研究简报

关于 H_∞ 控制器阶的一个注记[1)]

曾建平　　程　鹏

（北京航空航天大学自动控制系　北京　100083）

关键词　H_∞ 控制，降阶控制器，最小阶控制器，线性定常系统

中图分类号　TM571

A NOTE ON ORDER OF H_∞ CONTROLLERS

ZENG Jian-Ping　CHENG Peng

(*Department of Automatic Control, Beijing Uiversity of Aeronautics and Astronautics, Beijing*　100083)

Key words　H_∞ control, reduced-order controllers, minimal order controller, linear time-invariable systems

1　引言

现有 H_∞ 控制设计方法通常可构造出阶数为广义对象 McMillan 阶的全阶控制器[1,2]，故 H_∞ 控制器的阶数较高，研究阶数低于广义对象阶的降阶控制器设计方法，具有重要的工程和理论意义. 在奇异情形下，几个学者研究了显式构造降阶控制器的方法[3,4]，但这些结果不适用于标准 H_∞ 控制问题. 一个令人感兴趣的问题是，当 H_∞ 控制问题可解时，是否必存在降阶的控制器. 文献[5]曾推测存在阶数等于广义对象阶与输出变量数之差的降阶控制器. 本文通过一阶对象 H_∞ 控制问题的分析说明，最小阶 H_∞ 控制器的阶可达广义对象阶.

2　预备与记号

考虑 n_p 阶广义对象

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] := D + C(sI-A)^{-1}B$，$z \in R^{n_z}$，$y \in R^{n_y}$，$w \in R^{n_w}$，$u \in R^{n_u}$ 分别为控制输出、量测输出、外部输入和控制输入信号. 记 $A^\perp$ 为具有如下特征的矩阵：Ker $A^\perp$ = Im A，且

1）航空科学基金（99E51002）和山西省青年基金（19991018）资助

收稿日期　2000-01-15　　收修改稿日期　2000-10-19

$A^{\perp}A^{\perp T}>0$. Iwasaki 和 Skelton 给出了如下 H_∞ 控制问题可解条件[2].

引理 1. 如下陈述是等价的

i) 存在一个 H_∞ 控制器;

ii) $L_D\neq\varnothing$,其中

$$L_D := \left\{(X,Y)\in R^{n_p\times n_p}\times R^{n_p\times n_p}: X\in L_B,\ Y\in L_C, \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y\end{bmatrix}\geqslant 0\right\} \tag{2}$$

$$L_B := \left\{X: X>0, \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix} AX+XA^{T}+B_1B_1^{T} & XC_1^{T}+B_1D_{11}^{T} \\ C_1X+D_{11}B_1^{T} & D_{11}D_{11}^{T}-I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12}\end{bmatrix}^{\perp T}<0\right\} \tag{3}$$

$$L_C := \left\{Y: Y>0, \begin{bmatrix} C_2^{T} \\ D_{21}^{T}\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix} YA+A^{T}Y+C_1^{T}C_1 & YB_1+C_1^{T}D_{11} \\ B_1^{T}Y+D_{11}^{T}C_1 & D_{11}^{T}D_{11}-I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_2^{T} \\ D_{12}^{T}\end{bmatrix}^{\perp T}<0\right\} \tag{4}$$

当 $L_D\neq\varnothing$ 时,存在阶数不超过 $\mathrm{rank}(X-Y^{-1})$ 的 H_∞ 控制器.

引理 2. 如下陈述是等价的

i) 存在一个静态 H_∞ 控制器;

ii) $L_S\neq\varnothing$,其中

$$L_S := \{X\in R^{n_p\times n_p}: X\in L_B,\ X^{-1}\in L_C\} \tag{5}$$

3 一阶对象的 H_∞ 控制问题

当 $n_p=1$ 时,广义对象(1)各矩阵均为标量,集合 L_B,L_C 退化为

$$L_B = \{X>0: T_1X+U_1<0\} \tag{6}$$

$$L_C = \{Y>0: T_2Y+U_2<0\} \tag{7}$$

其中 $\begin{bmatrix} T_1 & U_1 \\ T_2 & U_2\end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2(AD_{12}-B_2C_1)D_{12} & (B_1D_{12}-B_2D_{11})^2-B_2^2 \\ 2(AD_{21}-B_1C_2)D_{21} & (C_1D_{21}-C_2D_{11})^2-C_2^2\end{bmatrix}$. 显见,$L_B\neq\varnothing$ 当且仅当如下条件之一成立: i) $T_1>0$, $U_1<0$; ii) $T_1<0$, $U_1\geqslant 0$; iii) $T_1=0$, $U_1<0$. 同样,$L_C\neq\varnothing$ 当且仅当如下条件之一成立: i) $T_2>0$, $U_2<0$; ii) $T_2<0$, $U_2\geqslant 0$; iii) $T_2=0$, $U_2<0$. 由引理 1,2,可得到

命题 1. 一阶对象 H_∞ 控制问题可解,且存在静态控制器,当且仅当如下条件之一成立

i) $T_1>0$, $U_1<0$, $T_2>0$, $U_2<0$, $U_1U_2>T_1T_2$;

ii) $T_1>0$, $U_1<0$, $T_2<0$, $U_2\geqslant 0$;

iii) $T_1>0$, $U_1<0$, $T_2=0$, $U_2<0$;

iv) $T_1<0$, $U_1\geqslant 0$, $T_2>0$, $U_2<0$;

v) $T_1<0$, $U_1\geqslant 0$, $T_2<0$, $U_2\geqslant 0$, $U_1U_2<T_1T_2$;

vi) $T_1<0$, $U_1\geqslant 0$, $T_2=0$, $U_2<0$;

vii) $T_1=0$, $U_1<0$, $L_C\neq\varnothing$.

命题 2. 一阶对象 H_∞ 控制问题可解,但不存在静态控制器,当且仅当如下条件成立

$$T_i<0,\quad U_i>0(i=1,2),\quad U_1U_2\geqslant T_1T_2,$$

例如,考虑 $\left[\begin{array}{c|cc} -1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 0\end{array}\right]$ 的 H_∞ 控制问题. 经计算 $\begin{bmatrix} T_1 & U_1 \\ T_2 & U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 8 \\ -8 & 63\end{bmatrix}$,命题 2 条件满足,故

一阶对象 H_∞ 控制问题可解，因而必存在一阶的 H_∞ 控制器，但不存在静态控制器. 由引理 1，2 可得同样结论.

对本例中广义对象，虽然其 H_∞ 控制问题可解，输出变量数为 1，但不存在一个 $n_p-n_y=0$ 阶的控制器，这也表明文献[5]的推测是不成立的.

4 结语

周知，确定性线性系统满足分离原理，当控制问题可解时，基于最小阶观测器理论，总可以构造出一个阶数为 n_p-n_y 的降阶控制器，但在 H_∞ 控制问题中分离原理不再保持，从而导致确定性线性系统中的一些结论在 H_∞ 控制问题中不再成立，本文所讨论的问题即为这样的一个例子. 对一般的 H_∞ 控制问题，广义对象阶是最小阶 H_∞ 控制器阶的可达上界. 低阶 H_∞ 控制器的存在性决定于具体的广义对象的结构和参数.

参 考 文 献

1 Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, Francis B A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, **34**(8):831～847

2 Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 1994, **30**(8):1307～1317

3 Stoovogel A A, Saberi A, Chen B M. A reduced-order observer based control design for H_∞-optimization. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(2):355～360

4 Xin X, Guo L, Feng C B. Reduced-order controllers for continuous and discrete-time singular H_∞ control problems based on LMI. *Automatica*, 1996, **32**(11):1581～1585

5 郭雷，忻欣，冯纯伯. 基于 LMI 的一种统一的降阶控制器设计方法. 中国科学(E)，1997，**27**(4):353～361

曾建平　现为北京航空航天大学博士生. 感兴趣的领域有：H_∞ 控制理论、线性系统等.

程　鹏　1962 年毕业于北京大学数学力学系，现任北京航空航天大学自动控制系教授、博士生导师. 研究领域为线性系统理论、多变量系统理论、鲁棒控制和运动稳定性等.

(上接第 650 页)

七、作者必须对稿件内容的真实性和可靠性负责.

八、本编辑部在收稿后一周内通知作者，并在稿件修订过程中与作者保持联系. 如果作者在来稿中不作特殊说明，编辑部将只与第一作者联系.

九、已被本刊接受发表的稿件，按审查意见和"作者加工稿件须知"修改后一式两份寄编辑部. 并需附所有作者的中英文简介.

十、来稿刊登与否由编委会最后审定. 编委会有权对来稿作适当文字删改或退请作者修改. 来稿一经发表，按篇酌付稿费，并赠送当期杂志 1 本及若干份抽印本. 经审查后不拟刊登的文稿，一般情况在半年内通知作者.

十一、来稿(一式叁份)请用 A4 纸 1.5 倍行距打印，请寄北京市中关村中国科学院自动化研究所转《自动化学报》编辑部，邮政编码 100080. 本刊欢迎网上投稿. E-mail:aas@ iamail. ia. ac. cn，或 aas@mail. ia. ac. cn.