

# 基于 LMI 优化的主动悬架多目标控制<sup>1)</sup>

陈虹<sup>1</sup> 马苗苗<sup>1</sup> 孙鹏远<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(吉林大学控制科学与工程系 长春 130025)

<sup>2</sup>(一汽技术中心 长春 130025)

(E-mail: chenh@jlu.edu.cn, mamiaomiao@email.jlu.edu.cn)

**摘要** 首先将汽车主动悬架的控制问题归结为有时域硬约束的鲁棒干扰抑制问题。在多目标控制框架下, 基于线性矩阵不等式 (LMI) 优化技术, 提出了一种  $H_2$ / 广义  $H_2$  混合控制策略: 利用广义  $H_2$  范数描述系统的时域硬约束, 同时选择  $H_2$  范数最小化系统的性能输出, 最终将系统的控制律归结为求解具有 LMI 约束的半定规划问题。以半车模型为例设计了主动悬架控制器, 并给出了较全面的分析和仿真结论。最后利用快速原型 (RCP) 和硬件在回路仿真 (HILS) 一体化技术进一步验证所提方法的有效性和可行性。

**关键词** 主动悬架, 时域硬约束,  $H_2$  性能, 广义  $H_2$  性能, 硬件在回路仿真

**中图分类号** TP271

## Multi-objective Control Design for Active Suspensions: An LMI Approach

CHEN Hong<sup>1</sup> MA Miao-Miao<sup>1</sup> SUN Peng-Yuan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025)

<sup>2</sup>(Research and Development Center, First Automobile Works, Changchun 130025)

(E-mail: chenh@jlu.edu.cn, mamiaomiao@email.jlu.edu.cn)

**Abstract** This paper formulates the active suspension control problem as a disturbance attenuation problem with time-domain hard constraints. In the framework of multi-objective control, this paper suggests a mixed  $H_2$ /generalized  $H_2$  control strategy based on LMI optimization for the disturbance attenuation problem with constraints: the generalized  $H_2$  norm is adapted to capture requirements of satisfying time-domain hard constraints and the  $H_2$  norm is used to minimize the performance output. The control problem with hard constraints is converted to an LMI based semidefinite programming problem. Analysis and simulation results for a half-car model are presented. Finally, integrative real-time experiments of RCP and HILS were made to validate the proposed control approach.

**Key words** Active suspensions, time-domain hard constraints,  $H_2$  performance, generalized  $H_2$  performance, HILS

## 1 引言

先进汽车悬架的性能要求是: 尽量使乘客或货物不受由路面不平引起的振动的影响; 抑制轮胎的振动以维持轮胎与路面间牢固、不间断的接触; 保持悬架动行程在允许范围内

1) 国家自然科学基金 (60374027), 教育部新世纪优秀人才支持计划和吉林大学“985 工程”

Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60374027), the Program for New Century Excellent Talents of Higher Education and “985 Project” of Jilin University

收稿日期 2005-4-4 收修改稿日期 2005-12-27

Received April 4, 2005; in revised form December 27, 2005

以避免悬架撞击限位块<sup>[1]</sup>;同时,执行机构存在输出饱和,控制力不能超出阈值<sup>[2]</sup>.上述诸性能要求之间又是相互矛盾和制约的.为解决主动悬架的控制问题已经基于不同的理论提出了大量方法<sup>[3~7]</sup>,例如 LQG 控制,自适应控制, $H_\infty$  控制和非线性控制等等.这些方法基本都是将全部性能要求加权后,合并为一个单一的目标函数,再求其最小得到一个最优控制器.然而对具体的实际问题,适当选择加权并不容易.事实上在这些性能要求中,只有乘坐舒适性需要优化,而其它性能的变化只要不超出相应的限定范围即可<sup>[1]</sup>.基于这样的考虑,本文将悬架的控制问题归结为约束系统的干扰抑制问题,提出一种可处理此类问题的  $H_2$ / 广义  $H_2$  混合控制方法,并以真实车辆系统为对象给出了完整的控制器设计、分析和半实物仿真.

## 2 主动悬架系统的描述

主动悬架四自由度半车模型结构如图 1 所示<sup>[8]</sup>.其中,  $z_c$  和  $\phi$  分别表示汽车悬挂质量重心处的垂向位移和俯仰角;  $z_{s1}, z_{u1}$  和  $z_{r1}$  分别表示前后悬架的悬挂质量,非悬挂质量以及路面的垂向位移;  $f_{a1}$  为前悬架控制力输入,  $f_{a2}$  为后悬架控制力输入.车辆各参数的含义及取值见表 1.

假设悬挂质量是刚性的,并且具有垂直和俯仰方向上的自由度.每个非悬挂质量各自在垂直方向上具有自由度,即整个半车系统具有四个自由度.其动力学方程如下.

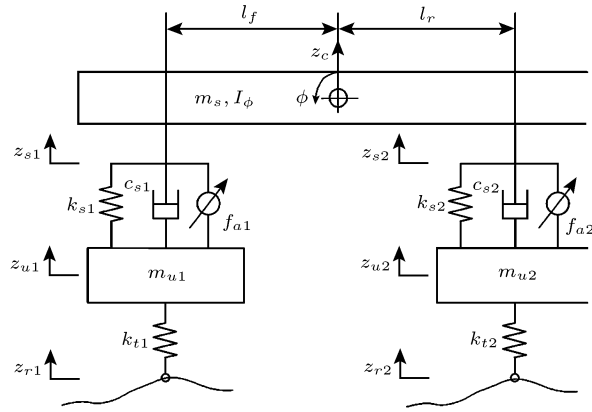


图 1 四自由度半车模型

Fig. 1 Schematic diagram of the half-car model

$$M_s \ddot{\mathbf{q}} = G C_s (\dot{\mathbf{z}}_u - \dot{\mathbf{z}}_s) + G K_s (\mathbf{z}_u - \mathbf{z}_s) + G \mathbf{f}_a \quad (1)$$

$$M_u \ddot{\mathbf{z}}_u = C_s (\dot{\mathbf{z}}_s - \dot{\mathbf{z}}_u) + K_s (\mathbf{z}_s - \mathbf{z}_u) + K_u (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_u) - \mathbf{f}_a \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{q} = [z_c \ \phi]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{z}_u = [z_{u1} \ z_{u2}]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{z}_s = [z_{s1} \ z_{s2}]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{z}_r = [z_{r1} \ z_{r2}]^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f}_a = [f_{a1} \ f_{a2}] \in \mathbb{R}^2$ . 式 (1) 和 (2) 中的矩阵含义如下.

$$M_s = \begin{pmatrix} m_s & 0 \\ 0 & I_\phi \end{pmatrix}, \quad M_u = \begin{pmatrix} m_{u1} & 0 \\ 0 & m_{u2} \end{pmatrix}, \quad C_s = \begin{pmatrix} c_{s1} & 0 \\ 0 & c_{s2} \end{pmatrix}$$

$$K_s = \begin{pmatrix} k_{s1} & 0 \\ 0 & k_{s2} \end{pmatrix}, \quad K_u = \begin{pmatrix} k_{u1} & 0 \\ 0 & k_{u2} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -l_f & l_r \end{pmatrix}$$

显然,  $M_s$  和  $M_u$  是可逆的. 由于  $\mathbf{z}_s$  和  $\mathbf{q}$  在动力学上满足  $\mathbf{z}_s = G^T \mathbf{q}$  的关系, 因此令  $G^T M_s^{-1}$  左乘 (1) 的两端得 (下式中  $M_{sg} = G^T M_s^{-1} G$ )

$$\ddot{\mathbf{z}}_s = M_{sg} [C_s (\dot{\mathbf{z}}_u - \dot{\mathbf{z}}_s) + K_s (\mathbf{z}_u - \mathbf{z}_s) + \mathbf{f}_a] \quad (3)$$

路面干扰输入可以分为两类: 随机路面干扰 (振动) 和确定性路面干扰 (由路面上比较大的坑、包等产生)<sup>[1]</sup>. 随机路面的不平度由路面的垂直速度描述, 其功率谱密度可近似

为:  $G_{z_r}(f) = 4\pi^2 G_0 V$ , 其中,  $G_0$  是路面不平度系数,  $V$  是车辆前进速度. 于是  $z_r$  描述为  $\dot{z}_r = 2\pi\sqrt{G_0 V} \mathbf{w}(t)$ ,  $z_r = [z_{r1} \ z_{r2}]^T$  对应前轮和后轮两个干扰输入,  $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2]^T$  是归一化路面速度输入.

表 1 二分之一车参数  
Table 1 Parameters of the half-car model

参数(符号)	值	参数(符号)	值
悬挂质量 ( $m_s$ )	690kg	车身转动惯量 ( $I_\phi$ )	1222kg · m <sup>2</sup>
前悬架阻尼 ( $C_{s1}$ )	1000N · s/m	后悬架阻尼 ( $C_{s2}$ )	1000N · S/m
重心到前轴的距离 ( $l_f$ )	1.3m	重心到后轴的距离 ( $l_r$ )	1.5m
前悬架非悬挂质量 ( $m_{u1}$ )	40kg	后悬架非悬挂质量 ( $m_{u2}$ )	45kg
前轮轮胎刚度 ( $k_{u1}$ )	200000N/m	后轮轮胎刚度 ( $k_{u2}$ )	200000N/m
前悬架刚度 ( $k_{s1}$ )	18000N/m	后悬架刚度 ( $k_{s2}$ )	22000N/m
最大动行程 ( $S_{\max}$ )	0.08m	最大作动力 ( $F_{\max}$ )	1500N

选取状态向量  $\mathbf{x}_v = [(z_s - z_u)^T \ \dot{z}_s^T \ (z_u - z_r)^T \ \dot{z}_u^T]^T \in \mathbb{R}^8$ , 由 (2) 和 (3), 四自由度主动悬架半车的状态空间模型描述为:

$$\dot{\mathbf{x}}_v = A_v \mathbf{x}_v + B_v \mathbf{f}_a + F_v \mathbf{w} \quad (4)$$

其中各系数矩阵如下 ( $0_2$  和  $I_2$  分别表示  $2 \times 2$  阶的零矩阵和单位矩阵.):

$$A_v = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 & -I_2 \\ -M_{sg}K_s & -M_{sg}C_s & 0_2 & M_{sg}C_s \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \\ M_u^{-1}K_s & M_u C_s & -M_u^{-1}K_u & -M_u^{-1}C_s \end{pmatrix}, B_v = \begin{pmatrix} 0_2 \\ M_{sg} \\ 0_2 \\ M_u^{-1} \end{pmatrix}, F_v = -2\pi\sqrt{G_0 V} \begin{pmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ I_2 \\ 0_2 \end{pmatrix}$$

设计悬架首先要考虑车辆乘坐舒适性的要求, 而车身垂直加速度  $\ddot{z}_c$  与俯仰加速度  $\ddot{\phi}$  是评价舒适性的主要指标. 其方程为  $\ddot{\mathbf{q}} = [-M_s^{-1}GK_s, \ -M_s^{-1}GC_s \ 0 \ M_s^{-1}GC_s] \mathbf{x}_v + M_s^{-1}G\mathbf{f}_a$ , 其中,  $\mathbf{q} = [z_c \ \phi]^T$ . 兼顾操纵稳定性的要求, 轮胎与路面的动载荷不能超过轮胎的静载荷<sup>[1]</sup>, 即  $k_{ui}(z_{ui} - z_{ri}) \leq f_{kui}$ ,  $i = 1, 2$ . 其中,  $k_{ui}(z_{ui} - z_{ri})$  为轮胎动载荷,  $f_{kui}$  为轮胎静载荷, 根据车辆静态下力平衡及力矩平衡方程获得

$$f_{ku1} = (l_r m_s g + (l_f + l_r) m_{u1} g)(l_f + l_r)^{-1}, \quad f_{ku2} = (l_f m_s g + (l_f + l_r) m_{u2} g)(l_f + l_r)^{-1}$$

又由于悬架机械结构的行程限制, 还应将悬架的动行程限制在一定的范围内, 以免撞击限位块破坏乘坐舒适性, 即  $|z_{si} - z_{ui}| \leq S_{\max}$ ,  $i = 1, 2$ . 另外考虑到汽车发动机的功率限制, 液压伺服机构只能提供有限的主动动力  $|f_{ai}| \leq F_{\max}$ ,  $i = 1, 2$ .

综上, 主动悬架控制系统的加权性能输出和归一化约束输出分别为

$$z_1 = \begin{bmatrix} q_1 \ddot{z}_c \\ q_2 \ddot{\phi} \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{bmatrix} \frac{z_s - z_u}{S_{\max}} \\ F_k(z_u - z_r) \\ \frac{\mathbf{f}_a}{F_{\max}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中  $F_k = \text{diag}(\frac{k_{u1}}{f_{ku1}}, \frac{k_{u2}}{f_{ku2}})$ ,  $q_1$  和  $q_2$  是待定加权系数, 根据 [7] 取  $q_1 = 1$  和  $q_2 = q_1 \sqrt{l_f l_r}$ . 主动悬架控制问题可描述为<sup>[9]</sup>: 寻找一个控制器, 使车辆系统闭环稳定; 满足全部硬约束条件 (约束输出  $z_2$  各元素的绝对值小于 1) 并尽可能改善乘坐舒适性 (最小化性能输出  $z_1$ ); 考虑车辆系统的不确定性, 闭环系统还应具有较强的鲁棒性.

### 3 $H_2$ / 广义 $H_2$ 混合控制

#### 3.1 $H_2$ 性能和广义 $H_2$ 性能

$H_2$  性能有两种物理意义<sup>[10]</sup>: 1) 系统脉冲响应下全部输出能量的平方根; 2) 白噪声输入下系统渐进输出的方差. 而且如果输入信号是独立的,  $H_2$  范数就是输出的 RMS 值.

从输入  $w$  到输出  $z$  的广义  $H_2$  范数定义如下<sup>[11,12]</sup>

$$\|G\|_g := \sup\{\|z(t)\| : x_{cl}(0) = 0, t \geq 0, \int_0^t \|w(\tau)\| d\tau \leq 1\} \quad (6)$$

它描述了输入  $w$  为单位能量信号时, 输出  $z$  在时域上的峰值. 因此, 当系统输入是能量有界信号时, 广义  $H_2$  性能是描述时域上输出硬约束的一个合适的指标.

#### 3.2 $H_2$ / 广义 $H_2$ 控制方法

为使所讨论的方法更具一般性, 设被控对象由如下状态方程描述:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + Bu(t), z_1(t) = C_1 x(t) + D_1 w(t) + D_{1u} u(t), z_2(t) = C_2 x(t) + D_{2u} u(t) \quad (7)$$

其输出和控制约束为

$$|z_{2i}(t)| \leq z_{2i,\max}, i = 1, 2, \dots, p_2, t \geq 0, |u_i(t)| \leq u_{i,\max}, i = 1, 2, \dots, m_2, t \geq 0 \quad (8)$$

式中  $x \in \mathbb{R}^n$  是状态向量,  $w \in \mathbb{R}^{m_1}$  是干扰输入,  $u \in \mathbb{R}^{m_2}$  是控制输入,  $z_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$  是  $H_2$  性能输出,  $z_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$  是约束输出, 并且允许  $D_{2u} \neq 0$ . 本文所考虑的控制问题为:

**命题 1.** 设计一个控制器, 使得闭环系统内部稳定, 从干扰输入  $w(t)$  到优化输出  $z_1(t)$  的  $H_2$  范数最小, 并且从干扰输入  $w(t)$  到约束输出  $z_1(t)$  的广义  $H_2$  范数小于给定的正数  $\rho$ .

令  $G_1$  和  $G_2$  分别表示闭环系统干扰  $w(t)$  到优化输出  $z_1(t)$  和约束输出  $z_2(t)$  的传递函数. 则命题 1 归结为

$$\min \|G_1\|_2, \text{ 满足 } \|G_1\|_g^2 \leq \rho, \rho > 0$$

设状态反馈增益为  $K$ , 则  $u = Kx$ , 对应的闭环系统为

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl,1} & D_{cl,1} \\ C_{cl,2} & D_{cl,2} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} A + BK & B_1 \\ \hline C_1 + D_{1u}K & D_1 \\ C_2 + D_{2u}K & D_2 \end{array} \right) \quad (9)$$

在多目标控制的情况下, 若  $A_{cl}$  是稳定的, 且  $\|G_1\|_2^2 < v, \|G_2\|_g^2 < \rho$ , 当且仅当存在  $P = P^T > 0, S > 0$  使得<sup>[12]</sup>

$$\begin{pmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_1 \\ B_1^T P & -I \end{pmatrix} < 0, \begin{pmatrix} P & C_{cl,1}^T \\ C_{cl,1} & S \end{pmatrix} > 0, \text{Trace}(S) < v, D_1 = 0, \begin{pmatrix} P & C_{cl}^T \\ C_{cl} & \rho I \end{pmatrix} > 0 \quad (10)$$

令  $Q = P^{-1}$  和  $Y = KQ$ , 即可得到如下关于  $v, Q, Y, S$  的 LMI<sup>[13]</sup>

$$\begin{pmatrix} A Q + Q A^T + B_u Y + Y^T B_u^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{pmatrix} < 0, \begin{pmatrix} Q & Q C_1^T + Y^T D_{1u}^T \\ C_1 Q + D_{1u} Y & S \end{pmatrix} > 0 \\ \text{Trace}(S) < v, D_1 = 0, \begin{pmatrix} Q & Q C_2^T + Y^T D_{2u}^T \\ C_2 Q + D_{2u} Y & \rho I \end{pmatrix} > 0 \quad (11)$$

为了使闭环系统获得令人满意的动态特性 (如合适的阻尼比和响应速度), 进一步考虑对闭环极点进行区域配置. 为了能利用 LMI 方法分析系统位于  $S$  平面的某个给定区域内的极点, 文 [14] 提出了 LMI 区域概念. LMI 区域是  $S$  平面上的一个凸区域, 定义如下.

$$D = \{s \in \mathbb{C} : L + Ms + M^T \bar{s} < 0\} \quad (12)$$

其中  $L = L^T = [\lambda_{jk}]_{1 \leq j, k \leq m}$  和  $M = [\mu_{jk}]_{1 \leq j, k \leq m}$  是确定的实数矩阵. 矩阵  $A_{cl}$  的全部特征值位于给定 LMI 区域 (12) 内的充要条件是存在对称矩阵  $P > 0$  满足下面的 LMI.

$$[\lambda_{jk}P + \mu_{jk}PA_{cl} + \mu_{kj}A_{cl}^T P]_{1 \leq j, k \leq m} < 0 \quad (13)$$

因此, 命题 1 归结为求一组 LMI 为约束条件的最优问题

$$\min_{v, Q, Y, S} v, \text{ 使得 LMI(11) 和 (13) 成立} \quad (14)$$

如果半定规划问题 (14) 存在最优解  $(v^*, Q^*, Y^*, S^*)$ , 则所设计的  $H_2$ / 广义  $H_2$  状态反馈控制器  $K^* = Y^*Q^{*-1}$ , 且保证闭环系统

- 1) 是内部稳定的, 且闭环极点位于指定的 LMI 区域内;
- 2) 在相互独立的单位强度白噪声干扰下,  $z_1(t)$  的 RMS 值为  $\sqrt{v^*}$ ; 对单位脉冲干扰,  $z_1(t)$  的能量不超过  $\sqrt{v^*}$ ;
- 3) 在单位能量干扰下满足全部所考虑的硬约束条件.

## 4 $H_2$ / 广义 $H_2$ 主动悬架控制

### 4.1 控制器设计

模型 (4) 中, 系数  $2\pi\sqrt{V_0V}$  是路面速度输入的归一化因子. 但实际路面不平情况是不确定的, 因此令  $W = 2\pi\sqrt{G_0V}$ , 可以将  $W$  作为控制器调节参数. 分别取  $W = 0.05, 0.10, 0.15$ , 通过 LMI 优化问题 (14) 求解  $H_2$ / 广义  $H_2$  状态反馈控制器, 所得到的闭环系统从前轮路面速度输入到车身加速度和动静载荷比的频率响应如图 2 所示. 显然,  $W$  的取值越

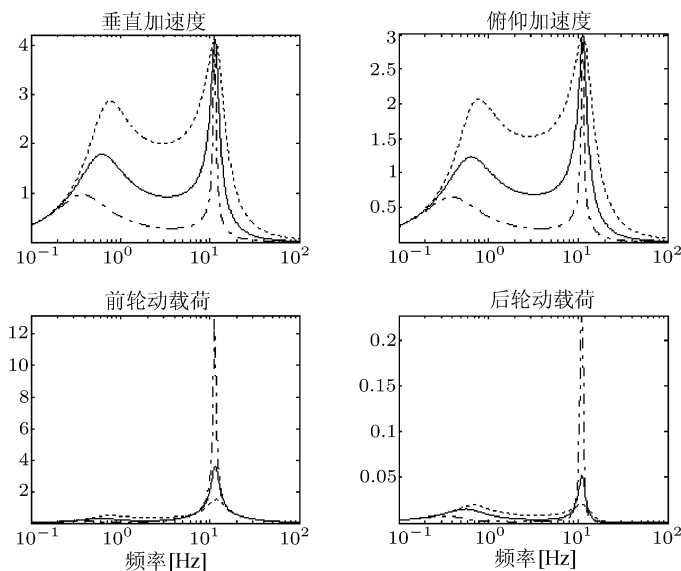


图 2  $W$  取不同值时主动悬架的频率响应  $W = 0.05(-\cdot-), 1.10(-), 0.15(- -)$

Fig. 2 Frequency responses for different  $W$

小, 乘坐舒适性越好; 而  $W$  的取值越小, 意味着非悬挂模态的阻尼越小, 会引起非悬挂部分较大的振荡. 后轮路面速度输入的频率响应情况与前轮的类似. 折衷考虑后取  $W = 0.10$ , 对应的状态反馈增益为

$$K^* = \begin{bmatrix} 8.5445 & -0.4455 & 3.1192 & -0.3049 & -0.0990 & -0.0331 & -0.2024 & 0.0075 \\ -0.0806 & -0.0391 & 0.2703 & -0.0036 & 11.2451 & -0.3361 & 6.3672 & -0.1527 \end{bmatrix}$$

对应的闭环系统最优  $H_2$  范数值为 6.50. 同时, 由广义  $H_2$  约束的物理意义可知, 满足硬约束的条件是输入为加权单位能量信号, 即如果干扰能量不超过  $0.1^2 = 0.01 m^2/s$  (由  $W^2$  计算得到), 则由  $K^*$  控制的闭环系统满足全部考虑的硬约束.

#### 4.2 分析与仿真

汽车在不平路面上行使时所处的环境是多变的、不确定的, 如汽车工况变化, 汽车本身参数变化, 外部干扰如风向、风力等. 这里考虑如下不确定性参数取值情况.

情况 1. 悬挂质量  $m_s = \bar{m}_s(1 - 40\%)$ , 车身转动惯量  $I_\phi = \bar{I}_\phi(1 - 40\%)$ , 前胎刚度  $k_{u1} = \bar{k}_{u1}(1 - 10\%)$ , 后轮胎刚度  $k_{u2} = \bar{k}_{u2}(1 - 10\%)$ ;

情况 2. 悬挂质量  $m_s = \bar{m}_s(1 + 40\%)$ , 车身转动惯量  $I_\phi = \bar{I}_\phi(1 + 40\%)$ , 前胎刚度  $k_{u1} = \bar{k}_{u1}(1 + 10\%)$ , 后轮胎刚度  $k_{u2} = \bar{k}_{u2}(1 + 10\%)$ ;

情况 3. 作为比较, 不确定性参数取名义值.

##### 4.2.1 频域分析

车身加速度作为衡量乘坐舒适性的标准, 不仅在时域上要求其幅值尽可能低, 而且在频域内要求其垂直加速度幅值在 4-8Hz 的频段内, 水平加速度幅值在 1-2Hz 的频段内越小越好<sup>[1]</sup>. 图 3 分别给出了在前轮和后轮路面输入激励下, 车身垂直加速度和俯仰加速度的频域响应曲线. 显见在 1-8Hz 频段, 对于任何一种不确定参数取值情况,  $H_2$ / 广义  $H_2$  主动悬架车的乘坐舒适性比被动悬架车有明显提高.

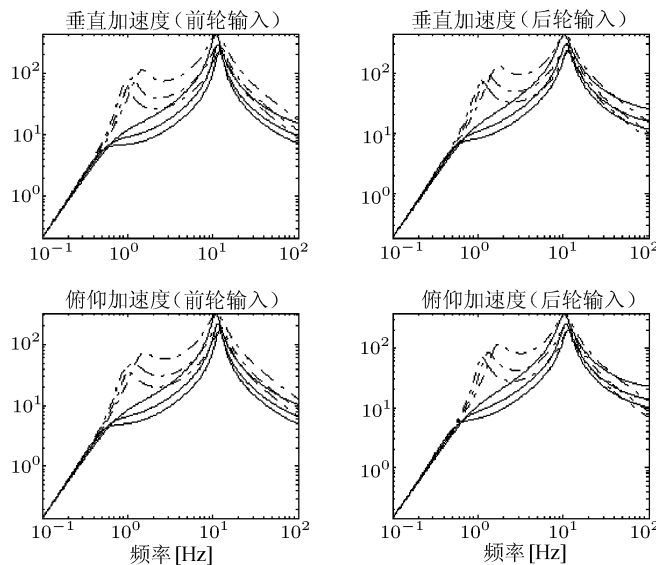


图 3 车身加速度的频率响应: 主动悬架 (—), 被动悬架 (---)

Fig. 3 Frequency responses of the body acceleration: active suspension (—), passive suspension (---)

##### 4.2.2 RMS 值分析

$H_2$ / 广义  $H_2$  主动悬架 (AS) 各输出的 RMS 值见表 2, 其中 HEAV 表示车身垂直加速

度; PITC 表示车身俯仰加速度; SSF 和 SSR 分别表示前、后悬架动行程; RDF 和 RDR 分别表示前、后轮胎动静载荷比; ACC 和 ACR 分别表示前、后悬架主动力. 与被动悬架 (PS) 相比, 无论哪一种参数取值情况, 前者都表现出更好的乘坐舒适性, 而且系统的硬约束条件均得到满足.

表 2 主动悬架各输出 RMS 值  
Table 2 RMS values of variables

		HEAV [ $\frac{m}{s^2}$ ]	PITC [ $\frac{rad}{s^2}$ ]	SSF [m]	SSR [m]	RDF	RDR	ACF [kN]	ACR [kN]
1	AS	0.7357	0.5834	0.0115	0.0099	0.3723	0.3739	0.1640	0.1354
	PS	1.1110	0.8738	0.0098	0.00937	0.2793	0.3201	/	/
2	AS	0.3552	0.2813	0.0140	0.0127	0.2121	0.2166	0.1835	0.1624
	PS	0.5888	0.4620	0.0143	0.0133	0.1613	0.1905	/	/
3	AS	0.4707	0.3731	0.0128	0.0114	0.2628	0.2670	0.2605	0.2238
	PS	0.7498	0.5886	0.01227	0.01157	0.1989	0.2324	/	/

#### 4.2.3 包块响应

当汽车通过路面上的坑或包时, 路面输入可以看作能量有界信号. 考虑不平度系数为  $G_0 = 128 \times 10^{-6} m^3$  的一段路面上有一个长坡形单凸块 (参考国家标准 GB 4970-85), 其数学描述为  $\frac{A_m}{2}(1 - \cos \frac{2\pi}{L}l)$ ,  $0 \leq l \leq L$ , 式中  $A_m = 0.1m$ ,  $L = 5m$ ,  $l$  表示路面水平位移. 假设  $V = 30km/h$ , 则长坡形单凸块所产生的速度能量为  $0.1661m^2/s$ . 仿真试验按照前面假设的三种不确定情况分别完成, 如图 4 所示. 可见, 与被动悬架相比, 同一时刻的输出幅值明显减小, 而且调节时间很短, 较大的改善了乘坐舒适性. 在被动悬架的约束输出超出限制的时候, 主动悬架的约束输出条件仍能满足.

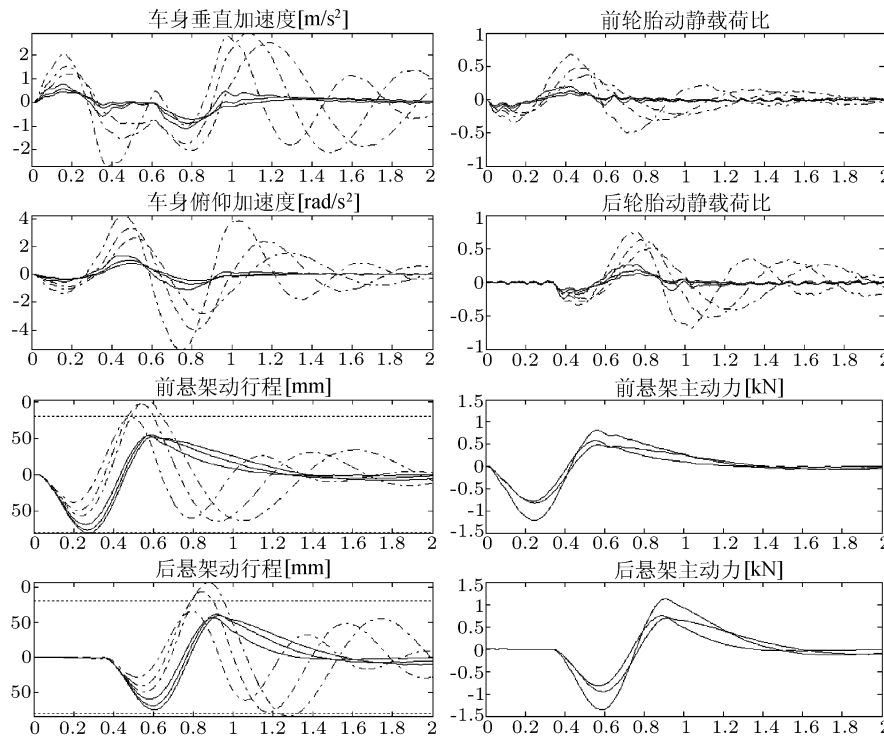


图 4 包块响应: 主动悬架 (—), 被动悬架 (---), 约束条件的界 (---)

Fig. 4 Bump responses: active suspension (—), passive suspension (---), bound of constraints (---)

### 4.3 鲁棒性分析

考虑悬挂质量  $m_s$  和车身转动惯量  $I_\phi$  分别存在  $\pm 60\%$  的摄动, 前、后轮胎刚度  $k_{ui}(i = 1, 2)$  分别存在  $\pm 80\%$  的摄动. 图 5 和图 6 分别给出了  $H_2$ / 广义  $H_2$  悬架车鲁棒稳定性和鲁棒性能的结构奇异值  $\mu$  分析曲线和被动悬架的  $\mu$  分析曲线. 由图可见,  $H_2$ / 广义  $H_2$  悬架车在全部考虑的不确定性下, 能够确保闭环系统的鲁棒稳定性和鲁棒性能.

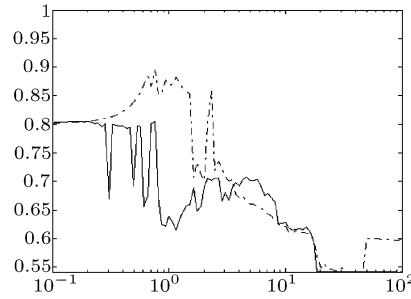


图 5 鲁棒稳定性  $\mu$  分析曲线

Fig. 5 Structured singular value ( $\mu$ ) plots for robust stability

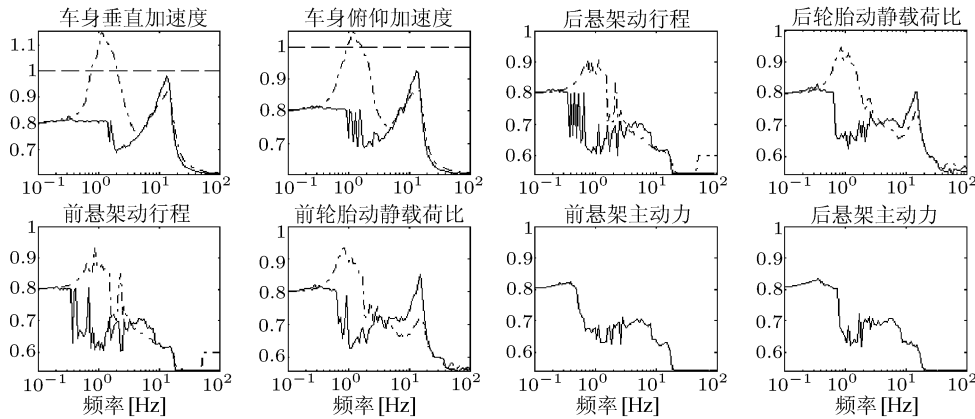


图 6 鲁棒性能的  $\mu$  分析曲线: 主动悬架 (—), 被动悬架 (---)

Fig. 6 Structured singular value ( $\mu$ ) plots for robust performance: active suspension (—), passive suspension (---)

## 5 RCP 及 HILS 一体化实验

为进一步检验所提方法的实效性, 我们对所提算法做了实时快速原型 (RCP) 及硬件在回路仿真 (HILS) 的一体化实验. RCP 是将控制算法在一个实时的硬件基体上实现; 而 HILS 是用实时仿真系统来模拟被控对象或外部环境. 在本例中, 采用半车系统非线性模型来完成 HILS. 根据牛顿第二定律, 其动力学方程如下

$$\ddot{z}_c = \frac{1}{m_s} [-(c_{s1} + c_{s2})\dot{z}_c + (l_f c_{s1} - l_r c_{s2})\dot{\phi} \cos \phi - k_{s1}(z_{s1} - z_{u1}) - k_{s2}(z_{s2} - z_{u2}) + c_{s1}\dot{z}_{u1} + c_{s2}\dot{z}_{u2} + f_{a1} + f_{a2}]$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_\phi} [-(l_f^2 c_{s1} + l_r^2 c_{s2})\dot{\phi} \cos^2 \phi + (l_f c_{s1} - l_r c_{s2})\dot{z} \cos \phi + l_f k_{s1}(z_{s1} - z_{u1}) \cos \phi -$$



$$l_r k_{s2}(z_{s2} - z_{u2}) \cos \phi - (l_f c_{s1} \dot{z}_{u1} - l_r c_{s2} \dot{z}_{u2}) \cos \phi - l_f f_{a1} \cos \phi + l_r f_{a2} \cos \phi$$

$$m_{u1} \dot{z}_{u1} = c_{s1}(\dot{z}_c - l_f \dot{\phi} \cos \phi - \dot{z}_{u1}) + (k_{s1} + k_{t1})(z_{s1} - z_{u1}) - k_{t1} z_c + l_f k_{t1} \sin \phi + k_{t1} z_{r1} - f_{a1}$$

$$m_{u2} \dot{z}_{u2} = c_{s2}(\dot{z}_c - l_f \dot{\phi} \cos \phi - \dot{z}_{u2}) + (k_{s2} + k_{t2})(z_{s2} - z_{u2}) - k_{t2} z_c - l_r k_{t2} \sin \phi + k_{t2} z_{r2} - f_{a2}$$

这里给出两个比较典型的实验:

实验 1. 车速  $V = 30\text{m/s}$ , 路面不平度系数  $G_0 = 1.024 \times 10^{-5} m^3$ , D 级路面;

实验 2. 车速  $V = 20\text{km/h}$ , 路面不平度系数  $G_0 = 1.28 \times 10^{-6} m^3$ , 包坑路面.

实验结果如图 7 和图 8, 可以看到, RCP 和 HILS 一体化实验得到了与离线仿真试验近似的结果: 令人满意的乘坐舒适性和对约束输出的有效抑制. 这进一步验证了算法的有效性和相应的分析结论.

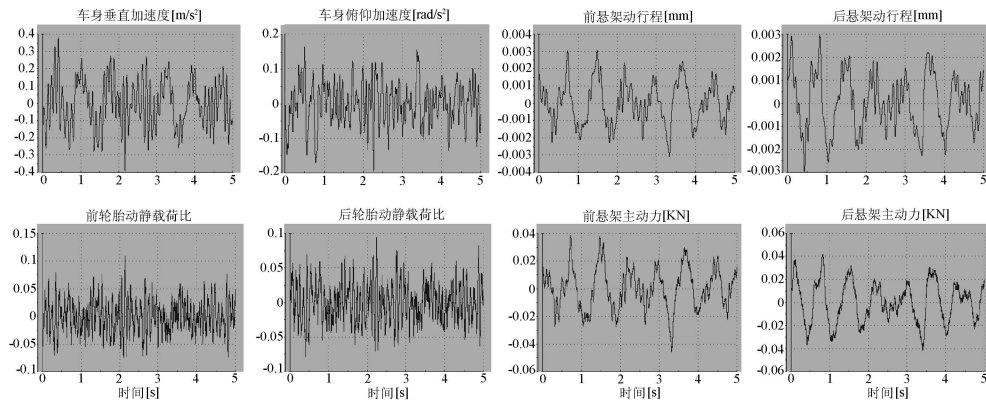


图 7 实验 1 的被控输出响应

Fig. 7 Output response of the first experiment

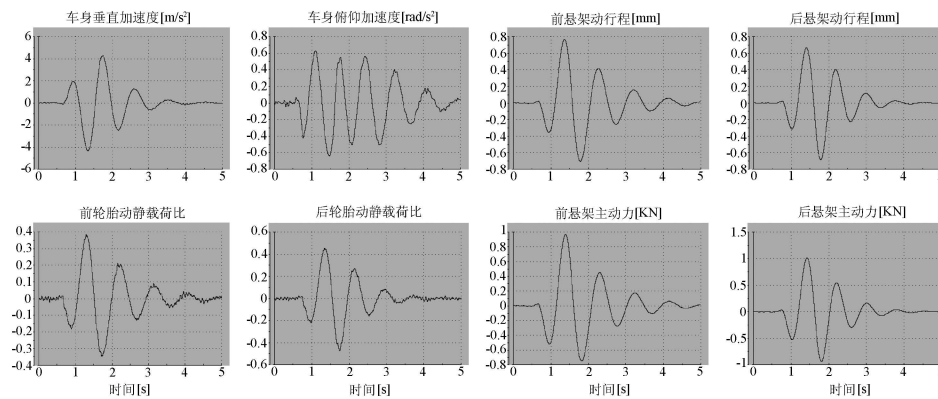


图 8 实验 2 的被控输出响应

Fig. 8 Output response of the second experiment

## 6 结论

本文将主动悬架控制的性能要求分为性能输出和约束输出两部分, 以广义  $H_2$  范数描述系统硬约束, 同时将  $H_2$  范数作为性能指标, 提出了一种约束系统干扰抑制的混合控制算法. 在多目标 LMI 控制的框架下, 该算法可以将控制器的设计转化为求解以一组 LMI

作约束的优化问题. 设计者仅需考虑很少的一两个加权系数, 就可以完成对主动悬架整体性能的调节. 文中给出了这种方法的状态反馈形式, 并以实际车辆模型为对象设计了悬架控制器, 分别从频域特性、时域特性、脉冲响应和鲁棒性等方面给出了控制系统的仿真和分析结果. 为进一步检验方法的有效性和实时性, 还进行了实时快速原型 (RCP) 及硬件在回路仿真 (HILS) 的一体化实验. 分析和仿真结果表明: 文中所提出的控制算法是切实有效和具有实用价值的. 文中所提出的方法具有通用性, 对于其它类似的控制问题和被控对象也可以进行尝试.

## References

- 1 Hrovat D. Survey of advanced suspension developments and related optimal control applications. *Automatica*, 1997, **33**(10): 1781~1817
- 2 Giua A, March C, Usai G. Active axletree suspension for road vehicles with gain-switching. In: Proceedings of 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney: IEEE Press, 2000. 438~443
- 3 Fialho I, Balas G J. Road adaptive active suspension design using linear parameter-varying gain-scheduling. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2002, **10**(1): 43~54
- 4 Abdelhady M B A. A fuzzy controller for automotive active suspension systems. Society of Automotive Engineers Paper, No. 2003-01-1417, 2003
- 5 Sinha P K, Pechev A N. Nonlinear  $H_\infty$  controllers for electromagnetic suspension systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 563~568
- 6 Zhang Y, Alleyne A G. A new approach to half-car active suspension control. In: Proceeding of American Control Conference, Denver, Colorado: IEEE Press, 2003. 3762~3767
- 7 Lauwerys C, Swevers J, Sas P. Design and experimental validation of linear robust controller for an active suspension of a quarter car. In: Proceedings of American Control Conference, Boston: IEEE Press, 2004. 1481~1486
- 8 Wang J, Wilson D A, Halikias G D.  $H_\infty$  robust performance control of decoupled active suspension systems based on LMI method. In: Proceedings of American Control Conference, Arlington: IEEE Press, 2001. 2658~2663
- 9 Chen H, Guo K. An LMI approach to multi-objective RMS gains control for active suspensions. In: Proceedings of American Control Conference, Arlington: IEEE Press, 2001. 2646~2654
- 10 Burl J B. Linear Optimal Control:  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods. Addison-Wesley, 1998
- 11 Rotea M A. The generalized  $H_2$  control problem. *Automatica*, 1992, **29**(2): 373~385
- 12 Scherer C W, Gahinet P, Chilali M. Multi-objective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, **42**(7): 896~911
- 13 Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994
- 14 Chilali M, Gahinet P.  $H_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach. In: Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL: IEEE Press, 1994. 553~558.

**陈 虹** 吉林大学通信工程学院教授, 博士生导师, 研究领域为预测控制、非线性控制、鲁棒控制和最优控制.  
(**CHEN Hong** Professor, Ph. D. in School of Communication Engineering at Jilin University. Her research interests include model predictive control, nonlinear control, optimal, and robust control.)

**马苗苗** 吉林大学通信工程学院博士研究生, 研究领域为系统仿真、鲁棒控制和最优控制.

(**MA Miao-Miao** Ph.D. candidate in School of Communication Engineering at Jilin University. Her research interests include system simulation, optimal, and robust control.)

**孙鹏远** 博士, 一汽技术中心工程师. 研究领域为系统仿真、鲁棒控制和预测控制.

(**SUN Peng-Yuan** Ph.D., engineer of Research and Development Center, First Automobile Works. His research interests include system simulation, robust control, and model predictive control.)