第28卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 28,No. 6
2002年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov.,2002

短文

基于互质因子摄动的反馈系统的鲁棒稳定性[1)]

张高民 贾英民
(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)
(E-mail: zhang-gaomin@163.net)

摘 要 考虑对象和控制器同时具有互质因子摄动时闭环系统的鲁棒稳定性问题,得到了闭环系统鲁棒稳定的充要条件并给出了鲁棒控制器的优化设计方法.

关键词 鲁棒稳定性,系统不确定性,互质因子分解
中图分类号 TP273

ROBUST STABILITY OF FEEDBACK SYSTEM WITH COPRIME FACTOR PERTURBATIONS

ZHANG Gao-Min JIA Ying-Min
(7th *Research Division*, *Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, *Beijing* 100083)
(E-mail: zhang-gaomin@163.net)

Abstract Robust stability of the systems is studied with coprime factorization perturbations both in plant and in controller. A necessary and sufficient condition for the closed-loop robust stability is derived and an optimization approach for robust controller is also provided.

Key words Robust stability, system uncertainty, coprime factorization

1 引言

系统不确定性的互质因子摄动描述已经被证明是一种有用的不确定性描述方法[1~2].在已有的大部分结果中,通常仅有对象的摄动被考虑.但是,由于元件老化、参数漂移等多种因素,控制器本身的摄动也是不可避免的且尚未得到足够的重视.因此,本文讨论了如下对象和控制器同时具有互质因子摄动时的闭环稳定性问题,即考虑摄动族

1) 国家攀登计划与教育部高校博士点基金(1999000602)资助
收稿日期 2000-10-13 收修改稿日期 2001-06-21

$$P(N_0,M_0;U_0,V_0;\varepsilon):=$$
$$\left\{(P,C):\begin{matrix}P=(N_0+\Delta N)(M_0+\Delta M)^{-1}\\ C=(U_0+\Delta U)(V_0+\Delta V)^{-1}\end{matrix},\left\|\begin{matrix}\Delta M & \Delta U\\ \Delta N & \Delta V\end{matrix}\right\|_\infty<\varepsilon\right\} \tag{1}$$

其中，$P_0=N_0M_0^{-1}$ 及 $C_0=U_0V_0^{-1}$ 分别是标称对象和控制器的右互质因子分解，ΔM，ΔN，ΔU，ΔV 为不确定摄动．这里为简化起见略去了传递函数阵中的变量 s（下同）．如果式(1)中的任何一个对象 P 和控制器 C 组成的闭环系统都是稳定的，则称式(1)所表示的不确定系统是鲁棒稳定的．为讨论方便，在下面所涉及到的矩阵分解（左分解或右分解）都假定是互质的．

2　主要结果

定理 1. 设标称闭环系统(P_0,C_0)是稳定的．则 $P(N_0,M_0;U_0,V_0;\varepsilon)$鲁棒稳定的充分必要条件是

$$\varepsilon\leqslant\tau\begin{bmatrix}M_0 & U_0\\ N_0 & V_0\end{bmatrix} \tag{2}$$

其中，$\tau(G):=\inf\{\underline{\sigma}(G(j\omega)):\omega\in R\}$，$\underline{\sigma}(\cdot)$表示最小奇异值．

证明. 设$(P,C)\in P(N_0,M_0;U_0,V_0;\varepsilon)$．记 $P=NM^{-1}$，$C=UV^{-1}$，$M-M_0=\Delta M$，$N-N_0=\Delta N$，$U-U_0=\Delta U$，$V-V_0=\Delta V$ 以及

$$T(s)=\begin{bmatrix}M & U\\ N & V\end{bmatrix},\quad T_0(s)=\begin{bmatrix}M_0 & U_0\\ N_0 & V_0\end{bmatrix},\quad \Delta T(s)=\begin{bmatrix}\Delta M & \Delta U\\ \Delta N & \Delta V\end{bmatrix}.$$

则(P,C)或(P_0,C_0)是稳定的当且仅当 $T(s)$或 $T_0(s)$是幺模矩阵[2]．注意到(2)式和 $T(s)=T_0(s)[I+T_0^{-1}(s)\cdot\Delta T(s)]$，可知$(P_0,C_0)$的稳定性保证$(P,C)$也是稳定的．反之，若 $\varepsilon>\tau(T_0(s))$，则由 τ 的定义知存在 $\omega_0\in[0,\infty]$，使得 $\varepsilon>\underline{\sigma}(T_0(j\omega_0))$．因此可选实系数有理矩阵 $\Delta T(s)\in RH_\infty$满足 $\|\Delta T(s)\|_\infty<\varepsilon$ 以及 $T_0(j\omega_0)+\Delta T(j\omega_0)$是奇异的．定义对象 $P=(N_0+\Delta N)(M_0+\Delta M)^{-1}$和控制 $C=(U_0+\Delta U)(V_0+\Delta V)^{-1}$．经过严格的数学推导，可以证明这样构造的 P 和 C 包含在 $P(N_0,M_0;U_0,V_0;\varepsilon)$中且组成的闭环系统是不稳定的（省略）．　　证毕．

应用定理 1 到对象和控制器摄动族

$$P(N_0,M_0,\varepsilon_1)=\left\{P:P=(N_0+\Delta N)(M_0+\Delta M)^{-1},\left\|\begin{pmatrix}\Delta M\\ \Delta N\end{pmatrix}\right\|_\infty<\varepsilon_1\right\} \tag{3}$$

$$P(U_0,V_0,\varepsilon_2)=\left\{C:C=(U_0+\Delta U)(V_0+\Delta V)^{-1},\left\|\begin{pmatrix}\Delta U\\ \Delta V\end{pmatrix}\right\|_\infty<\varepsilon_2\right\} \tag{4}$$

可得下面推论．

推论 1. 在定理 1 的条件下，系统(3)和(4)鲁棒稳定的充分条件是

$$\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\leqslant\tau\begin{bmatrix}M_0 & U_0\\ N_0 & V_0\end{bmatrix}.$$

设 $S(M_0,N_0):=\{(U,V):C=UV^{-1}\in S(P_0)\}$．其中，$S(P_0)$为镇定 P_0 的控制器集合．现在考虑如下的最优鲁棒控制问题：求$(U_1,V_1)\in S(M_0,N_0)$，使得

$$\tau\begin{bmatrix}M_0 & U_1\\ N_0 & V_1\end{bmatrix}=\max_{(U,V)\in S(M_0,N_0)}\tau\begin{bmatrix}M_0 & U\\ N_0 & V\end{bmatrix} \tag{5}$$

令 $P_0=\tilde{M}_0^{-1}\tilde{N}_0$，则存在 $U_0,V_0,\tilde{U}_0,\tilde{V}_0\in RH_\infty$，使得

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N}_0 & \tilde{M}_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 & U_0 \\ N_0 & V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 & U_0 \\ N_0 & V_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N}_0 & \tilde{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix} \tag{6}$$

再由对象控制器的参数化表示[2]

$$C = (U_0 + M_0Q)(V_0 + N_0Q)^{-1} = (\tilde{V}_0 + Q\tilde{N}_0)^{-1}(\tilde{U}_0 + Q\tilde{M}_0)$$

可得

$$\begin{bmatrix} M_0 & U \\ N_0 & V \end{bmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N}_0 & \tilde{M}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix}(\tilde{N}_0 \quad -\tilde{M}_0).$$

记 $T=(\tilde{N}_0 \quad -\tilde{M}_0)$ 的互内外分解为 $T=T^{co}\cdot T^{ci}$，其中 T^{co}，$(T^{co})^{-1}\in RH_\infty$. 则存在 $T^{\perp}$ 使得 $[(T^{ci})^{\mathrm{T}} \quad (T^{\perp})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 成为方的互内矩阵[3]，即 $[(T^{ci})^{\mathrm{T}} \quad (T^{\perp})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\cdot[(T^{ci})^* \quad (T^{\perp})^*]=I$. 于是有

$$\left\|\begin{bmatrix} M_0 & U \\ N_0 & V \end{bmatrix}^{-1}\right\|_\infty = \left\|\left[\begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N}_0 & \tilde{M}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} QT^{c0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{ci} \\ T^{\perp} \end{pmatrix}\right][(T^{ci})^* \quad (T^{\perp})^*]\right\|_\infty$$

定义

$$X = -QT^{co},\quad \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N}_0 & \tilde{M}_0 \end{pmatrix}[(T^{ci})^* \quad (T^{\perp})^*] \tag{7}$$

且注意到

$$\max_{(U,V)\in S(M_0,N_0)} \tau\begin{bmatrix} M_0 & U \\ N_0 & V \end{bmatrix} = \left(\min_{(U,V)\in S(M_0,N_0)}\left\|\begin{bmatrix} M_0 & U \\ N_0 & V \end{bmatrix}^{-1}\right\|_\infty\right)^{-1}$$

可得如下结论.

定理 2. 最优鲁棒控制问题(5)可以通过下面标准的 H_∞ 四块问题求解[2].

$$\max_{(U,V)\in S(M_0,N_0)} \tau\begin{bmatrix} M_0 & U \\ N_0 & V \end{bmatrix} = \left(\min_{X\in RH_\infty}\left\|\begin{pmatrix} R_1 - X & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}\right\|_\infty\right)^{-1}$$

其中，X 和 $R_i(i=1,2,3,4)$ 在式(7)中定义.

3 结论

本文研究了对象和控制器同时具有互质因子摄动时闭环系统的鲁棒稳定性分析和设计问题. 这是一个有着重要意义但还未得到充分重视的问题. 对此，本文获得了一个系统鲁棒稳定的充要条件并将最优鲁棒设计问题转化为一个标准的 H_∞ 四块问题. 为该方向的进一步研究提供了基础.

参 考 文 献

1 Vidyasagar M. Control System Synthesis: A Coprime Factorization Approach. Cambridge, MA: M. I. T. Press, 1985, 271～294

2 Francis B A. A Course in H_∞ Theory. New York: Springer-verlag, 1987, 26～131

3 Chu C C, Doyle J C, Lee E B. The general distance problem in H_∞ optimal control theory. *Int. J. Control*, 1986, **44**(2): 565～596

张高民 北京航空航天大学第七研究室博士生. 目前从事鲁棒控制、H_∞ 控制等方面的研究.

贾英民 见本刊 2001 年第 2 期.