第 28 卷 第 5 期
2002 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 5
Sept., 2002

短文

周期时变不确定性线性系统的 MINIMAX 控制方法[1)]

陈阳舟

(北京工业大学电子信息与控制工程学院 北京 100022)

(E-mail: yzchen@a-1. net. cn)

摘 要 应用约束最优化方法和微分对策理论，讨论周期时变不确定性线性系统在范数有界外部干扰情况下的 MINIMAX 控制和参数摄动情况下的 MINIMAX 控制. 问题可解的充分条件是一类 Riccati 微分方程具有稳定化解，且关于最坏扰动的某个附加条件满足相应的 MINIMAX 控制恰为一个线性状态反馈. 此外，还给出了闭环系统的性能指标的保证值.

关键词 周期时变线性系统，范数有界外部干扰，参数摄动，MINIMAX 控制，微分对策

中图分类号 TP13

MINIMAX CONTROL APPROACH TO PERIODICALLY TIME-VARYING UNCERTAIN LINEAR SYSTEMS

CHEN Yang-Zhou

(*School of Electronic Information and Control Engineering, Beijing Polytechnic University, Beijing* 100022)

(E-mail: yzchen@a-1. net. cn)

Abstract Resorting to the bounded optimization method and the differential game theory, the paper deals with the minimax control problems of periodically time-varying linear system with norm-bounded exogenous disturbance and the system with parameter perturbation. The sufficient conditions for the solubility are that some Riccati differential equation admits a stabilizing solution, some additional condition about the worst disturbance or perturbation is satisfied, and the minimax control (if exists) turns out to be a linear state feedback. Moreover, the guarantee value of cost functional for the closed-loop system is presented.

Key words Periodically time-varying system, norm-bounded exogenous disturbance, parameter perturbation, MINIMAX control, differential games

---

1) 国家自然科学基金(69974004, 69874006)和北京市科干局青年科技骨干培养基金(99020400)资助

收稿日期 2000-08-01 收修改稿日期 2000-12-30

1 引言

大量的工业过程与社会系统必须建模为周期系统[1,2],数字滤波器和数据采样控制器中不同步和不同周期采样(即多速率采样)也导致一类特殊的周期系统的研究[3,4],在某些方面周期时变控制器比时不变控制器具有优越性.诸如此类的原因使得在最近几十年里周期时变线性系统的研究引起了广泛的关注.另一方面,不确定性时不变系统的鲁棒控制方法与应用研究在最近二十年中也取得了重大进展.鉴于此,将时不变系统鲁棒控制方法应用到不确定性周期时变系统是一个新的研究方向.近年来,已有许多文献讨论了周期时变不确定性系统[3~13].本文讨论此类系统中的两个问题:带有范数有界外部干扰的MINIMAX控制问题和参数摄动情况下的MINIMAX控制问题.MINIMAX控制实际上是针对最坏干扰来设计最优控制,它保证了性能指标对于任意容许干扰都不会超过某个保证值.因此,这一方法也称为保证结果控制方法.我们将看到,本文问题可以化归为一个约束微分对策问题.因此,下面的关于约束最优化问题的结果将成为本文的关键性引理.

引理 1[13]. 设 $Z=\{z\}$ 为一个实 Hilbert 空间,$F(z)$ 和 $G(z)$ 为 Z 上的二次泛函,M 为 Z 的一个子空间.给定元 $z_0\in Z$,让 $\Delta=M+\{z_0\}$ 为一个锥形集合.那么

(i) $\inf\limits_{z\in\Delta}\{F(z):G(z)\geqslant 0\}=\max\limits_{\tau\geqslant 0}\inf\limits_{z\in\Delta}\{F(z)-\tau G^*(z)\}$;

(ii) 如果左边的约束最优化问题有解 z^*,则存在 $\tau^*\geqslant 0$ 使得 τ^*,z^* 为右边无约束最优化问题的解,且满足等式 $\tau^* G(z^*)=0$;反过来,如果 τ^*,z^* 为右边问题的满足条件 $G(z^*)\geqslant 0$, $\tau^* G(z^*)=0$ 的解,则 z^* 为左边问题的解.

2 范数有界外部干扰情况下的MINIMAX控制

考虑周期时变不确定性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+B(t)\boldsymbol{u}(t)+E(t)\boldsymbol{w}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 为状态,$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 为控制,$\boldsymbol{w}(t)\in R^p$ 为外部干扰,容许的外部干扰满足如下范数有界条件(这里 $\|\cdot\|_2$ 表示平方可积函数空间 $L_2(0,\infty)$ 的范数)

$$\|\boldsymbol{w}\|_2\leqslant c \tag{2}$$

系统的性能指标为

$$J[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}'(t)Q(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{u}(t)-\gamma^2\boldsymbol{w}'(t)\boldsymbol{w}(t)]\mathrm{d}t \tag{3}$$

在式(1),(3)中矩阵 $A(t),B(t),E(t),Q(t)=Q'(t)$ 的元素为 T-周期分段连续的实函数,γ 为一预先给定的正实数.

问题 1. 对于不确定性系统(1)和(2),寻找一个状态反馈控制 $\boldsymbol{u}^0=K(t,\boldsymbol{x})$(若存在)使得闭环系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+B(t)K(t,\boldsymbol{x}(t))$ 渐近稳定,且对任意容许干扰 $\boldsymbol{w}(t)$ 性能指标不超过一个有限正数 $M(\boldsymbol{x}_0)$,并且确定满足上述条件的最小正数 $M(\boldsymbol{x}_0)$.

显然,若存在容许的 $\boldsymbol{w}^0$ 和 $\boldsymbol{u}^0$ 使得 $J[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{w}^0]=\min\limits_{\boldsymbol{u}}\max\limits_{\boldsymbol{w}}J[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]$,则成立鞍点不等式

$$J[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{w}]\leqslant J[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{w}^0]\leqslant J[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}^0](\forall\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\ \|\boldsymbol{w}\|_2\leqslant c) \tag{4}$$

从而 $\boldsymbol{u}^0$ 为所要求的控制，$J[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{w}^0]$为所要求的最小正数 $M(\boldsymbol{x}_0)$. 控制 $\boldsymbol{u}^0$ 在 MINIMAX 意义下是最优的(即最坏扰动情况下的最优控制)，它保证了性能指标不超过 $M(\boldsymbol{x}_0)$，因此称 $M(\boldsymbol{x}_0)$为性能指标的保证值.

问题 1 的求解分为两个步骤. 首先对任意给定的控制 $\boldsymbol{u}$ 求解约束最优化问题

$$\max_{\boldsymbol{w}}\{J[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]:(1),(2)\} \tag{5}$$

其次，设 $\Phi[\boldsymbol{u}]=:\max_{\boldsymbol{w}}\{J[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]:(1),(2)\}$，求解最优化问题$\min_{\boldsymbol{u}}\{\Phi[\boldsymbol{u}]:(1)\}$. 由引理 1 我们可将有约束的问题(5)转化为无约束的问题. 设 $\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{x}(\cdot),\boldsymbol{u}(\cdot),\boldsymbol{w}(\cdot)]\in L_2(0,\infty)$，$Z=\{\boldsymbol{z}\}$，集合 Δ 由式(1)定义. 定义 $Z=\{\boldsymbol{z}\}$ 上的二次泛函 $F(\boldsymbol{z})=-J[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]$，$G(\boldsymbol{z})=c^2-\|\boldsymbol{w}\|_2^2$，则由引理 1 知，约束最优化问题(5)等价于无约束问题$\max_{\tau\geqslant 0}\{\max_{\boldsymbol{w}}\{J_\tau[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]:(1)\}+c^2\tau\}$，这里

$$J_\tau[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}'(t)Q(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{u}(t)-(\gamma^2+\tau)\boldsymbol{w}'(t)\boldsymbol{w}(t)]\mathrm{d}t \tag{6}$$

于是，MINIMAX 问题 1 可以通过如下两个步骤求解：

步骤 1. 求解无约束微分对策问题，对系统(1)求 $J_\tau[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]$的鞍点 $\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{w}^0$ 使得

$$J_\tau[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{w}]\leqslant J_\tau[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{w}^0]\leqslant J_\tau[\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}^0] \tag{7}$$

且使得闭环系统渐近稳定；

步骤 2. 求解最优化问题$\max_{\tau\geqslant 0}\{J_\tau[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{w}^0]+c^2\tau\}$.

步骤 1 中无约束微分对策问题的解是熟知的(为书写方便常省略时间变量).

引理 2[12]. 设$(A,\bar{B})$可控，其中 $\bar{B}=[B\quad E]$. 步骤 1 中的无约束微分对策问题的鞍点存在当且仅当 Riccati 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}R_\tau}{\mathrm{d}t}=[I\quad -R_\tau]H_\tau\begin{bmatrix}I\\-R_\tau\end{bmatrix} \tag{8}$$

在$[0,\infty)$上存在 T-周期的对称矩阵解 R_τ 使得系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=[A-BB'R_\tau+(\gamma^2+\tau)^{-1}EE'R_\tau]\boldsymbol{x}$渐近稳定(以后称这样的解为 Riccati 方程的稳定化解)，其中矩阵

$$H_\tau=\begin{bmatrix}-Q & A'\\ A & BB'-(\gamma^2+\tau)^{-1}EE'\end{bmatrix} \tag{9}$$

进一步，如果上述条件满足，则鞍点为

$$u^0=-B'R_\tau\boldsymbol{x},\ w^0=(\gamma^2+\tau)^{-1}E'R_\tau\boldsymbol{x} \tag{10}$$

鞍点值为 $J_\tau[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{w}^0]=\boldsymbol{x}_0'R_\tau(0)\boldsymbol{x}_0$.

按上述两个步骤，并应用引理 2，不难得到问题 1 的解(受篇幅所限略去详细证明).

定理 1. 设$(A,\bar{B})$可控，其中 $\bar{B}=[B\quad E]$. 如果存在实数 $\tau\geqslant 0$ 使得 Riccati 微分方程(8)有稳定化解 R_τ，且式(10)中的干扰 $\boldsymbol{w}^0$ 满足条件 $\|\boldsymbol{w}^0\|_2\leqslant c$，$\tau(\|\boldsymbol{w}^0\|_2-c)=0$，则 MINIMAX 控制问题 1 可解，其 MINIMAX 最优控制为 $\boldsymbol{u}^0=-B'R_\tau\boldsymbol{x}$，保证值为 $M=\boldsymbol{x}_0'R_\tau(0)\boldsymbol{x}_0+c^2\tau$，其中实数 τ 由最优化问题$\max_{\tau\geqslant 0}\{\boldsymbol{x}_0'R_\tau(0)\boldsymbol{x}_0+c^2\tau\}$确定.

注 1. 如果在定理 1 中 $\tau=0$，则表明约束条件(2)不起作用；如果 $\tau>0$，则最坏干扰必在边界 $\|\boldsymbol{w}\|_2=c$ 上达到.

注 2. 如果在定理 1 中取 $\tau=0$，初始状态 $\boldsymbol{x}_0=0$，定义受控输出 $\boldsymbol{y}=G_1(t)\boldsymbol{x}+G_2(t)\boldsymbol{u}$，其中

$G_1'(t)G_1(t)=Q(t)$，$G_1'(t)G_2(t)\equiv 0, G_2'(t)G_2(t)\equiv I$，则有不等式 $J[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{w}]\leqslant 0$，即 $\|\boldsymbol{y}\|_2^2/\|\boldsymbol{w}\|_2^2\leqslant\gamma^2$. 这表明周期时变系统的 H_∞-控制问题可看作问题 1 的特例.

注 3. 如果式(1)和(3)中的参数均为时不变的，则定理 1 中的 Riccati 微分方程(8)变为一代数 Riccati 方程. 此时，当 $\tau=0, \boldsymbol{x}_0=0$ 即得时不变系统 H_∞-控制问题的解.

注 4. 定理 1 中的 Riccati 方程条件可以用一个等价的频率条件代替[12].

3 参数摄动情况下的 MINIMAX 控制

考虑带有参数摄动不确定性的周期时变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A(t)+\Delta A(t))\boldsymbol{x}(t)+B(t)\boldsymbol{u}(t),\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 为状态，$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 为控制；$A(t), B(t)$ 为 T-周期分段连续函数矩阵；假定参数摄动不确定性 $\Delta A(t)$ 具有如下结构

$$\Delta A(t)=E(t)\Omega(t)F(t),\quad \Omega'(t)\Omega(t)\leqslant I \tag{12}$$

这里 $E(t), F(t)$ 为已知 T-周期分段连续函数矩阵，$\Omega(t)$ 代表不确定性，它可以为任意的函数矩阵. 系统的性能指标由二次型泛函

$$J[\boldsymbol{u}]=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}'(t)Q(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{13}$$

给出，其中 $Q(t)$ 为实对称 T-周期分段连续函数矩阵.

问题 2. 对系统(11)，寻找一个状态反馈控制 $\boldsymbol{u}^0=K(t,\boldsymbol{x})$（若存在）使闭环系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+B(t)K(t,\boldsymbol{x}(t))$ 渐近稳定且对任意满足式(12)的不确定性摄动参数 $\Delta A(t)$，闭环系统的性能指标不超过一个有限正数 $M(\boldsymbol{x}_0)$，并确定相应的 $M(\boldsymbol{x}_0)$.

现将问题 2 变为一个约束 MINIMAX 控制问题. 设 $\boldsymbol{v}=\Omega(t)F(t)\boldsymbol{x}$，则可改写式(11)为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t)+B(t)\boldsymbol{u}(t)+E(t)\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 满足如下约束条件

$$\|\boldsymbol{v}\|_2\leqslant\|F\boldsymbol{x}\|_2 \tag{15}$$

于是，问题 2 转化为如下约束 MINIMAX 问题.

问题 2′. 对系统(14)，寻找一状态反馈控制 $\boldsymbol{u}^0=K(t,\boldsymbol{x})$（若存在）使闭环系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}+B(t)K(t,\boldsymbol{x}(t))$ 渐近稳定且对任意满足约束条件(15)的干扰 v，闭环系统的性能指标不超过一个有限正数 $M(\boldsymbol{x}_0)$，并确定相应的 $M(\boldsymbol{x}_0)$.

与问题 1 类似，问题 2′的求解也分为两步进行. 首先对任给 $\boldsymbol{u}$ 求解约束最优化问题

$$\max_{\boldsymbol{v}}\{J[\boldsymbol{u}]:(14),(15)\} \tag{16}$$

其次，设 $\Phi(\boldsymbol{u})=:\max\limits_{\boldsymbol{v}}\{J[\boldsymbol{u}]:(14),(15)\}$，求解最优化问题 $\min\limits_{\boldsymbol{u}}\{\Phi[\boldsymbol{u}]:(14)\}$. 又由引理 1 可将约束最优化问题(16)转化为无约束问题

$$\max_{\tau\geqslant 0}\{\max_{\boldsymbol{v}}\{J_\tau[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]:(14)\}\} \tag{17}$$

$$J_\tau[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}'(t)(Q(t)+\tau F'(t))\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}'(t)\boldsymbol{u}(t)-\tau\boldsymbol{v}'(t)\boldsymbol{v}(t)]\mathrm{d}t \tag{18}$$

于是，同上可得问题 2′的求解步骤如下：

步骤 1. 求解无约束微分对策问题，即对于对象式(14)求泛函 $J_\tau[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]$ 的鞍点 $\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{v}^0$；

步骤 2. 求解最优化问题$\max\limits_{\tau\geqslant 0} J_\tau[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{v}^0]$.

引理 3[12]. 设$(A,\bar{B})$可控,其中$\bar{B}=[B\quad E]$.步骤 1 中的无约束微分对策问题的鞍点存在当且仅当 Riccati 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}R_\tau}{\mathrm{d}t}=[I\quad -R_\tau]H_\tau\begin{bmatrix}I\\-R_\tau\end{bmatrix}\tag{19}$$

在$[0,\infty)$上存在稳定化的T-周期的对称矩阵解R_τ,其中矩阵

$$H_\tau=\begin{bmatrix}-(Q+\tau F'F) & A'\\ A & BB'-\tau^{-1}EE'\end{bmatrix}\tag{20}$$

进一步,如果上述条件满足,则鞍点为

$$\boldsymbol{u}^0=-B'R_\tau\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{v}^0=\tau^{-1}E'R_\tau\boldsymbol{x}\tag{21}$$

鞍点值为$J_\tau[\boldsymbol{u}^0,\boldsymbol{v}^0]=\boldsymbol{x}_0'R_\tau(0)\boldsymbol{x}_0$.

按上述两步骤,并应用引理 3,不难得到控制问题 2 的解(受篇幅所限略去详细证明).

定理 2. 设$(A,\bar{B})$可控,其中$\bar{B}=[B\quad E]$.如果存在实数$\tau>0$使得 Riccati 微分方程(19)有稳定化解R_τ,且式(21)中的干扰$\boldsymbol{v}^0$满足$\|\boldsymbol{v}^0\|_2=\|F\boldsymbol{x}\|_2$,则控制问题 2 可解,其 MINIMAX 最优控制为$\boldsymbol{u}^0=-B'R_\tau\boldsymbol{x}$,保证值为$M=\boldsymbol{x}_0'R_\tau\boldsymbol{x}_0$,其中实数$\tau$由最优化问题$\max\limits_{\tau>0}\{\boldsymbol{x}_0'R_\tau(0)\boldsymbol{x}_0\}$确定.

注 5. 如果式(11)中的不确定性为如下线性组合$\Delta A(t)=\sum\limits_{i=1}^{k}s_iA_i(t)$, $|s_i|\leqslant\bar{s}_i$,其中$A_i(t)$为已知T-周期分段连续函数矩阵,$\bar{s}_i$为已知常数.那么,若取

$$E(t)=I,\ F(t)=\Big(k\sum_{i=1}^{k}\bar{s}_iA_i'(t)A_i(t)\Big)^{1/2},$$

则定理 2 的结论仍然成立.事实上,取$\Omega(t)=\sum\limits_{i=1}^{k}s_iA_i(t)\Big(k\sum\limits_{i=1}^{k}\bar{s}_i^2A_i'(t)A_i(t)\Big)^{-1/2}$,则只须验证$\Omega'(t)\Omega(t)\leqslant I$,即验证不等式$\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}s_iA_i(t)\Big)'\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}s_iA_i(t)\Big)\leqslant k\sum\limits_{i=1}^{k}\bar{s}_i^2A_i'(t)A_i(t)$,或者等价地写成矩阵形式

$$[A_1(t)\quad\cdots\quad A_k(t)]\begin{bmatrix}s_1I\\ \vdots\\ s_kI\end{bmatrix}[s_1I\quad\cdots\quad s_kI]\begin{bmatrix}A_1(t)\\ \vdots\\ A_k(t)\end{bmatrix}\leqslant$$

$$[A_1(t)\quad\cdots\quad A_k(t)]\begin{bmatrix}k\bar{s}_1^2I & & \\ & \ddots & \\ & & k\bar{s}_k^2I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1(t)\\ \vdots\\ A_k(t)\end{bmatrix}.$$

而此不等式可以由下列不等式推得

$$\begin{bmatrix}s_1I\\ \vdots\\ s_kI\end{bmatrix}[s_1I\quad\cdots\quad s_kI]\leqslant\begin{bmatrix}k\bar{s}_1^2I & & \\ & \ddots & \\ & & k\bar{s}_k^2I\end{bmatrix}.$$

注 6. 定理 2 中的 Riccati 方程条件也可以用一个等价的频率条件代替.

注 7. 当式(11),(12)和(13)中的参数均时不变时,Riccati 微分方程变为代数方程,由

此得到时不变系统的结果.

4 结论

本文应用约束最优化方法和微分对策理论给出了周期时变不确定性线性系统的两类MINIMAX控制问题可解性的条件，且构造了相应的MINIMAX控制，它恰好为一个线性状态反馈. 此外，给出了闭环系统的性能指标的保证值. 本文的方法还可以用来讨论既含有范数有界外部干扰又含有参数摄动的周期系统的MINIMAX控制问题.

参 考 文 献

1 Yakubovich V A, Starzhinskii V M. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients. (I/II). New York: Halsted Press, John Wiley, 1975

2 Bittanti S. Deterministic and stochastic linear periodic systems. In: Bittanti S, Time series and linear systems, Berlin: Springer-Verlag, 1986. 141～182

3 Dahleh M A, Voulgaris P G. Optimal and robust controllers for periodic and multirate systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, **37**(1): 90～99

4 Khargonekar P P, Poolla K. Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, **30**(11): 1088～1096

5 Grasselli O M, Longhi S. Disturbance localization by measurement feedback for linear periodic discrete-time systems. *Automatica*, 1988, **24**(3):375～385

6 Xie L, de Souza C E. Robust filtering for a class of uncertain periodic systems. In: Proceeding of the 30th CDC, Brighton: IEEE, 1991. 527～532

7 Colaneri P, de Souza C. The control problem for continuous-time linear periodic systems. In: Proc the 2nd IFAC Workshop on Systems Structure and Control. Prague: IFAC, 1992. 292～295

8 Dahleh M A, Voulgaris P G. Optimal and robust controllers for periodic and multirate systems. *IEEE Trans. Automa. Control*, 1992, **37**(1): 90～99

9 Grasselli O M, Longhi S. Robust output regulation and tracking for linear periodic systems under structured uncertainties. *Automatica*, 1996, **32**(7):1015～1019

10 Voulgaris P G, Dahleh M A. Optimal controllers for periodic and multirate systems. *Automatica*, 1994, **30**(2):251～263

11 谈 侃，王朝珠. 线性时变周期系统的鲁棒稳定及控制. 自动化学报，1996，**22**(5)：611～614

12 陈阳舟. 关于时变线性系统二次型两人零和微分对策：问题可解的充要条件和解的解析构造. 见：96' 中国控制会议论文集，青岛：中国自动化学会控制理论专业委员会，1996. 70～78

13 Yakubovich V A. Non-convex optimization problem: The infinite-horizon linear-quadratic control problem with quadratic constraints. *Syst. Contr. Lett.*, 1992, **19**(1):13～22

陈阳舟 1994年在俄罗斯圣-彼得堡大学获博士学位. 1996年～1998年在哈尔滨工业大学航天学院从事博士后研究. 现为北京工业大学电子信息与控制工程学院教授，自动化系主任. 目前的主要研究兴趣有周期时变系统的分析与控制、时滞系统的分析与控制、混杂动态系统、智能运输系统等.