第 28 卷 第 5 期
2002 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 5
Sept., 2002

离散时间非线性最小相位系统的动态输出反馈镇定[1)]

陈彭年[1] 秦化淑[2] 洪奕光[2] 韩正之[3]

[1](中国计量学院数学组 杭州 310034)

[2](中国科学院系统科学研究所 北京 100080)

[3](上海交通大学自动控制系 上海 200030)

(E-mail: pnchen@mail. hz. zj. cn)

摘 要 研究了离散时间非线性最小相位系统的动态输出反馈镇定. 首先对离散时间非线性系统引入了逼近渐近稳定性的概念. 基于此概念, 提出了一种动态补偿器设计的新方法. 主要结果是, 如果一非线性系统的零动态是逼近渐近稳定的, 则能用动态输出反馈镇定. 动态补偿器的设计是构造性的.

关键词 镇定, 离散时间系统, 非线性系统, 最小相位系统, 动态输出反馈

中图分类号 O231

STABILIZATION OF DISCRETE-TIME MINIMUM PHASE NONLINEAR SYSTEM VIA DYNAMIC OUTPUT FEEDBACK

CHEN Peng-Nian[1] QIN Hua-Shu[2] HONG Yi-Guang[2] HAN Zheng-Zhi[3]

[1](*Division of Mathematics, China Institute of Metrology, Hangzhou* 310034)

[2](*Institute of System Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

[3](*Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

(E-mail: pnchen@mail. hz. zj. cn)

Abstract In this paper, we study the problem of stabilization of discrete-time minimum phase nonlinear system via dynamic output feedback. The concept of approximately asymptotic stability is introduced. Based on the concept, we propose a new method for design of dynamic compensators of discrete-time minimum phase nonlinear system. The main result is that a discrete-time minimum phase nonlinear system is stabilizable via dynamic output feedback if its zero dynamics is approximately asymptotically stable. The design of dynamic compensators is constructive.

Key words Stabilization, discrete-time system, nonlinear system, minimum phase system, dynamic output feedback

1) 国家自然科学基金(69674004)和国家攀登计划(970211017)资助

收稿日期 2000-04-29 收修改稿日期 2001-07-29

1 引言

对离散时间非线性系统的镇定问题,就研究的方法而言,同连续时间非线性系统有类似之处,但就控制器的设计而言,两者常有本质不同.例如,反向算法在连续时间非线性系统的镇定中取得了很大的成功,但在离散时间非线性系统的镇定中,其作用相当有限[1].因此离散时间非线性系统的镇定常需要单独研究.

在最近十多年间,已有一些作者研究了离散时间非线性系统的输出反馈镇定.文献[2,3]分别利用无损失性和 Lyapunov 函数研究了离散时间非线性系统的静态输出反馈镇定.文献[4]研究了离散时间双线性系统的动态输出反馈镇定.文献[5]研究了一般离散非线性系统的动态输出反馈镇定,但其要求观测方程是指数稳定的.

本文研究离散时间非线性最小相位系统的动态输出反馈镇定.考虑非线性离散时间控制系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)) + g(\boldsymbol{x}(k))\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}(k)) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)\in R^n, \boldsymbol{u}(k)\in R^m, \boldsymbol{y}(k)\in R^p; \boldsymbol{f}:U\to R^n, g:U\to R^{n\times m}, \boldsymbol{h}:U\to R^p, \boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{h}$ 都是 C^∞ 映射;U 是原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个开邻域.

设系统(1)是单输入单输出的并有相对阶 r[6]. 则用局部坐标变换,可将系统(1)表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}(k+1) = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{z}(k),\boldsymbol{\xi}(k)) + \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{z}(k),\boldsymbol{\xi}(k))u(k) \\ \xi_1(k+1) = \xi_2(k) \\ \cdots \\ \xi_{r-1}(k+1) = \xi_r(k) \\ \xi_r(k+1) = h_0(z(k),\xi(k),u(k)) \\ y(k) = \xi_1(k) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{z}(k)\in R^{n-r}, \boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_r)^{\mathrm{T}}\in R^r, \dfrac{\partial}{\partial u}h_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi},u)|_{z=0,\xi=0,u=0}\neq 0$.

系统(2)的零动态为

$$\boldsymbol{z}(k+1) = \boldsymbol{f}_0(z(k),0) + \boldsymbol{g}_0(z(k),0)q(\boldsymbol{z}(k)) \tag{3}$$

其中 $u=q(z)$是隐函数方程

$$h_0(\boldsymbol{z},0,u) = 0 \tag{4}$$

的解. 由于$\dfrac{\partial}{\partial u}h_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi},u)|_{z=0,\xi=0,u=0}\neq 0$,该解必定在 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ 的某邻域内存在,而且 $q(\boldsymbol{z})$是 $\boldsymbol{z}$ 的 C^∞ 函数.

系统(2)被称为最小相位系统,如果系统(3)是渐近稳定的[6].类似于连续时间系统,如果系统(2)是最小相位,则能用状态反馈镇定[6].但输出反馈镇定是更为有意义的,因为系统常常不能利用全部状态变量,而只能测量到输出量.虽然我们研究过连续时间非线性最小相位系统的动态输出反馈镇定,但那里的方法并不适用于离散时间非线性最小相位系统.

在本文中,我们引入了离散时间逼近渐近稳定性概念.连续时间逼近渐近稳定性的概念已在文献[7]中引入,但离散时间系统逼近渐近稳定性概念及其有关的研究我们并没见到.基于离散时间逼近渐近稳定性的概念,我们证明了一个稳定性定理,并将此定理应用于离散

时间非线性最小相位系统的镇定,我们的主要结论是,如果系统(3)是逼近渐近稳定的,则系统(2)能用动态输出反馈镇定.本文提出的设计动态补偿器的方法是构造性的,完全不同于先前研究中的方法.

2 预备知识

我们先引入逼近渐近稳定性概念.考虑离散时间系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(k)) \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)\in R^n$,$\boldsymbol{F}\in C^\infty(U,R^n)$,$\boldsymbol{F}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,$U$ 是 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的开邻域.

定义 1. 系统(5)被称为 N(N 为正整数)阶逼近渐近稳定的.如果 $\phi\in C(U,R^n)$,$\phi(x)=0(\|\boldsymbol{x}\|^{N+1})$,系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(k))+\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}(k)) \tag{6}$$

是渐近稳定的.

定义 2. 称系统(5)是逼近渐近稳定的,如果存在正整数 N,使得系统(5)是 N 阶逼近渐近稳定的.

由定义 1 和定义 2 知,一个逼近渐近稳定的系统具有一定的鲁棒性,也就是说在阶数足够高的扰动下,它仍能保持渐近稳定性,这一点对实际系统是很重要的. 如果一个实际系统虽然稳定,但不是逼近渐近稳定,那么它在任何小的干扰下,就可能变得不稳定,也就是说其稳定性是非常容易失去的,这样的系统实际上是不可靠的.

下面我们利用逼近稳定性的概念引入一个稳定性引理,此引理在本文中起着重要作用.考虑离散时间非线性系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{w}(k))\\ \boldsymbol{w}(k+1)=\boldsymbol{B}w(k)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{w}(k))\end{cases} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$,$\boldsymbol{w}\in R^k$,$\boldsymbol{F}(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbf{0}$;$B$ 是 $m\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=0(\|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\|^2)$,$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 是 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=\mathbf{0}$ 的一个邻域内的 C^∞映射.

引理 1. 假设下面条件成立:

(i) B 的特征值的绝对值小于 1;

(ii) 系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(k),\mathbf{0}) \tag{8}$$

是 N 阶逼近渐近稳定的;

(iii) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},0)=O(\|\boldsymbol{x}\|^{N+1})$.

则系统(7)渐近稳定.

引理 1 的证明可以仿照连续时间系统相应的 Malkin 定理的证明进行[7]. 因为其严格证明较长,这里省去.

为了便于研究,我们先利用动态补偿器将系统(2)变为一种标准形式. 考虑系统(2)和动态系统

$$\begin{cases}\lambda(k+1)=v(k)\\ u(k)=\lambda(k)\end{cases} \tag{9}$$

其中 $v(k)$和 $u(k)$分别是系统(9)的输入和输出.

设

$$\xi_{r+1} = h_0(z,\xi,\lambda) \tag{10}$$

其中 $h_0(z,\xi,\lambda)=h_0(z,\xi,u)|_{u=\lambda}$.

引理 2. 设系统(2)的零动态(3)是 N 阶逼近渐近稳定的. 系统(2)和(9)构成的闭环系统在变换(10)之下化为

$$\begin{cases} z(k+1) = \boldsymbol{f}_0(z(k),\boldsymbol{\xi}(k)) + \boldsymbol{g}_0(z(k),\boldsymbol{\xi}(k))q_0(z(k),\boldsymbol{\xi}(k),\xi_{r+1}(k)) \\ \xi_1(k+1) = \xi_2(k) \\ \cdots \\ \xi_r(k+1) = \xi_{r+1}(k) \\ \xi_{r+1}(k+1) = h_1(z(k),\boldsymbol{\xi}(k),\xi_{r+1}(k),v(k)) \\ y(k) = \xi_1(k) \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\lambda=q_0(z,\xi,\xi_{r+1})|$是方程(10)的解,并且具有性质

(i) $\frac{\partial}{\partial v}h_1(z,\xi,\xi_{r+1},v)|_{(z,\xi,\xi_{r+1},v)=0}\neq 0$;

(ii) 系统

$$z(k+1) = \boldsymbol{f}_0(z(k),\mathbf{0}) + \boldsymbol{g}_0(z(k),\mathbf{0})q_0(z(k),\mathbf{0},0) \tag{12}$$

是 N 阶逼近渐近稳定的.

证明. 系统(2)和(9)构成的闭环系统为

$$\begin{cases} z(k+1) = \boldsymbol{f}_0(z(k),\boldsymbol{\xi}(k)) + \boldsymbol{g}_0(z(k),\boldsymbol{\xi}(k))\lambda(k) \\ \xi_1(k+1) = \xi_2(k) \\ \cdots \\ \xi_{r-1}(k+1) = \xi_r(k) \\ \xi_r(k+1) = h_0(z(k),\boldsymbol{\xi}(k),\lambda(k)) \\ \lambda(k+1) = v(k) \\ y(k) = \xi_1(k) \end{cases} \tag{13}$$

将式(10)和 $\lambda=q_0(z,\xi,\xi_{r+1})$代入系统(13),就得到系统(11)的前 $r+1$ 个表达式,再设 $h_1(z(k),\xi(k),\xi_{r+1}(k),v(k))$是将系统(11)前 $r+1$ 个表达式和 $\lambda(k+1)=v(k)$代入 $h_0(z(k+1),\xi(k+1),\lambda(k+1))$得到的表达式,由此知系统(11)成立.

下面证明系统(11)具有性质(i)和(ii). 由变换(10)知

$$\frac{\partial}{\partial v}h_1(z,\xi,\xi_{r+1},v)|_{(z,\xi,\xi_{r+1},v)=0} = \frac{\partial}{\partial u}h_0(z,\xi,u)|_{(z,\xi,u)=0} \neq 0.$$

因此性质(i)成立.

由式(4)和(10)知,$q_0(z,0,0)=q(z)$. 因此有

$$\boldsymbol{f}_0(z,\mathbf{0}) + \boldsymbol{g}_0(z,\mathbf{0})q_0(z,\mathbf{0},0) = \boldsymbol{f}_0(z,\mathbf{0}) + \boldsymbol{g}_0(z,\mathbf{0})q(z).$$

由此及系统(3)的 N 阶逼近渐近稳定性推知系统(12)是 N 阶逼近渐近稳定的. 因此性质(ii)成立.

证毕.

3 动态输出反馈镇定

在介绍本文的主要结果(定理 1)之前,先提出下面的引理.

引理 3. 设条件(i) $g_0(z,\xi)=\mathbf{0}$,(ii) 系统(3)是 N 阶逼近渐近稳定的,(iii) $h_0(z,\mathbf{0},0)=0(\|z\|^{N+1})$成立. 则系统(2)能用动态输出反馈镇定.

证明. 设 $\alpha=\frac{\partial}{\partial u}h_0(z,\xi,u)|_{(z,\xi,u)=0}$, $F(z,\xi,u)=h_0(z,\xi,u)-\sum_{i=1}^{r}a_i\xi_i-\alpha u$,使 $F(z,\xi,u)=O(\|(z,\xi,u)\|^2)$,则系统(2)可以表示成

$$\begin{cases}z(k+1)=f_0(z(k),\xi(k))\\ \xi(k+1)=A\xi(k)+\alpha Bu(k)+BF(z(k),\xi(k),u(k))\\ y(k)=C\xi(k)\end{cases}\tag{14}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\&&\cdots&&\\0&0&0&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_r\end{bmatrix}\in R^{r\times r},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}\in R^{r\times 1},\quad C=[1\quad 0\quad\cdots\quad 0]\in R^{1\times r}.$$

显然 $\sum(C,A,B)$是可控可观系统. 因为 $\alpha\neq 0$,所以存在动态补偿器[8]

$$\begin{cases}\zeta(k+1)=S\zeta(k)+Ry(k)\\ u(k)=-Ky(k)+Q\zeta(k)\end{cases}\tag{15}$$

其中 S,R,K,Q 是适当维数的矩阵,使得矩阵$\begin{bmatrix}A-\alpha BKC&\alpha BQ\\RC&S\end{bmatrix}$的特征值的绝对值全小于 1.

因此,系统(14)和(15)构成的闭环系统为

$$\begin{cases}z(k+1)=f_0(z(k),\xi(k))\\ \xi(k+1)=(A-\alpha BKC)\xi(k)+\alpha BQ\zeta(k)+BF(z(k),\xi(k),-KC\xi(k)+Q\zeta(k))\\ \zeta(k+1)=S\zeta(k)+RC\xi(k)\end{cases}\tag{16}$$

由条件(iii)知

$$F(z,\xi,-KC\xi+Q\zeta)|_{\xi=0,\zeta=0}=F(z,\mathbf{0},0)=h_0(z,\mathbf{0},0)=O(\|z\|^{N+1}).$$

根据条件(ii)和引理 1,系统(16)是渐近稳定的,即系统(2)能用动态输出反馈镇定. 证毕.

定理 1. 如果系统(2)的零动态(3)是逼近渐近稳定的,则系统(2)能用动态输出反馈镇定.

证明. 为了简化定理 1 的证明,我们先作一点技术性的说明. 当系统(2)和系统(3)中 $g_0(z,\xi)\neq 0$ 时,根据引理 2,总可以加上一个动态系统并利用适当的局部坐标变换,化为系统(11)的形式. 为证明系统(2)能用动态输出反馈镇定,我们只证明系统(11)能用动态输出反馈镇定. 系统(11)与系统(2)有相同的零动态,并且在系统(11)中控制对零动态方程无直接作用. 因此,不失一般性,我们可以在系统(2)和系统(3)中,假设 $g_0(z,\xi)=0$.

因为系统(3)是逼近渐近稳定的,所以存在正整数 N,使得系统(3)是 N 阶逼近渐近稳定的.

设

$$h_0(z,\mathbf{0},0)=O(\|z\|^j)\tag{17}$$

如果 $j\geqslant N+1$,则根据引理 3,系统(2)能用动态输出反馈镇定.

设 $j<N+1$. 构造动态系统

$$\begin{cases}\lambda_1(k+1)=\lambda_2(k)\\ \cdots\\ \lambda_{l-1}(k+1)=\lambda_l(k)\\ \lambda_l(k+1)=\mu(k)\\ u(k)=\lambda_1(k)\end{cases} \tag{18}$$

其中 μ 是输入,$u=\lambda_1$ 是输出,l 是一个待定的正整数.

现在引入下面的变换

$$\begin{cases}\xi_{r+i+1}=h_i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi},\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i},\lambda_{i+1})\\ h_{i+1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi},\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i+1},\lambda_{i+2})=h_i(f_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi}),\xi_2,\cdots,\xi_{r+i+2},\lambda_{i+2})\end{cases} \tag{19}$$

其中 $i=0,1,2,\cdots,l-1$,$h_0(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi},\xi_r,\lambda_1)=h_0(z,\xi,\lambda_1)$,$\lambda_{l+1}=\mu$.

显然,对 $i=0,1,2,\cdots,l$,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_{i+1}}h_i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi},\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i+1},\lambda_{i+1})\big|_{(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i+1},\lambda_{i+1})=0}\neq 0 \tag{20}$$

根据隐函数定理和式(20),式(19)的第一个方程局部地有解

$$\lambda_i=q_i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi},\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i}),\quad i=1,2,\cdots,l \tag{21}$$

由式(17)和(19)知,

$$h_i(\boldsymbol{z},\mathbf{0},0,\cdots,0,0)=O(\|\boldsymbol{z}\|^j),\quad i=1,2,\cdots,l \tag{22}$$

由式(22)和隐函数方程性质知

$$q_i(\boldsymbol{z},\mathbf{0},0,\cdots,0)=O(\|\boldsymbol{z}\|^j),\quad i=1,2,\cdots,l \tag{23}$$

在变换(19)之下,由系统(2)和(18)构成的闭环系统为

$$\begin{cases}\boldsymbol{z}(k+1)=f_0(\boldsymbol{z}(k),\boldsymbol{\xi}(k))\\ \xi_1(k+1)=\xi_2(k)\\ \cdots\\ \xi_{r+l-1}(k+1)=\xi_{r+l}(k)\\ \xi_{r+l}(k+1)=h_l(\boldsymbol{z}(k),\boldsymbol{\xi}(k),\xi_{r+1}(k),\cdots,\xi_{r+1}(k),\mu(k))\\ y(k)=\xi_1(k)\end{cases} \tag{24}$$

设 $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_{n-r})^{\mathrm{T}}\in R^{n-r}$. 用 $R_j[\boldsymbol{z}]$表示全体以 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-r}$为变元的实系数的次数为 j 的齐次多项式和零多项式所构成的集合,则 $R_j[\boldsymbol{z}]$按一种自然的方式构成了实数域上的有限维向量空间. 设 $p_1(\boldsymbol{z}),p_2(\boldsymbol{z}),\cdots,p_s(\boldsymbol{z})$是线性空间 $R_j[\boldsymbol{z}]$的一组基,其中 s 为 $R_j[\boldsymbol{z}]$的维数. 设

$$p(\boldsymbol{z})=(p_1(\boldsymbol{z}),p_2(\boldsymbol{z}),\cdots,p_s(\boldsymbol{z}))^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

由式(22)知,$h_i(\boldsymbol{z},\mathbf{0},0,\cdots,0,0)$可以表示成

$$h_i(\boldsymbol{z},\mathbf{0},0,\cdots,0,0)=g_i(\boldsymbol{z})+\phi_i(\boldsymbol{z}),\quad i=0,1,2,\cdots \tag{26}$$

其中 $g_i(\boldsymbol{z})\in R_j[\boldsymbol{z}]$,$\phi_i(\boldsymbol{z})=O(\|\boldsymbol{z}\|^{j+1})$.

由式(25)和(26)知,存在 $c_i\in R^s$,使得

$$h_i(\boldsymbol{z},\mathbf{0},0,\cdots,0,0)=c_i^{\mathrm{T}}p(\boldsymbol{z})+\phi_i(\boldsymbol{z}),\quad i=0,1,2,\cdots \tag{27}$$

因此,可以将 $h_i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi},\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i},\lambda_{i+1})$重新写为

$$h_i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi},\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i},\lambda_{i+1})=c_i^{\mathrm{T}}p(\boldsymbol{z})+\varphi_i(\boldsymbol{z})+\psi_i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi},\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i},\lambda_{i+1}),\quad i=0,1,\cdots \tag{28}$$

其中 ψ_i 具有性质 $\psi_i(z,\mathbf{0},0,\cdots,0,0)=0,\quad i=0,1,2,\cdots,l.$

由线性代数知,对 $c_i\in R^s,\ i=0,1,2,\cdots$,必存在正整数 $l(l\leqslant s)$ 和常数 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{l-1}$,使得

$$c_l=\sum_{i=0}^{l-1}\alpha_i c_i \tag{29}$$

固定使式(29)成立的 l.

设 $\lambda_{l+1}=\mu$. 则由式(19),(28)和(29)知

$$\begin{aligned}&h_l(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+l},\mu)=\\&\qquad c_l^{\mathrm T}p(z)+\varphi_l(z)+\psi_l(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+l},\mu)=\\&\qquad\sum_{i=0}^{l-1}\alpha_i c_i p(z)+\varphi_l(z)+\psi_l(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+l},\mu)=\\&\qquad\sum_{i=0}^{l-1}\alpha_i(\xi_{r+i+1}-\varphi_i(z)-\psi_i(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i},\lambda_i))+\\&\qquad\varphi_l(z)+\psi_l(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+l},\mu)\end{aligned} \tag{30}$$

设 $\mu=\eta(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)$ 是下面方程在 $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\cdots,\lambda_l=0$ 的某领域内的解

$$-\sum_{i=0}^{l-1}\alpha_i\psi_i(\mathbf{0},\mathbf{0},0,\cdots,0,\lambda_{i+1})+\psi_l(\mathbf{0},\mathbf{0},0,\cdots,0,\mu)=0 \tag{31}$$

由式(20)和(28)知

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\psi_l(\mathbf{0},\mathbf{0},0,\cdots,0,\mu)\big|_{\mu=0}=\frac{\partial}{\partial\mu}h_l(\mathbf{0},\mathbf{0},0,\cdots,0,\mu)\big|_{\mu=0}\neq 0.$$

因此方程(31)关于 μ 是局部可解的.

设

$$\begin{aligned}&\bar\eta(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+l})=\eta(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)\big|_{\{\lambda_i=q_i(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i}),i=1,\cdots,l\}},\\&\bar h_l(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+l},\mu_1)=h_l(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+l},\mu_1+\eta(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+l}))\end{aligned} \tag{32}$$

再设

$$q_i(z)=q_i(z,\mathbf{0},0,\cdots,0),\quad i=1,2,\cdots,l \tag{33}$$

由式(20)和(32)知,

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\bar h_l(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+l},\mu_1)\big|_{(z,\xi,\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+i},\mu_1)}\neq 0 \tag{34}$$

我们可以证明下式成立

$$\bar h_l(z,\mathbf{0},0,\cdots,0,0)=O(\|z\|^{j+1}) \tag{35}$$

取反馈律

$$\mu=\eta(\lambda_1,\cdots,\lambda_l)+\mu_1 \tag{36}$$

在反馈律(36)下,系统(24)变成

$$\begin{cases}z(k+1)=f_0(z(k),\xi(k))\\ \xi_1(k+1)=\xi_2(k)\\ \cdots\\ \xi_{r+l-1}(k+1)=\xi_{r+l}(k)\\ \xi_{r+l}(k+1)=\bar h_l(z(k),\xi(k),\xi_{r+i}(k),\cdots,\xi_{r+l}(k),\mu_1(k))\\ y(k)=\xi_1(k)\end{cases} \tag{37}$$

由式(35)可以看到$\overline{h}_l(z,\mathbf{0},0,\cdots,0,0)$的阶数比$h_0(z,\mathbf{0},0)$的阶数至少大1.

显然,上述变换可继续进行,因此只要选取适当大的l,重复上述变换不超过$N-j+1$次,即可使得

$$\overline{h}_l(z,\mathbf{0},0,\cdots,0,0)=O(\|z\|^{N+1}) \tag{38}$$

由式(38)知,如果用$\overline{h}_l(z,\boldsymbol{\xi},\xi_{r+1},\cdots,\xi_{r+l},\mu_l)$去代替$h_0(z,\boldsymbol{\xi},\mu)$,则系统(37)满足引理3的全部条件,因此能用动态输出反馈镇定. 由此知系统(2)能用动态输出反馈镇定. 证毕.

注 1. 在确定反馈律时,必须知道方程(31)的解$\mu=\eta(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$. 一般讲要求得精确的$\mu=\eta(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$是难以做到的,但对于我们的目的来说不必求其精确解,只须求得其$N+1$阶近似解就可以了. 这里的N是系统(2)的零动态逼近渐近稳定性的阶数. 而$N+1$阶近似解可利用迭代法求解.

下面举一例说明本文方法的应用.

例 1. 考虑控制系统

$$\begin{cases} z(k+1)=z(k)-z^3(k)+\xi_1^2(k)+\xi_2(k) \\ \xi_1(k+1)=\xi_2(k) \\ \xi_2(k+1)=z^2(k)+\xi_1^2(k)+\mu(k)+\mu^2(k) \\ y(k)=\xi_1(k) \end{cases} \tag{39}$$

其中μ是输入,y是输出.

容易看到系统(39)的零动态为

$$z(k+1)=z(k)-z^3(k) \tag{40}$$

系统(40)是3阶逼近渐近稳定的.

设$h_0(z,\xi_1,\xi_2,u)=z^2+\xi_2^2+u+u^2$,则$h_0(z,0,0,0)=z^2$. 因此$h_0(z,0,0,0)$的阶数小于3,为此引进动态系统

$$\begin{cases} \lambda_1(k+1)=\lambda_2(k) \\ \cdots \\ \lambda_{l-1}(k+1)=\lambda_l(k) \\ \lambda_l(k+1)=\mu(k) \\ u(k)=\lambda_1(k) \end{cases} \tag{41}$$

其中μ是输入,y是输出.

对系统(39)和(41)构成的闭环系统作变换. 设

$$\xi_3=z^2+\xi_1^2+\lambda_1+\lambda_1^2 \tag{42}$$

则有

$$\xi_3(k+1)=(z(k)-z^3(k)+\xi_1^2(k)+\xi_2^2(k))^2+\xi_2^2(k)+\lambda_2(k)+\lambda_2^2(k) \tag{43}$$

将式(43)的右端记为$h_1(z(k),\xi_1(k),\xi_2(k),\lambda_2(k))$. 经化简和直接计算有

$$h_1(z,0,0,0,0)-h(z,0,0,0,0)=O(\|z\|^4).$$

因此只需取$l=1$即可. 考虑方程

$$-\lambda_1-\lambda_1^2+\mu+\mu^2=0 \tag{44}$$

由方程(44)解得$\mu=\lambda_1$. 因此作反馈$\mu=\lambda_1+\mu_1$. 将$\lambda_2=\lambda_1+\mu_1(\lambda_2=\mu)$代入式(43)得

$$\xi_3(k+1)=z_2^2(k)+\xi_2^2(k)+\lambda_1(k)+\mu_1(k)+(\lambda_1(k)+\mu_1(k))^2+$$

$$
\begin{aligned}
&O(\| z(k),\xi_1(k),\xi_2(k),\xi_3(k) \|^4) = \\
&\xi_3(k) - \xi_1^2(k) + \xi_2^2(k) + \mu_1(k) + \mu_1^2(k) + \\
&2\lambda_1(k)\mu_1(k) + O(\| (z(k),\xi_1(k),\xi_2(k),\xi_3(k)) \|^4)
\end{aligned} \tag{45}
$$

设 $\lambda_1 = q_1(z,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 为式(42)的解. 再设

$$
\bar{h}_1(z,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\mu_1) = h_1(z,\xi_1,\xi_2,\mu_1 + q_1(z,\xi_1,\xi_2,\xi_3)),
$$

由式(45)可知 $\bar{h}_1(z,0,0,0,0) = O(\| z \|^4)$. 根据引理 3，可以给出由系统(39)和(41)构成的闭环系统的一个线性动态补偿器. 略去具体计算，直接给出系统(39)的一个完整的动态补偿器为

$$
\begin{cases}
\lambda(k+1) = (0 \quad 0 \quad -1)\boldsymbol{w}(k), \\
\boldsymbol{w}(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{w}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{w}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} y(k), \\
u(k) = \lambda(k).
\end{cases}
$$

4　结束语

本文对零动态为逼近渐近稳定的非线性最小相位系统，提出了一种构造性的动态补偿器设计方法，它能保证闭环系统也是逼近渐近稳定的. 一般讲，所构造的动态补偿器的阶数较高，因此如何设计一个最小阶的动态补偿器是一个值得研究的问题. 另外，将本文的结果推广到非最小相位系统和无相对阶的系统也是值得研究的问题.

参　考　文　献

1　Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: Wiley, 1995

2　Byrnes C I, Lin W. Losslessness, feedback equivalence and global stabilization of discrete-time nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1995, **39**(1):83～95

3　Tsinias J, Kalouptsids N. Output feedback stabilization of discrete-time control systems. *IMA J. Contr. Inform.*, 1990, **7**(2):257～268

4　Lin W, Byrnes C I. KYP Lemma, State feedback and dynamic output feedback in discrete-time bilinear systems. *Syst. Control Lett.*, 1994, **23**(2):127～136

5　Lin W, Byrnes C I. Design of discrete-time nonlinear control systems via smooth feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(12):2340～2346

6　Momaco S, Normand-Cyrot D. Zero dynamics of sampled nonlinear systems. *Syst. Control Lett.*, 1988, **11**(3):229～234

7　Hahn W. Stability of Motion. New York: Springer-Verlag, 1967

8　Wonham W M. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. 2nd Edition. New York: Springer-Verlag, 1979

陈彭年　简介见本刊第 21 卷 3 期.

秦化淑　简介见本刊第 24 卷 4 期.

洪奕光　简介见本刊第 24 卷 4 期.

韩正之　简介见本刊第 18 卷 4 期.