第28卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 28, No. 6
2002年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 2002

研究简报

周期时变线性系统的小增益定理和正实性定理[1)]

陈阳舟
(北京工业大学电子信息与控制工程学院 北京 100022)
(E-mail: yzchen@a-1.net.cn)

关键词 周期时变线性系统,(严、强)有界实性,(严、强)正实性,小增益定理,正实性定理
中图分类号 TP13

SMALL GAIN THEOREM AND POSITIVITY THEOREM FOR PERIODICALLY TIME-VARYING LINEAR SYSTEMS

CHEN Yang-Zhou
(*School of Electronic Information and Control Engineering, Beijing Polytechnic University, Beijing* 100022)
(E-mail: yzchen@a-1.net.cn)

Key words Periodically time-varying linear system, (strict, strong) bounded realness, (strict, strong) positive realness, small gain theorem, positivity theorem

1 引言

有界实性和正实性是线性时不变网络和系统理论中的两个重要概念,得到了广泛的研究[1~4]. 这两个概念与系统的稳定性密切相关,其中两个著名的结果就是小增益定理和正实性定理[1,2]. 另一方面,周期时变线性系统的研究也受到关注[5~7]. 而在这类系统中有界实性和正实性的概念还没见研究。本文的目的即是将有界实性和正实性概念推广到周期时变线性系统中来,并且给出周期时变线性系统的强有界实性和强正实性的充分必要条件. 在此基础上将时不变系统的小增益定理和正实性定理推广到周期时变系统.

首先给出一些预备知识. 考虑周期时变线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{y} = C(t)\boldsymbol{x} + D(t)\boldsymbol{u} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态, $\boldsymbol{u}\in R^m$ 为输入, $\boldsymbol{y}\in R^l$ 为输出. $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ 为适当维数的矩阵,其元素为分段连续的有界 T-周期实函数. 在下面的叙述中符号 $|\cdot|$ 表示通常的欧氏范数. L_2 表示勒贝格平方可积函数空间, $\|\cdot\|_2$ 记其范数.

矩阵 $A(\cdot)$ 的 Hurwitz 稳定性和 Lyapunov 稳定性是指相应的方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=A(t)\boldsymbol{x}$ 的任意解是指数稳定的和 Lyapunov 意义下稳定的.

---

1) 国家自然科学基金(69974004, 69874006)和北京市科干局青年科技骨干培养基金(99020400)资助
收稿日期 2000-11-06 收修改稿日期 2001-05-04

系统(1)的强有界实性和强正实性条件与如下形式的 $2n$ 阶 Hamilton 系统相关

$$J\dot{Z}=H(t)Z,\ J=\begin{bmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{bmatrix},\quad H(t)=\begin{bmatrix}H_{11}(t) & H_{12}(t)\\ H_{21}(t) & H_{22}(t)\end{bmatrix}=H'(t) \tag{2}$$

设 $Z(t)$ 为(2)的基础解矩阵，即满足 $\mathrm{d}Z/\mathrm{d}t=J^{-1}HZ$，$Z(0)=I_{2n}$. 假定满足频率条件[5]

$$\det[Z(T)-\mathrm{e}^{i\omega}I_{2n}]\neq 0\quad (0\leqslant\omega<2\pi) \tag{3}$$

则可将(2)的 $2n$ 个线性无关的解分为两组，一组由 n 个沿正时间方向衰减而沿负时间方向发散的向量组成，另一组则由 n 个沿负时间方向衰减而沿正时间方向发散的向量组成. 设 $z_j(t)=\mathrm{col}[\boldsymbol{x}_j(t),\psi_j(t)](j=1,\cdots,n)$ 为前一组中的向量，即满足 $|z_j(t)|\to 0(t\to+\infty)$. 构造两个矩阵 $X(t)=[\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]$，$\Psi(t)=[\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t)]$. 如果满足条件

$$\det X(t)\neq 0\quad (\forall\, t\in[0,T]) \tag{4}$$

则称系统(2)是非振荡的[5]. 可以证明非振荡性条件与具体的矩阵 $X(t)$ 的选择无关.

2　有界实性与正实性

首先考虑系统(1)的有界实性. 对于时不变线性系统，其有界实性是通过相应的传递函数矩阵定义的[1,2]. 对于周期时变线性系统，我们以时域形式给出有界实性定义.

定义 1. 系统(1)称为有界实的，如果矩阵 $A(\cdot)$ 为 Hurwitz 稳定的，且系统在零初始状态下对任意 $\boldsymbol{u}(t)(|\boldsymbol{u}(t)|\in L_2)$ 的响应 y 满足 $\|\boldsymbol{y}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{u}\|_2$；系统(1)称为严有界实的，如果矩阵 $A(\cdot)$ 为 Hurwitz 稳定矩阵，且存在实数 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ 使得系统在零初始状态下对任意 $\boldsymbol{u}(t)(|\boldsymbol{u}(t)|\in L_2)$ 的响应 y 满足 $\|\boldsymbol{y}\|_2\leqslant\sqrt{1-\varepsilon}\,\|\boldsymbol{u}\|_2$；系统(1)称为强有界实的，如果系统(1)为严有界实的，且存在 $\gamma>0$ 使得 $I_m-D'(t)D(t)\geqslant\gamma I_m(\forall\, t)$.

注 1. 时不变系统的输入输出关系为 $\boldsymbol{y}(s)=G(s)\boldsymbol{u}(s)$，$G(s)=C(sI_n-A)^{-1}B+D$. 此时，定义 1 给出的系统有界实性条件等价于：$G(s)$ 在闭的复半平面 $\mathrm{Re}\ s\geqslant 0$ 解析，且 $\|G(s)\|_\infty\leqslant 1$. 由此看出周期时变系统的有界实性定义是时不变系统相应概念的推广. 定义 1 中的严有界实性和强有界实性可能强于时不变系统的相应概念[1].

引理 1[8]. 设存在 $\gamma>0$ 使得 $I_m-D'(t)D(t)\geqslant\gamma I_m(\forall\, t)$，且矩阵 $A(\cdot)$ 为 Hurwitz 稳定矩阵. 则系统(1)为严有界实的当且仅当下列条件之一成立(为书写方便略写时间变量)

(I) Hamilton 系统(2)满足频率条件(3)和非振荡条件(4)，这里(2)式中的矩阵

$$H=\begin{bmatrix}C'C+C'D(I_m-D'D)^{-1}D'C & A'+C'D(I_m-D'D)^{-1}B'\\ A+B(I_m-D'D)^{-1}D'C & B(I_m-D'D)^{-1}B'\end{bmatrix} \tag{5}$$

(II) 矩阵 Riccati 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=(RB-C'D)(I_m-D'D)^{-1}(RB-C'D)'-A'R-RA+C'C \tag{6}$$

存在镇定解 R(即 R 使 $A(\cdot)+B(\cdot)r(\cdot)'$ 为 Hurwitz 稳定，这里 $r=-[RB-C'D](I_m-D'D)^{-1}$).

注 2. 首先，可证对于线性时不变系统引理 1 中条件(I)等价于：对于某个 $\varepsilon_0>0$ 成立频率条件 $\|G(j\omega)\|_\infty\leqslant\varepsilon_0<1$(见文献[6]中定理 2). 其次，可证条件(II)中(6)可用

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=(RB-C'D)(I_m-D'D)^{-1}(RB-C'D)'-A'R-RA+C'C+E \tag{7}$$

代替，其中 E 为某个正定矩阵. 第三，因(6)中 $(RB-C'D)(I_m-D'D)^{-1}(RB-C'D)'+C'C$ 半正定且 $A(\cdot)$ 为 Hurwitz 稳定矩阵，由文献[7]知 $R(t)$ 为半正定的，而方程(7)的解 $R(t)$ 为正定的.

正实性是系统理论中的又一个重要概念. 对于时不变线性系统,它也是通过相应的传递函数矩阵来定义[1~4]. 对于周期时变线性系统,我们定义正实性如下.

定义 2. 系统(1)称为正实的,如果矩阵 $A(\cdot)$ 为 Lyapunov 稳定矩阵,且系统在零初始状态下对任意 $u(t)(|u(t)|\in L_2)$ 的响应 y 满足 $\int_0^\tau u'(t)y(t)\mathrm{d}t\geqslant 0(\forall\ \tau\geqslant 0)$;系统(1)称为严正实的,如果矩阵 $A(\cdot)$ 为 Hurwitz 矩阵,且存在 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ 使得系统在零初始状态下对任意 $u(t)(|u(t)|\in L_2)$ 的响应 y 满足 $\int_0^\infty u'(t)y(t)\geqslant\varepsilon\|u\|_2^2$;系统(1)称为强正实的,如果系统(1)为严正实的,且存在 $\gamma>0$ 使得 $D'(t)+D(t)\geqslant\gamma I_m(\forall\ t)$.

注 3. 定义 2 是时不变系统相应概念的推广,它与系统的无源性概念密切相关. 但对于周期时变系统(1),其正实性(严正实性、强正实性)的定义比时不变系统要强一些.

引理 2[8]. 设存在 $\gamma>0$ 使得 $D'(t)+D(t)\geqslant\gamma I_m$,且矩阵 $A(\cdot)$ 为 Hurwitz 稳定矩阵. 则系统(1)为严有界实的当且仅当下列条件之一成立

(I) Hamilton 系统(2)满足频率条件(3)和非振荡条件(4),这里(2)中的矩阵

$$H=\begin{bmatrix} C'(D'+D)^{-1}C & A'-C'(D'+D)^{-1}B' \\ A-B(D'+D)^{-1}C & B(D'+D)^{-1}B' \end{bmatrix} \tag{8}$$

(II)矩阵 Riccati 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=(RB+C')(D'+D)^{-1}(RB+C')'-A'R-RA \tag{9}$$

存在镇定解 R(即 R 使 $A(\cdot)+B(\cdot)r(\cdot)'$ 为 Hurwitz 稳定矩阵,这里 $r=-[RB+C']\cdot(D'+D)^{-1}$).

注 4. 与引理 1 类似,Riccati 方程(9)也可以换成

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=(RB+C')(D'+D)^{-1}(RB+C')'-A'R-RA+E$$

其中 $E=E(t)$ 为某个正定矩阵. 同注 2,方程(9)的镇定解 $R(t)$ 也是半正定的,而上面最后一个方程的解 $R(t)$ 为正定的.

3 小增益定理和正实性定理

考虑图1所示的系统,其中Σ为由(1)描述的周期时变系统,$u=\phi(y,t)$为不确知无记忆时变非线性函数.

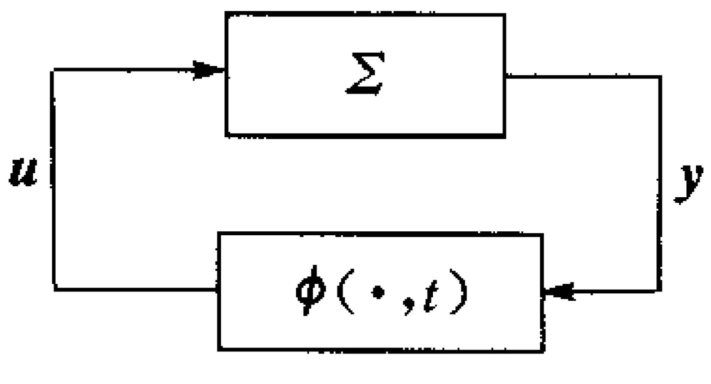

图 1 带非线性不确定性的系统

首先考虑范数有界无记忆时变非线性不确定类 $\Phi=:\{\phi:R^l\times R^+\to R^m,\ |\phi(y,t)|\leqslant|y|\}$.

定理 1. 如果由(1)表示的系统 Σ 是强有界实的,则对任意的 $\phi\in\Phi$,由 Σ 与 ϕ 按如图 1 所示反馈连接的系统是渐近稳定的.

证明. 由于系统 Σ 是强有界实的,根据引理 1 和注 2,存在正定矩阵 P 和 E 满足方程

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=(PB+C'D)(I_m-D'D)^{-1}(PB+C'D)'+A'R+RA+C'C+E \tag{10}$$

下面只须证明 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}'P(t)\boldsymbol{x}$ 的 Lyapunov 导数为负定即可. 事实上, $V(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}'P(t)\boldsymbol{x}$ 的 Lyapunov 导数为

$$\dot V=\boldsymbol{x}'\dot P\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'(A'P+PA)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\phi}'B'P\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'PB\boldsymbol{\phi} \tag{11}$$

应用方程(10),易将(11)写为

$$\dot{V} = -x'Ex - [(I_m - D'D)^{-1/2}(PB + C'D)'x - (I_m - D'D)^{1/2}\phi]' \cdot [(I_m - D'D)^{-1/2}(PB + C'D)'x - (I_m - D'D)^{1/2}\phi] + \phi'\phi - y'y$$

于是,当 $\phi \in \Phi$ 时,有 $\dot{V} \leqslant -x'Ex$.　　证毕.

现在考虑不确定类为如下无记忆时变非线性类

$$\tilde{\Phi} =: \{\phi: R^l \times R^+ \to R^m, \ \phi'(y,t)y \leqslant 0\}.$$

定理 2. 如果由(1)表示的系统 Σ 是强正实的,则对任意的 $\phi \in \tilde{\Phi}$,由 Σ 与 ϕ 如图 1 所示反馈连接的系统是渐近稳定的.

证明. 由于系统 Σ 是强正实的,根据引理 2 和注 4,存在正定矩阵 P 和 E 满足方程

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (-PB + C')(D' + D)^{-1}(-PB + C')' + A'P + PA + E \qquad (13)$$

取 Lyapunov 函数为 $V(x,t) = x'P(t)x$. 相应的 Lyapunov 导数为

$$\dot{V} = x'\dot{P}x + x'(A'P + PA)x + \phi'B'Px + x'PB\phi$$

应用方程(13),上式可以写为

$$\dot{V} = -x'Ex - [(D + D')^{-1/2}(-PB + C')'x - (D + D')^{1/2}\phi]' \cdot [(D + D')^{-1/2}(-PB + C')'x - (D + D')^{1/2}\phi] + 2\phi'y$$

于是,当 $\phi \in \tilde{\Phi}$ 时,有 $\dot{V} \leqslant -x'Ex$,从而由 Σ 与 ϕ 反馈连接的系统是渐近稳定的.　　证毕.

4　结论

本文给出了周期时变线性系统的有界实性和正实性的定义,并给出了周期时变线性系统强有界实性和强正实性的两个充分必要条件.此外,将时不变系统的小增益定理和正实性定理推广到周期时变系统.但是,我们只证明了这两个定理的充分性.

需要进一步研究的问题是:什么是周期时变系统有界实性和正实性的充分必要条件?文中给出的小增益定理和正实性定理的条件是否是必要的?

参 考 文 献

1 Haddad W M, Bernstain D S. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and Popov theorems and their applications to robust stability. In: Proc. of 30th CDC, England: Brighton, 1991. 2618～2623

2 Anderson B D O, Vongpanitlerd S. Network Analysis and Synthesis: A Modern Systems Theory Approach. New York: Prentice-Hall, 1973

3 Anderson B D O. A system theory criterion for positive real matrices. *J. SIAM Control*, 1967, **5**(2):171～182

4 Wen J T. Time domain and frequency domain conditions for strict positive realness. *IEEE Automatic Control*, 1988, **33**(10):988～992

5 Якубович В А. Линейно-квадратичная задача оптимизация и частотная теорема для периодтческих сестем I. Сиб. Мат. Ж., 1986, **27**(4):181～200(*English translation in Siberian Mathematics Journal*, 1986, **27**(4):181～200)

6 Якубович В А. Частотная теорема для периодтческих сестем и теория анадитического конструирования регуляторов. В: Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, 1987. 281～290

7 Bittanti S, Bolzern P, Colaneri P. The extended periodic Lyapunov lemma. *Automatica*, 1985, **21**(5): 603～605

8 陈阳舟. 周期时变线性系统的严有界实性和严正实性. 见:2001'中国控制与决策学术年会论文集,沈阳:东北大学出版社,2001,60～63

陈阳舟　1994 年在俄罗斯圣彼得堡大学获博士学位. 1996 年～1998 年在哈尔滨工业大学航天学院做博士后研究. 现为北京工业大学电子信息与控制工程学院教授,博士生导师,自动化系主任. 目前研究领域主要为鲁棒控制、最优控制、周期时变系统分析与控制、时滞系统分析与控制、混杂动态系统及其应用等.