第 28 卷 第 5 期
2002 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 5
Sept. , 2002

短文

不确定随机系统的满意估计问题研究[1)]

钱龙军 盛安冬 郭 治
(南京理工大学自动化系 南京 210094)
(E-mail: qlongjun@mail.njust.edu.cn)

摘 要 基于 LMI 技术给出了一个满足期望误差方差和快速性指标的满意状态估计器的设计方法. 该方法避免了使用矩阵秩的条件,因此适用于参数及噪声强度不确定的随机线性系统,而且便于使用计算机求解. 文中所给出的数值算例说明了该方法的有效性.

关键词 不确定随机线性系统,满意估计,LMI 技术
中图分类号 O231.3

ON SATISFACTORY ESTIMATION FOR STOCHASTIC LINEAR SYSTEMS WITY UNCERTAINTIES

QIAN Long-Jun SHENG An-Dong GUO Zhi
(*Automation Department, Nanjing University of Science Technology, Nanjing* 210094)
(E-mail: qlongjun@mail.njust.edu.cn)

Abstract Based on LMI technology, a design method of satisfactory estimators that satisfy constraints on estimation error variance and pole location is proposed. The rank conditions adopted in the previous works are avoided, thus this method is feasible for stochastic linear systems with uncertainties in both system parameters and noise densities and is suitable for computers to work out the solutions. Finally a numerical example is included to demonstrate the effectiveness of the method.

Key words Stochastic linear system with uncertainty, satisfactory estimation, LMI technology

1 引言

最近有许多文献[1～6]讨论了不确定线性系统的状态估计器设计问题,由于受研究方法的限制,所得到的结果不便于在实际中应用. 文献[1]中的估计器带有原系统中的不确定

1) 国家自然科学基金(60174028)和南京理工大学科研发展基金资助
收稿日期 2000-04-29 收修改稿日期 2001-10-30

参数，而不确定参数的确切性质是无法获知的. 文献[2～6]避免了这个问题，但在证明中也要使用矩阵秩约束的条件. 由于矩阵的秩对其元素变化非常敏感，在估计器设计过程中矩阵秩的假设条件不易满足. 像不确定参数处理不当这类无法预料的因素就会破坏矩阵秩的条件，更何况对于随机系统，噪声的强度往往也是不确定的.

基于 LMI 技术，本文讨论了满足期望误差方差和快速性指标的满意状态估计器的设计问题[7]，避免了使用矩阵秩的假设条件，所得到的结果适用于参数及噪声强度不确定的随机线性系统，而且可利用有效的内点优化方法及其商品软件 Matlab 中 LMI 工具箱求解[8].

2 问题描述

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + \Delta A(\boldsymbol{\sigma}))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\upsilon}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = (C + \Delta C(\boldsymbol{\sigma}))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态变量，$\boldsymbol{y}\in R^p$ 为测量输出；$\boldsymbol{\omega}(t)$和 $\boldsymbol{\upsilon}(t)$为不相关的零均值白噪声，其强度是不确定的，分别满足 $0<W_0\leqslant W$ 和 $0<V_0\leqslant V$，并且和初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$不相关；A,C 是适维的常数矩阵；$\Delta A(\boldsymbol{\sigma})$和 $\Delta C(\boldsymbol{\sigma})$表示参数不确定的扰动矩阵，$\boldsymbol{\sigma}$ 为属于某一紧致集的不确定参数向量.

假设. 对所有允许的 $\boldsymbol{\sigma}$，$(A+\Delta A(\boldsymbol{\sigma}))$是稳定的；不确定矩阵 $\Delta A(\boldsymbol{\sigma})$，$\Delta C(\boldsymbol{\sigma})$分别具有如下结构

$$\Delta A(\boldsymbol{\sigma}) = G_1\sum(\boldsymbol{\sigma})H,\quad \Delta C(\boldsymbol{\sigma}) = G_2\sum(\boldsymbol{\sigma})H \tag{2}$$

其中 G_1,G_2,H 为已知的适维矩阵，$\sum(\boldsymbol{\sigma})$为适维的扰动参数矩阵，且满足$\sum(\boldsymbol{\sigma})\sum^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma})\leqslant I$，$I$ 为适维的单位矩阵.

考虑如下结构的状态估计器

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \hat{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + K\boldsymbol{y}(t) \tag{3}$$

其中 $\hat{A}\in R^{n\times n}$，$K\in R^{n\times p}$为待定的矩阵变量. 设估计误差 $\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)$，于是

$$\dot{\boldsymbol{e}}(t) = \hat{A}\boldsymbol{e}(t) + (A - \hat{A} - KC + \Delta A(\boldsymbol{\sigma}) - K\Delta C(\boldsymbol{\sigma}))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{\upsilon}(t) - K\boldsymbol{\omega}(t) \tag{4}$$

定义. $\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{e}(t) \end{pmatrix}$，$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A-\hat{A}-KC & \hat{A} \end{pmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{\upsilon}}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\upsilon}(t) \\ \boldsymbol{\upsilon}(t)-K\boldsymbol{\omega}(t) \end{pmatrix}$，$\bar{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_1-KG_2 \end{pmatrix}$，$\bar{V}_0=\begin{pmatrix} V_0 & V_0 \\ V_0 & V_0+KV_0K^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，$\bar{V}=\begin{pmatrix} V & V \\ V & V+KVK^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，$\bar{H}=(H\quad 0)$，$\Delta\bar{A}=\bar{G}\sum\bar{H}$.
可见 $\bar{\boldsymbol{\upsilon}}(t)$为零均值的白噪声，强度满足 $0<\bar{V}_0\leqslant\bar{V}$. 增广系统为

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})\bar{\boldsymbol{x}}(t) + \bar{\boldsymbol{\upsilon}}(t) \tag{5}$$

由假设，系统(5)是稳定的，所以其状态方差 X_0 满足 Riccati 方程

$$(\bar{A} + \Delta\bar{A})X_0 + X_0(\bar{A} + \Delta\bar{A})^{\mathrm{T}} + \bar{V}_0 = 0 \tag{6}$$

且有分解 $X_0=\begin{pmatrix} X_x & X_{xe}^{\mathrm{T}} \\ X_{xe} & X_e \end{pmatrix}$，其中对称正定矩阵 $X_e\in R^{n\times n}$表示估计误差的方差矩阵.

对于估计器(4)，不仅要求其满足期望的误差方差 X_e 指标，而且还需要求暂态性能满足一定的快速性指标. 所以满意估计问题可归结如下.

问题. 寻找矩阵 $\hat{A}$和 K，使得估计器(4)满足如下性能指标：

1) 对于给定的 $\alpha>0$，矩阵 $\hat{A}$的所有特征根的实部满足 $\mathrm{Re}\{\lambda(\hat{A})\}<-\alpha$；

2) 对于给定的 $X_{e0}>0$，估计误差方差矩阵满足 $X_e<X_{e0}$.

3 主要结论

由假设和不等式 $\overline{V}_0\leqslant\overline{V}$,对于任意的对称正定矩阵 $X\in R^{2n\times 2n}$和 $\beta>0$,有

$$(\overline{A}+\Delta\overline{A})X+X(\overline{A}+\Delta\overline{A})^{\mathrm{T}}+\overline{V}_0\leqslant\overline{A}X+X\overline{A}^{\mathrm{T}}+\beta\overline{G}\overline{G}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\beta}X\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{H}X+\overline{V}\quad(7)$$

设 $X_1>0,X_2>0$ 是两个 $n\times n$ 的对称正定矩阵，$X=\mathrm{diag}\{X_1,X_2\}$满足矩阵不等式

$$\overline{A}X^{-1}+X^{-1}\overline{A}^{\mathrm{T}}+\beta X^{-1}\overline{G}\overline{G}^{\mathrm{T}}X^{-1}+\frac{1}{\beta}\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{H}+X^{-1}\overline{V}X^{-1}<0\quad(8)$$

那么根据 Riccati 方程对称正定矩阵解的性质和 Schur 补引理,如果 $X_2^{-1}<X_{e0}$，即

$$\begin{pmatrix}-X_2 & I\\ I & -X_{e0}\end{pmatrix}<0\quad(9)$$

则满意估计问题的第二个指标满足. 如果 $X_2>0$ 满足

$$X_2(\hat{A}+\alpha I)+(\hat{A}+\alpha I)^{\mathrm{T}}<0\quad(10)$$

则满意估计问题的第一个指标满足.

下面讨论如何将不等式(8),(9)和(10),转化为两组线性矩阵不等式(LMIs),以求解 $X_1>0,X_2>0$，$\hat{A}$和 K. 由定义 1,可验证式(8)等价于

$$\begin{bmatrix}\begin{matrix}X_1A+A^{\mathrm{T}}X_1+\\ X_1(V+\beta G_1G_1^{\mathrm{T}})X_1+\frac{1}{\beta}H^{\mathrm{T}}H\end{matrix} & * \\ \begin{matrix}X_2(A-\hat{A}-KC)+\\ X_2(V+\beta G_1G_1^{\mathrm{T}}-\beta KG_2G_1^{\mathrm{T}})X_1\end{matrix} & \begin{matrix}X_2\hat{A}+\hat{A}^{\mathrm{T}}X_2+X_2(V+KWK^{\mathrm{T}}+\\ \beta(G_1-KG_2)(G_1-KG_2)^{\mathrm{T}})X_2\end{matrix}\end{bmatrix}<0\quad(11)$$

其中符号 $*$ 表示对称块矩阵中的对称元素. 对于不等式(11),如果能消除左端(2,2)块中 X_1,X_2 的耦合作用,就可将其转化为 LMIs 求解.

由不等式(11),可知矩阵 $X_1>0$ 应满足 Riccati 不等式

$$Q=:X_1A+A^{\mathrm{T}}X_1+X_1(V+\beta G_1G_1^{\mathrm{T}})X_1+\frac{1}{\beta}H^{\mathrm{T}}H<0\ ,$$

即

$$\begin{bmatrix}-I & *\\ X_1(V+\beta G_1G_1^{\mathrm{T}})^{1/2} & X_1A+A^{\mathrm{T}}X_1+\frac{1}{\beta}H^{\mathrm{T}}H\end{bmatrix}<0\quad(12)$$

在 $X_1>0$ 已获知的条件下,设 $M=X_2K$，$N=X_2\hat{A}$，根据 Schur 补引理,不等式(11)可转化为 LMI

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{\beta}I & * & * & * & *\\ 0 & -I & * & * & *\\ 0 & 0 & -I & * & *\\ 0 & 0 & 0 & Q & *\\ X_2G_1-MG_2 & MW^{1/2} & X_2V^{1/2} & \begin{matrix}X_2A-N-MC+(X_2V+\\ \beta X_2G_1G_1^{\mathrm{T}}-\beta MG_2G_1^{\mathrm{T}})X_1\end{matrix} & N+N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}<0\quad(13)$$

易见,不等式(10)等价于 LMI

$$N + N^{\mathrm{T}} + 2\alpha X_2 < 0 \tag{14}$$

总结上述讨论,可以得到本文的主要结论.

定理. 满意估计问题存在满意解 $\hat{A}$ 和 K 的一个充分条件是存在 $\beta>0$,使得 LMI(12)存在对称正定解 $X_1>0$,并进一步使得 LMIs(9),(13)和(14)存在解 $X_2>0$, $N\in R^{n\times p}$, $M\in R^{n\times p}$. 满意解可表示为 $\hat{A}=X_2^{-1}N$, $K=X_2^{-1}M$.

下面给出满意估计问题一个可用计算机求解,但需人工干预算法:1) 选取适当的正数 β; 2) 解 LMI(12)求出 $X_1>0$, 否则返回步骤 1); 3) 解 LMIs(9),(13)和(14)求出 $X_2>0$, M 和 N,否则返回步骤 1); 4)结束.

4 数值算例

采用文献[6]中的例子. 系统(1)的相应参数为 $A=\begin{pmatrix}-1.5 & -2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, $G_1=\begin{pmatrix}0\\ 0.1\end{pmatrix}$, $\Sigma(\sigma)=\sin(\sigma)$, $H=(1\quad 2)$, $G_2=0.1$, $V=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $W=0.25$. 满意估计问题中的快速性标值为 $\alpha=2$, 期望估计误差方差 X_e 满足 $[X_e]_{11}<0.8^2$, $[X_e]_{22}<0.5^2$.

利用 Matlab 软件的 LMI 工具箱求解. 取 $\beta=1.8$, 由 LMI(12)得到 $X_1=\begin{pmatrix}0.5472 & 0.0211\\ 0.0211 & 0.5826\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}-0.7861 & -0.0543\\ -0.0543 & -1.0117\end{pmatrix}$. 将其带入 LMI(13),获得满意估计器的系数矩阵为 $\hat{A}=\begin{pmatrix}-3.6457 & -1.9497\\ 0.6754 & -2.7032\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}2.1953\\ -0.5905\end{pmatrix}$.

参 考 文 献

1 王子栋,郭 治. 含结构参数扰动的线性连续系统的鲁棒约束方差状态估计. 控制理论与应用, 1996, **13**(4):511~515

2 Yaz E, Skelton Y E. Continuous and discrete state estimation with error covariance assignment. In:Proceedings of the 30th IEEE Conferences of Decision and Control, Brighton, UK, 1991. 3091~3092

3 王子栋,郭 治. 误差方差及圆形区域极点约束下状态估计问题的研究:连续时间情形. 自动化学报, 1996, **22**(1):92~95

4 朱纪洪,郭 治. 一类不确定系统鲁棒状态估计器设计. 控制理论与应用, 1996,**13**(3)319~325

5 朱纪洪,郭 治. 连续时变不确定系统约束方差/H_∞鲁棒状态滤波. 控制理论与应用,1997, **14**(3):389~392

6 朱纪洪,郭 治,胡维礼. 基于方差配置不确定系统的滤波. 自动化学报, 1999, **25**(6):782~785

7 郭 治. 满意控制与估计概述. 见:1998 年中国控制与决策学术年会论文集. 沈阳:东北大学出版社,1998. 1~6

8 Gahinet P, Nemirovsky A, Laub A J, Chilali M. LMI Control Toolbox, Mathworks Inc. Mass. 1995

钱龙军 副教授,博士. 主要研究兴趣为满意控制与估计.

盛安冬 副教授,博士. 从事控制工程应用研究.