



单饱和输入下二阶控制系统零解 全局渐近稳定的充分条件¹⁾

郭树理 黄琳

(北京大学力学与工程科学系系统与控制研究中心 北京 100871)

(E-mail: guoshl@post.pim.tsinghua.edu.cn)

摘要 分析了单饱和输入下控制系统的相空间分布规律并给出了具体的饱和输入下非线性控制系统的空间结构. 通过给出的空间结构与饱和输入下非线性控制系统的关系定义了不同于一般意义下的非线性系统的平衡点, 并且对新平衡点进行了分类. 在此基础上, 给出了二阶单饱和输入下控制系统零解全局渐近稳定的充分条件, 同时也给出了二阶单饱和输入下控制系统闭合轨迹存在与否的判别条件.

关键词 饱和系统, 闭合轨迹, 渐近稳定, 真实平衡点, 伪平衡点

中图分类号 O137

SUFFICIENT CONDITIONS ABOUT GLOBALLY ASYMPTOTICAL STABILITY OF THE ORIGIN OF SECOND-ORDER CONTROL SYSTEM WITH SATURATED INPUT

GUO Shu-Li HUANG Lin

(Center for Systems and Control, Mechanics and Engineering Science Department,
Peking University, Beijing 100871)

(E-mail: guoshl@post.pim.tsinghua.edu.cn)

Abstract The phase space of control systems with saturated input is analyzed and the space structure of control systems with saturated input is presented. Equilibrium points different from Lyapunov-type ones are defined and classified. Sufficient conditions are presented for globally asymptotical stability (GAS) of origin of 2nd-order control systems with saturated input. The existence of closed trajectory for 2nd-order control system with single input is also considered.

Keywords Saturated system, closed trajectory, asymptotically stable, true equilibria, false equilibria

1) 国家攀登计划和国家重点基础研究专项经费(G1998020302)资助

收稿日期 2000-12-05 收修改稿日期 2001-05-10

1 引言

有关线性系统在有界控制下达到全局渐近稳定的结论已被大量的研究,甚至将结论推广到非线性系统及时滞系统(见文献[1~5]).但大量的工作仅局限在原点稳定或渐近稳定研究,或将稳定性的研究转化为利用凸集来处理饱和系统(见文献[1~5]).而对饱和输入下可控系统的平衡点及解轨迹变化方面的研究甚少.本文分析了单输入二阶单饱和系统的原点全局渐近稳定的充分条件以及对二阶单饱和输入闭合轨迹的存在与否进行了研究,并给出了闭合轨迹存在与否的充分条件.

2 主要内容

考虑如下连续控制系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y = C^T\mathbf{x}(t) \\ u_s = \text{sat}(-K\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^2$ 是状态变量, $y \in R$ 是输出变量, $u_s \in R$ 是控制输入变量, A, B, C, K 是具有相应维数的常数矩阵,且假设整个系统是最小的.输入 u_s 以下列方式表现

$$\text{sat}(-K\mathbf{x}) = \begin{cases} u_{\text{lim}}, & \text{当 } -K\mathbf{x} \geq u_{\text{lim}} \\ -K\mathbf{x}, & \text{当 } |K\mathbf{x}| < u_{\text{lim}} \\ -u_{\text{lim}}, & \text{当 } -K\mathbf{x} \leq -u_{\text{lim}} \end{cases} \quad (2)$$

u_{lim} 是反馈系统中控制的界, $|u_s| \leq u_{\text{lim}}$. 按照饱和现象的物理意义及几何意义,可将 SISO (Single Input Single Output) 系统(1)转化为如下的系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (A - \lambda BK)\mathbf{x}(t) + \lambda^* Bu_{\text{lim}} \\ y = C^T\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

若 $A - \lambda BK$ 可逆时,则容易得到对应平衡点为

$$\mathbf{x}_{eq,(\lambda, \lambda^*)} = -\lambda^* (A - \lambda BK)^{-1} Bu_{\text{lim}} \quad (4)$$

而 λ 与 λ^* 的取值给出空间区域的划分

$$\begin{cases} (\lambda, \lambda^*) = (0, 1) \leftrightarrow D_{0,1} =: \{\mathbf{x} \mid -K\mathbf{x} \geq u_{\text{lim}}\} \\ (\lambda, \lambda^*) = (0, -1) \leftrightarrow D_{0,-1} =: \{\mathbf{x} \mid -K\mathbf{x} \leq -u_{\text{lim}}\} \\ (\lambda, \lambda^*) = (1, 0) \leftrightarrow D_{1,0} =: \{\mathbf{x} \mid | -K\mathbf{x} | < u_{\text{lim}}\} \end{cases} \quad (5)$$

为方便起见,给出如下定义.

定义 1. 1) 对于系统(1)和(2),若 $\mathbf{x}_{eq,\lambda,\lambda^*} \in D_{\lambda,\lambda^*}$,则称 $\mathbf{x}_{eq,\lambda,\lambda^*}$ 为系统(1)的真平衡点;若矩阵 $(A - \lambda BK)$ 是稳定(不稳定)的,则称 $\mathbf{x}_{eq,\lambda,\lambda^*}$ 为系统(1)的真稳定(不稳定)的平衡点.

2) 对于系统(1)和(2),若 $\mathbf{x}_{eq,\lambda,\lambda^*} \in \overline{D_{\lambda,\lambda^*}}$,则称 $\mathbf{x}_{eq,\lambda,\lambda^*}$ 为系统(1)的伪平衡点;若矩阵 $(A - \lambda BK)$ 是稳定(不稳定)的,则称 $\mathbf{x}_{eq,\lambda,\lambda^*}$ 为系统(1)的伪稳定(不稳定)的平衡点.

下面给出 $n=2, m=1$ 时, SISO 饱和系统(1)的 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 全局渐近稳定的充分条件.

定理 1. 在 $n=2, m=1$ 时, SISO 饱和系统(1)中, 若

- A) 除 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 为真稳定平衡点外, 其余均为伪稳定平衡点;
- B) 在整个空间中不存在任何闭合轨线, 则 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是全局渐近稳定的.

证明. 因为 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 是真稳定平衡点, 则可知矩阵 $A-BK$ 稳定, 依据 Lyapunov 基本定理, 必存在 $P^T=P>0$, 使得 $(A-BK)^T P + P(A-BK) < 0$.

令 $S = \{\mathbf{x} | \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq d\}$, 使 $S \subset D_{I,0}$ 的最大的 d 对应的集 S , 称为最大椭圆不变集, 记为 $S_{I,0} =: \{\mathbf{x} | \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq d_{\max}\}$, 且假设 $S_{I,0}$ 与直线 $-K\mathbf{x} = u_{\lim}$ 和 $-K\mathbf{x} = -u_{\lim}$ 的切点分别为 $\mathbf{p}_{0,I}$, $\mathbf{p}_{0,-I}$. 设 $\mathbf{x}_0 \in D_{0,I}$, $\mathbf{x}_{eq,(0,-I)}$, $\mathbf{x}_{eq,(0,I)}$ 均为伪平衡点.

作如下轨迹(见图 1)

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{A(t-T_0)} \left[\mathbf{x}_0 + \int_{T_0}^t e^{A(T_0-s)} B \Lambda^* u_{\lim} ds \right] = e^{A(t-T_0)} \mathbf{x}_0 + (e^{A(t-T_0)} - I) A^{-1} B u_{\lim} \quad (6)$$

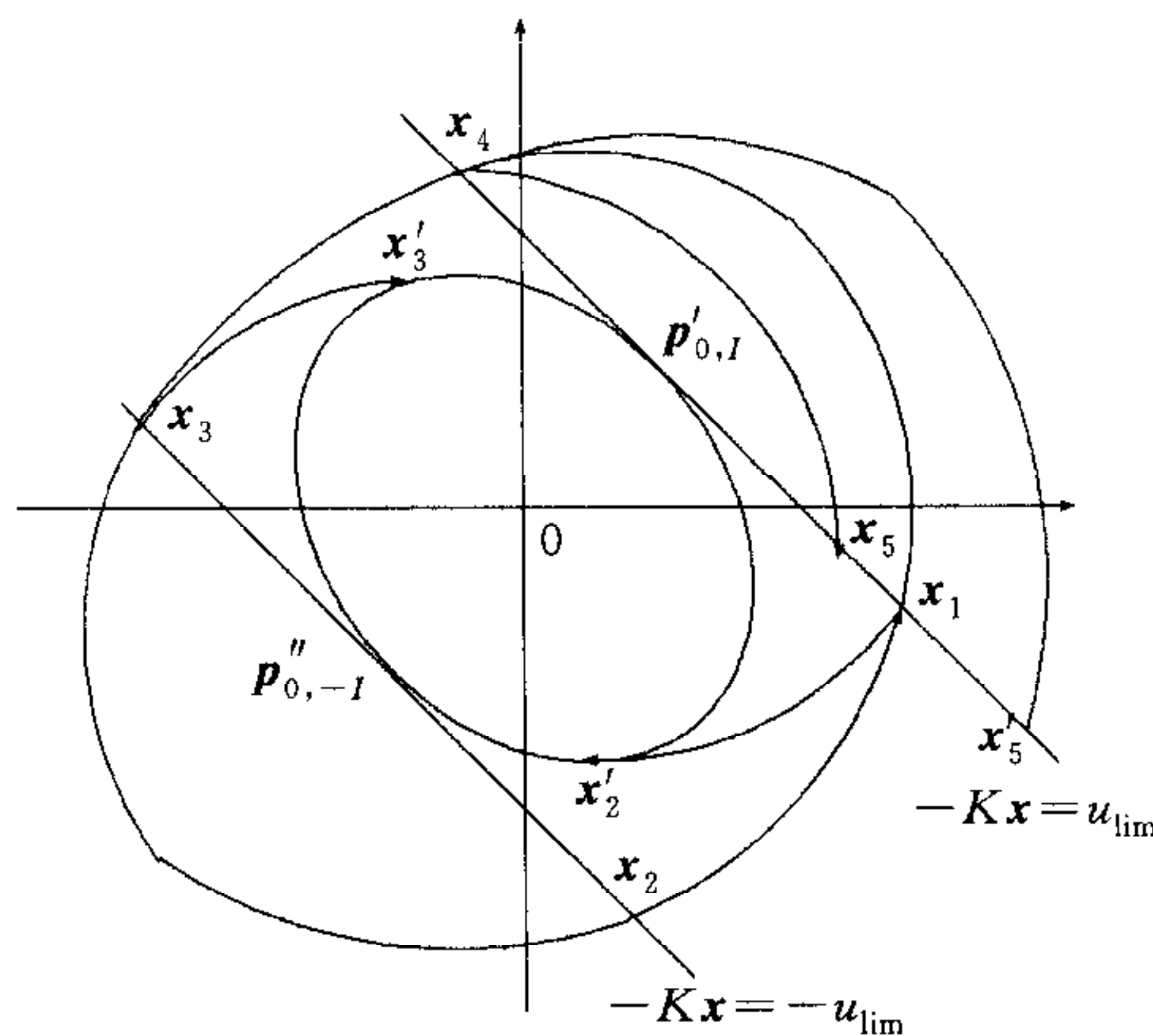


图 1 二阶单饱和控制系统的运动轨迹

因为 $D_{0,I}$ 的平衡点为伪稳定平衡点, 故在时刻 T_1 , 使得 $-K\mathbf{x}_1(T_1) = u_{\lim}$. 在区域 $D_{I,0}$ 内, 以 $\mathbf{x}_1(T_1)$ 为初值, 其运动轨迹为 $\mathbf{x}_2(t) = e^{(A-BK)(t-T_1)} \mathbf{x}_1(T_1)$. 若存在 T'_2 , 使得 $\mathbf{x}_2(T'_2) \in \partial S_{(I,0)}$. 否则, 存在时刻 T_2 , 使得 $-K\mathbf{x}_1(T_2) = -u_{\lim}$. 同理, 由于区域 $D_{(0,-I)}$ 内仅有伪稳定平衡点, 故必有 T_3 , 使得

$$\begin{cases} \mathbf{x}_3(T_3) = e^{A(T_3-T_2)} \left[\mathbf{x}_2(T_2) - \int_{T_2}^{T_3} e^{A(T_3-s)} A^{-1} B u_{\lim} ds \right] \\ K\mathbf{x}_3(T_3) = -u_{\lim} \end{cases} \quad (7)$$

而区域 $D_{I,0}$ 内仅有真稳定平衡点, 故若有 T'_3 , 使得 $\mathbf{x}_4(T'_3) = e^{(A-BK)(t-T_3)} \mathbf{x}_{T_3} \in \partial S_{I,0}$.

此时可以得到如下的结论

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad (8)$$

否则, 点 \mathbf{x}_k 将进入区域 $D_{0,I}$ 内, 以 $\mathbf{x}_4(T_4)$ 为初值的轨迹有三种可能性:

- a) $\mathbf{x}(t, t_4, \mathbf{x}_4)$ 与 $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ 在 $D_{I,0}$ 内重合;
- b) $\mathbf{x}(t, t_4, \mathbf{x}_4)$ 与 $-K\mathbf{x} = u_{\lim}$ 的交点在 \mathbf{x}_1 的内侧;
- c) $\mathbf{x}(t, t_4, \mathbf{x}_4)$ 与 $-K\mathbf{x} = u_{\lim}$ 的交点在 \mathbf{x}_1 的外侧.

根据条件 B), 知道情形 a) 不可能发生. 故仅有情形 b) 和 c) 两种可能性. 若情形 c) 成立, 有交

点(表示轨线与直线 $-Kx = u_{lim}$ 或 $-Kx = -u_{lim}$ 上的交点) x_6'' 将位于 x_2 的外侧, x_7'' 位于 x_3 的外侧, x_8'' 将位于 x_4 的外侧, ..., 重复下去, 将得到交点数列 x_i'' , 其与切点 $p_{0,I}$ (或 $p_{0,-I}$) 的距离将越来越远. 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i'' - p_{0,I}\| = \alpha < \infty$, 这与全空间不存在任何闭合轨线相矛盾, 又由于连续系统解的存在唯一性, 必有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i'' - p_{0,I}\| = \infty$, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i'' - p_{0,-I}\| = \infty$; 又由于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i''\| \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i'' - p_{0,I}\| - \|p_{0,I}\| = \infty \tag{9}$$

故 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i''\| = \infty$; 而结合条件 A), 饱和系统的状态矩阵集 $A, A - BK$ 均稳定, 即对于任意的 Λ , 有 $Re_{\max}(\lambda(A - B\Lambda K)) < 0$, 其中 $\lambda(\cdot)$ 表示矩阵特征值, 同时可得

$$\begin{aligned} & \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \\ & \sup_{x_0 \in R^n, \forall t \in [0, \infty)} \{ \|e^{(A - B\Lambda K)(t - t_0)} x_0 + [e^{(A - B\Lambda K)(t - t_0)} - I](A - B\Lambda K)^{-1} B\Lambda^* u_{lim}\| \} = \\ & \max_{x_0 \in R^n, \forall \epsilon(x_0) > 0} \{ \sup_{x_0 \in R^n, t_0 \leq t \leq T(\epsilon)} \{ \|e^{(A - B\Lambda K)(t - t_0)} x_0 + [e^{(A - B\Lambda K)(t - t_0)} - I](A - B\Lambda K)^{-1} B\Lambda^* u_{lim}\| \}, \\ & \max_{(\Lambda, \Lambda^*), \forall \epsilon(x_0) > 0} \{ \|(A - B\Lambda K)^{-1} B\Lambda^* u_{lim}\| + \epsilon \} \} < \infty \end{aligned} \tag{10}$$

故情形 c) 不可能发生.

对于情形 b), 将有下列两种可能性:

- I) 轨线 $x(t, t_4, x_4)$ 在区域 $D_{I,0}$ 与 $\partial S_{I,0}$ 相交;
- II) 轨线 $x(t, t_4, x_4)$ 不断穿越各个区域, 最终通过切点 $p_{0,I}$ (或 $p_{0,-I}$).

若 I) 成立, 显然 $x(t, t_0, x_0) = 0$ 是全局渐近稳定的; 否则, 将以轨线在曲线 $-Kx = u_{lim}$ 上形成点列为例 (与 $-Kx = -u_{lim}$ 上形成点列相类似). 设其形成的点列 x_{4k+1} 满足 $0 < \overline{r(x_{4k+1} p'_{I,0})} < \overline{r(x_1 p'_{I,0})}$, $0 > \overline{r(x_{4k} p'_{I,0})} > \overline{r(x_4 p'_{I,0})}$ 其中 \bar{r} 表示有向长度. 故有矢量模 $\overline{r(x_{4k+1} p'_{I,0})}$ 单调减少, 矢量模 $\overline{r(x_{4k} p'_{I,0})}$ 单调增加. 由于单调数列极限存在且唯一, 可以得到结论 $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{r(x_{4k+1} p'_{I,0})} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{r(x_{4k} p'_{I,0})} = 0$ 即轨线通过切点 $p_{0,I}$ (或 $p_{0,-I}$). 根据 $S_{I,0}$ 在 $D_{I,0}$ 内最大正向不变性及收敛性, 知 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0$. 同样若 $\forall x_0 \in D_{0,-I}$ 或 $\forall x_0 \in D_{I,0}$, 也可以得到类似的结论. 总之, 对于任意 $x_0 \in R^2$, 必有 (8) 成立. 证毕.

上面的讨论提出一个问题: 二阶系统中的闭合轨迹存在的条件如何判定. 对于饱和系统 (1) 而言, 假设矩阵 $A - BK, A$ 均稳定. 从前面的分析中可以看到, 若在 R^2 中存在着闭合轨迹, 则其闭合轨迹必与平面 $-Kx(t) = u_{lim}$ 和 $-Kx(t) = -u_{lim}$ 相交. 假设 $x_0 \in D_{I,0}$ 中的任何一点, 记其初始时刻为 t_0 , 由于存在着伪平衡点 $x_{eq,0,I}, D_{eq,0,-I}$, 故必有时刻 T_1 , 使得 $-Kx(T_1) = u_{lim}$, 记 $\Delta T'_1 = T_1 - t_0$, 在区域 $D_{I,0}$ 内, 若轨迹 $x(t, T_1, x_1)$ 不与最大椭圆不变集相交, 即在时刻 T_2 时, 与 $-Kx(t) = -u_{lim}$ 相交, 记其交点为 x_2 , $\Delta T_2 = T_2 - T_1$, 在区域 $D_{0,-I}$ 内, 经过 ΔT_3 时间段与 $-Kx(t) = -u_{lim}$ 相交, 记其时刻为 T_3 , 交点为 x_3 , 同样在区域 $D_{I,0}$ 内, 经过时间段 ΔT_4 , 与 $-Kx(t) = u_{lim}$ 相交, 记其交点为 x_4 , 在区域 $D_{0,I}$ 内, 经过 $\Delta T''_1$ 时间段与 $-Kx(t) = u_{lim}$ 相交, 记其交点与 x_1 重合. 则有关系式 $\Delta T_1 = \Delta T'_1 + \Delta T''_1$, $\Delta T_2 = T_2 - T_1$, $\Delta T_3 = T_3 - T_2$, $\Delta T_4 = T_4 - T_3$. 假设闭合轨迹为 $\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$, 其中 x_1, x_2, x_3, x_4 分别为闭合轨线与 $-Kx(t) = u_{lim}, -Kx(t) = -u_{lim}, -Kx(t) = -u_{lim}, -Kx(t) = u_{lim}$ 的交点 (见图 2).

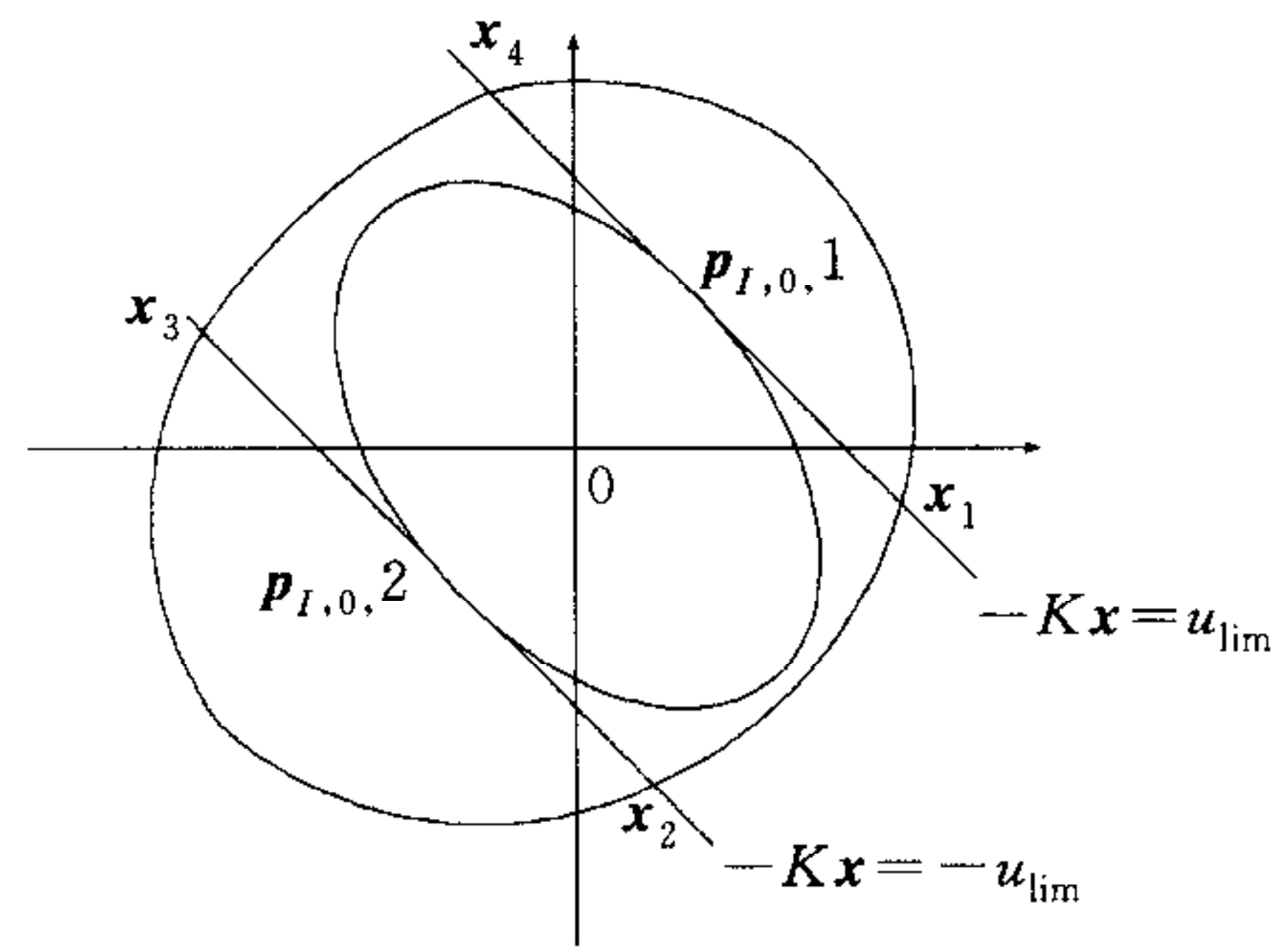


图 2 二阶单饱和控制系统的闭合轨迹分析

以 x_0 (不妨假设 $-Kx_0 \geq u_{\text{lim}}$) 作为初值时轨迹变化描述如下:

$$\begin{cases} x_1(T_1) = e^{A\Delta T_1} x_0 + (e^{A\Delta T_1} - I)A^{-1}Bu_{\text{lim}} \\ -Kx_1(T_1) = u_{\text{lim}} \\ x_2(T_2) = e^{(A-BK)\Delta T_2} x_1 \\ -Kx_2(T_2) = -u_{\text{lim}} \\ x_3(T_3) = e^{A\Delta T_3} x_2 - (e^{A\Delta T_3} - I)A^{-1}Bu_{\text{lim}} \\ -Kx_3(T_3) = -u_{\text{lim}} \\ x_4(T_4) = e^{(A-BK)\Delta T_4} x_3 \\ -Kx_4(T_4) = u_{\text{lim}} \\ x_1(T_1) = e^{A\Delta T_1} x_4 + (e^{A\Delta T_1} - I)A^{-1}Bu_{\text{lim}} \\ -Kx_1(T_1) = u_{\text{lim}} \end{cases} \quad (11)$$

因为闭合轨线 $\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$ 的周期性, 下面分别以 x_1, x_2, x_3, x_4 作为初值来讨论周期运动规律. 显然以 x_1, x_2, x_3, x_4 分别有作为初值, 有

$$\begin{cases} A_1 x_1 = B_1 A^{-1} B u_{\text{lim}}, -Kx_1 = u_{\text{lim}} \\ A_2 x_2 = B_2 A^{-1} B u_{\text{lim}}, -Kx_2 = -u_{\text{lim}} \\ A_3 x_3 = B_3 A^{-1} B u_{\text{lim}}, -Kx_3 = -u_{\text{lim}} \\ A_4 x_4 = B_4 A^{-1} B u_{\text{lim}}, -Kx_4 = u_{\text{lim}} \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= (e^{A\Delta T_1} e^{(A-BK)\Delta T_4} e^{A\Delta T_3} e^{(A-BK)\Delta T_2} - I) \\ B_1 &= e^{A\Delta T_1} e^{(A-BK)\Delta T_4} e^{A\Delta T_3} - e^{A\Delta T_1} e^{(A-BK)\Delta T_4} - e^{A\Delta T_1} + I \\ A_2 &= (e^{(A-BK)\Delta T_2} e^{A\Delta T_1} e^{(A-BK)\Delta T_4} e^{A\Delta T_3} - I) \\ B_2 &= e^{(A-BK)\Delta T_2} e^{A\Delta T_1} e^{(A-BK)\Delta T_4} e^{A\Delta T_3} - e^{(A-BK)\Delta T_2} e^{A\Delta T_1} e^{(A-BK)\Delta T_4} - e^{(A-BK)\Delta T_2} e^{A\Delta T_1} + e^{(A-BK)\Delta T_2} \\ A_3 &= e^{A\Delta T_3} e^{(A-BK)\Delta T_2} e^{A\Delta T_1} e^{(A-BK)\Delta T_4} - I \\ B_3 &= -e^{A\Delta T_3} e^{(A-BK)\Delta T_2} e^{A\Delta T_1} + e^{A\Delta T_3} e^{(A-BK)\Delta T_2} + e^{A\Delta T_3} - I \\ A_4 &= e^{(A-BK)\Delta T_4} e^{A\Delta T_3} e^{(A-BK)\Delta T_2} e^{A\Delta T_1} - I \\ B_4 &= (-e^{(A-BK)\Delta T_4} e^{A\Delta T_3} e^{(A-BK)\Delta T_2} e^{A\Delta T_1} + e^{(A-BK)\Delta T_4} e^{A\Delta T_3} e^{(A-BK)\Delta T_2} + e^{(A-BK)\Delta T_4} e^{A\Delta T_3} - e^{(A-BK)\Delta T_4}) \end{aligned}$$

根据上述做法, 若上述轨迹为闭合轨迹, 必有(12)中各式同时成立; 反之, 若以满足(11)的点 x_1, x_2, x_3, x_4 分别作为初值, 且有(12)同时成立, 可以构造出四条曲线, 但由于系统解的唯一性及 $e^{(A-BK)(\Delta t)}$, $e^{A\Delta t}$ 的非奇异性, 可知以 x_1, x_2, x_3, x_4 作为初值点的曲线必重合(唯一), 且为

$x_1 x_2 x_3 x_4$.

下面考虑条件(12)的化简. 若矩阵 A_1, A_2, A_3, A_4 可逆, 则(12)转化为

$$\begin{cases} -KA_1^{-1}B_1A^{-1}Bu_{\text{lim}} = u_{\text{lim}} \\ -KA_2^{-1}B_2A^{-1}Bu_{\text{lim}} = -u_{\text{lim}} \\ -KA_3^{-1}B_3A^{-1}Bu_{\text{lim}} = -u_{\text{lim}} \\ -KA_4^{-1}B_4A^{-1}Bu_{\text{lim}} = u_{\text{lim}} \end{cases} \quad (13)$$

由于常数 $u_{\text{lim}} > 0$, 故(13)等价于

$$\begin{cases} -KA_1^{-1}B_1A^{-1}B = 1 \\ -KA_2^{-1}B_2A^{-1}B = -1 \\ -KA_3^{-1}B_3A^{-1}B = -1 \\ -KA_4^{-1}B_4A^{-1}B = 1 \end{cases} \quad (14)$$

对于(14), 若存在一组正数 $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta T_4$, 使得(14)成立, 则存在闭合轨线; 若对于任意一组正数 $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta T_4$, (14)中至少有一个关系式不成立, 则不存在闭合轨线. 若矩阵 A_1, A_2, A_3, A_4 均奇异, 考虑如下不等式

$$\begin{cases} \text{秩}(A_1, B_1A^{-1}B) > \text{秩} A_1 \\ \text{秩}(A_2, B_2A^{-1}B) > \text{秩} A_2 \\ \text{秩}(A_3, B_3A^{-1}B) > \text{秩} A_3 \\ \text{秩}(A_4, B_4A^{-1}B) > \text{秩} A_4 \end{cases} \quad (15)$$

若对于任意正数 $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta T_4$, 均有(15)中至少其一成立, 则代数方程不存在解, 即不存在任何闭合轨线.

由以上讨论, 得到如下结论.

定理 2. 对于系统(1)而言, 若

- 1) 若存在一组正数 $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta T_4$, 使得(14)成立, 则存在闭合轨线.
- 2) 若对于任意正数 $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta T_4$, (13)和(14)中至少有一个关系式不成立; 或对于任意正数 $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \Delta T_4$, 均有(15)中至少其一成立, 则不存在闭合轨线.

参 考 文 献

- 1 黄 琳. 稳定性理论. 北京: 北京大学出版社, 1992
- 2 Albert W L, Hedrick J K. Some new results on closed-loop stability in the presence of control saturation. *Int. J. Control*, 1995, **62**(3): 619~631
- 3 Dagard L, Verriest E I. Stability and Control of Time-Delay Systems. Berlin: Springer, 1998. 303~317
- 4 Henrion D, Tarbouriech S. LMI relaxations for robust stability of linear systems with saturating controls. *Automatica*, 1999, **35**(9): 1599~1604
- 5 Horisberger H P, Belanger P R. Regulator for linear, time invariant plants with uncertain parameters. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1976, **42**(5): 705~708
- 6 Michel A N, Dorong Lin, Kaining Wang. Stability analysis of a class of systems with parameter uncertainties and with state saturation nonlinearities. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 1995, **15**(2): 505~519

郭树理 1995, 1998年于内蒙古师范大学获得学士与硕士学位, 1998年开始在北京大学攻读博士学位. 2002年在清华大学做博士后. 研究方向为复杂系统动力学与控制.

黄 琳 现为北京大学力学系系统与控制中心教授, 博士生导师. 研究兴趣为稳定性理论与应用, 鲁棒控制, 具柔性结构系统的控制, 复杂控制系统理论和相关的应用数学问题.