 2000. 1359～1360

4 Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A *et al.* H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach. *Automatica*, 1997, **33**(4): 669～673

5 Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems and Control Letters*, 1987, **8**: 351～357

6 Joon Haw Lee *et al.* Quadratic stability and stabilization of linear systems with Frobenius norm-bounded uncertainties. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 1996, **41**(3):453～456

陈跃鹏 2001年于东北大学获理学硕士学位. 主要研究方向为广义系统的容错控制、大系统的分散控制等.

张庆灵 教授、博士生导师、东北大学理学院院长. 主要研究方向为广义系统的最优控制、生物控制和容错控制等.

姚 波 沈阳师范学院副教授、东北大学博士研究生. 主要研究方向为广义系统的容错控制等.