第 28 卷 第 6 期
2002 年 11 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 6
Nov., 2002

线性离散时滞系统鲁棒严格耗散控制[1)]

刘 飞 苏宏业 褚 健
(浙江大学先进控制研究所工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027)
(E-mail: fliu@iipc.zju.edu.cn)

摘 要 提出线性离散时滞系统的耗散控制问题，研究无记忆状态反馈控制律存在的条件及相应的控制器设计方法，以使相应的闭环系统渐近稳定，同时具有严格(Q,S,R)-耗散性. 进一步考虑耗散的不确定性，研究不确定系统鲁棒严格耗散控制的分析与综合问题. 结果表明，鲁棒耗散控制器存在的条件和综合问题等价于线性矩阵不等式(LMI)的可解性问题.

关键词 鲁棒控制，耗散性，离散系统，时滞，状态反馈，线性矩阵不等式
中图分类号 TP271.8

ROBUST STRICTLY DISSIPATIVE CONTROL FOR LINEAR DISCRETE TIME-DELAY SYSTEMS

LIU Fei SU Hong-Ye CHU Jian
(National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027)
(E-mail: fliu@iipc.zju.edu.cn)

Abstract This paper focuses on the problem of dissipative control for linear discrete-time systems with time-delay. The objective is to design memoryless state feedback controllers such that the closed-loop system achieves internal stability and strict (Q, S, R)-dissipativeness. The existence of the dissipative controller depends on the feasibility of linear matrix inequality (LMI). Furthermore, for uncertain systems characterized by dissipative uncertainty, the results of analysis and synthesis for robust dissipative strict control are then obtained in terms of LMI.

Key words Robust control, dissipativeness, discrete system, time-delay, state feedback, LMI

1 引言

耗散性系统理论由 Willems 于 1972 年提出[1,2]，其后成为电路、系统及控制理论中十

1) 国家自然科学基金重点项目(69934030)、中国高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金和国家杰出青年基金资助
收稿日期 2000-12-19 收修改稿日期 2001-02-27

分重要的概念. 事实上，耗散系统理论是无源理论、界实引理、卡尔曼－雅柯鲍维奇引理(Kalman-Yacubovitch)以及圆判据定理的广义化[3]. 近二十年来，基于 H_∞性能和正实性的鲁棒控制理论得到广泛的研究，同时对于系统的不确定性描述，大量文献讨论了范数有界的情形. 而研究基于耗散性的控制理论，不但可以提供解决 H_∞控制和正实控制问题的统一框架，而且能揭示很多更深刻的内容. 就不确定系统的鲁棒控制而言，耗散性描述也可更充分地利用系统的不确定信息，进一步降低鲁棒控制分析与综合的保守性. 近年来已有学者研究基于耗散系统理论的反馈控制器的分析与综合问题[4,5]，结果表明线性系统的严格二次型耗散性可等效于 H_∞性能，并且正实性以及扇形约束(sector-bounded constraint)等均可作为二次耗散性的特殊情形，而耗散控制器或鲁棒耗散控制器存在的条件和综合问题可等价于一个代数 Riccati 不等式[5]或线性矩阵不等式(LMI)[4]的可解性. 耗散控制也推广到线性离散系统[6]. 然而，关于时滞情形的耗散控制问题，还没有文献涉及. 本文在状态空间下，首先讨论一类具有状态滞后的线性离散系统的严格耗散控制问题，给出了无记忆状态反馈控制律存在的条件及相应的控制器设计方法，然后考虑耗散的不确定性，进一步研究鲁棒严格耗散控制的分析与综合.

2 基本概念

考虑状态模型描述的一类线性离散时滞系统

$$x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d) + Bw(k) \tag{1a}$$

$$z(k) = Cx(k) + Dw(k) \tag{1b}$$

$$x(k) = \varphi(k), \quad k \in [-d, 0]$$

其中 $x(k)\in R^n$ 为状态，$d>0$ 是系统的滞后常数，$w(k)\in R^r$ 是外部输入，且对于 $T>0$，$w(k)\in l_2^r[0,T]$，$z(k)\in R^q$ 是被控输出，$\varphi(k)$是系统的初始函数，A, A_d, B, C 以及 D 分别是适当维数的常数矩阵.

对系统(1)引入二次型能量函数[3]

$$E(z,w,T) = \langle z, Qz\rangle_T + 2\langle z, Sw\rangle_T + \langle w, Rw\rangle_T \tag{2}$$

式中记号$\langle u,v\rangle_T := \sum_{k=0}^{T} u^{\mathrm{T}}(k)v(k)$，$\forall\, u,v\in l_2^n[0,T]$；$Q,S,R$ 为适当维数的权矩阵，且 Q,R 是对称阵.

将文献[4]中线性系统的耗散性定义推广至离散时滞系统，有下列定义及假设.

定义 1. 给定 Q,R 和 S，如果具有能量函数(2)的时滞系统(1)对于满足 $\beta(0)=0$ 的某实函数 $\beta(\cdot)$，使得 $E(z,w,T)-\beta(\varphi(0))\leqslant 0$，则称系统(1)是$(Q,S,R)$-耗散的，简称耗散；进而，如果存在一个常数 $\alpha>0$，使得

$$E(z,w,T) - \beta(\varphi(0)) \leqslant -\alpha\langle w,w\rangle_T \tag{3}$$

则称系统(1)是严格(Q,S,R)-耗散的，简称严格耗散.

基于上述定义，当 Q,S,R 取合适的权矩阵，系统的严格(Q,S,R)-耗散性可分别退化为系统的 H_∞性能，正实性以及扇形约束等.

一般情形对 Q,S,R 的选取有下列假设.

假设 1. 1) $R+D^{\mathrm{T}}S+S^{\mathrm{T}}D+D^{\mathrm{T}}QD<0$，2) $Q\geqslant 0$.

引理 1. 系统(1)在假设 1 下渐近稳定并且严格(Q,S,R)-耗散，如果存在对称矩阵 $P>0$和 $V>0$，使得

$$\begin{bmatrix} -P+V & 0 & C^{\mathrm{T}}S & C^{\mathrm{T}}Q^{\frac{1}{2}} & A^{\mathrm{T}} \\ 0 & -V & 0 & 0 & A_d^{\mathrm{T}} \\ S^{\mathrm{T}}C & 0 & D^{\mathrm{T}}S+S^{\mathrm{T}}D+R & D^{\mathrm{T}}Q^{\frac{1}{2}} & B^{\mathrm{T}} \\ Q^{\frac{1}{2}}C & 0 & Q^{\frac{1}{2}}D & -I & 0 \\ A & A_d & B & 0 & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

其中 $Q^{\frac{1}{2}}$是 Q 的对称分解.

证明从略.

3　耗散控制

在系统(1)中增加控制项，有如下时滞系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + A_d\boldsymbol{x}(k-d) + B\boldsymbol{w}(k) + B_2\boldsymbol{u}(k) \tag{5a}$$

$$\boldsymbol{z}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{w}(k) + D_2\boldsymbol{u}(k) \tag{5b}$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{0}, \forall\, k \in [-d, 0]$$

式中 $\boldsymbol{u}(k)\in R^m$ 是控制输入，B_2, D_2 分别是适当维数的常数矩阵.

严格耗散控制问题就是对系统(5)设计一个反馈控制律,使得相应的闭环系统渐近稳定并且是严格(Q,S,R)-耗散的，相应的控制律称为严格耗散控制律. 下面定理 1 针对无记忆状态反馈情形，给出问题的解及相应的耗散控制器设计方法.

设无记忆状态反馈控制器为 $\boldsymbol{u}(k)=K\boldsymbol{x}(k)$，得到相应的闭环系统

$$\boldsymbol{x}(k+1) = (A+B_2K)\boldsymbol{x}(k) + A_d\boldsymbol{x}(k-d) + B\boldsymbol{w}(k) \tag{6a}$$

$$\boldsymbol{z}(k) = (C+D_2K)\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{w}(k) \tag{6b}$$

定理 1. 对于闭环系统(6)及给定对称矩阵 Q,R 和矩阵 S，存在对称矩阵 $P>0$ 和 $V>0$，使得矩阵不等式(4)成立当且仅当存在正定对称矩阵 $X,W\in R^{n\times n}$和矩阵 $Y\in R^{m\times n}$，使得以下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} -X+W & 0 & Z_C^{\mathrm{T}}S & Z_C^{\mathrm{T}}Q^{\frac{1}{2}} & Z_A^{\mathrm{T}} \\ 0 & -W & 0 & 0 & XA_d^{\mathrm{T}} \\ S^{\mathrm{T}}Z_C & 0 & D^{\mathrm{T}}S+S^{\mathrm{T}}D+R & D^{\mathrm{T}}Q^{\frac{1}{2}} & B^{\mathrm{T}} \\ Q^{\frac{1}{2}}Z_C & 0 & Q^{\frac{1}{2}}D & -I & 0 \\ Z_A & A_dX & B & 0 & -X \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

式中 $Z_C := CX+D_2Y$，$Z_A := AX+B_2Y$. 进而，如果 LMI (7)有解，则可得到基于无记忆状态反馈的耗散控制器 $\boldsymbol{u}(k)=YX^{-1}\boldsymbol{x}(k)$.

证明. 对闭环系统(6)应用引理 1，进行适当的矩阵变换即可得证.　　证毕.

4　鲁棒耗散控制分析与综合

4.1　耗散不确定性

在系统(1)中引入不确定性，具体如下

$$x(k+1)=Ax(k)+A_dx(k-d)+Bw(k)+\sum_{i=1}^{L}H_ip_i(k) \tag{8a}$$

$$z(k)=Cx(k)+Dw(k)+\sum_{i=1}^{L}H_{zi}p_i(k) \tag{8b}$$

$$q_i(k)=E_ix(k)+E_{di}x(k-d)+E_{wi}w(k)+\sum_{j=1}^{L}E_{pi,j}p_j(k) \tag{8c}$$

$$i=1,\cdots,L,x(k)=\varphi(k),\ k\in[-d,0].$$

其中 $p_i(k)\in R^{k_i}$和 $q_i(k)\in R^{h_i}$为不确定性变量，H_i,H_{zi},E_i，E_{di},E_{wi}以及 $E_{pi,j}$分别是适当维数的实常数矩阵.

定义 2[4]. 对于系统(8)，给定 $T\geqslant 0$，若各不确定变量 $p_i(k)$和 $q_i(k)$分别满足下列二次型耗散不等式，

$$\langle p_i,Q_ip_i\rangle_T+2\langle p_i,S_iq_i\rangle_T+\langle q_i,R_iq_i\rangle_T\leqslant 0,\ i=1,\cdots,L \tag{9}$$

则称系统具有耗散不确定性. 式中 Q_i,S_i,R_i 为适当维数的权矩阵，且 Q_i,R_i 是对称阵.

令
$$p=[p_1^{\mathrm T}\quad\cdots\quad p_L^{\mathrm T}]^{\mathrm T},\ q=[q_1^{\mathrm T}\quad\cdots\quad q_L^{\mathrm T}]^{\mathrm T},$$
$$\hat Q=\mathrm{diag}\{Q_1\quad\cdots\quad Q_L\},\ \hat S=\mathrm{diag}\{S_1\quad\cdots\quad S_L\},\ \hat R=\mathrm{diag}\{R_1\quad\cdots\quad R_L\} \tag{10}$$

不等式(9)成立意味着

$$\langle p,\hat Qp\rangle_T+2\langle p,\hat Sq\rangle_T+\langle q,\hat Rq\rangle_T\leqslant 0 \tag{11}$$

耗散不确定性是已被广泛讨论的范数有界不确定性和正实不确定性的广义化. 明显地，无论不确定性的已知信息如何充分，范数有界描述只考虑不确定性的增益，而正实性描述只考虑不确定性的相位，因此在不确定系统鲁棒控制的分析与综合中都引入了较大的保守性. 耗散不确定性可兼顾两方面信息，提供了更一般和灵活的对实际系统的描述方法.

一般情形对 Q_i,S_i,R_i 有下列假设

假设 2. 1) $Q_i+S_iE_{pi}+E_{pi}^{\mathrm T}S_i^{\mathrm T}+E_{pi}^{\mathrm T}R_iE_{pi}>0$，2) $R_i\leqslant 0$，$i=1,\cdots,L$.

4.2 鲁棒耗散性分析

定义 3. 不确定系统如果对于所有容许不确定性渐近稳定且严格(Q,S,R)-耗散，则称该系统是鲁棒稳定且严格(Q,S,R)-耗散，简称鲁棒严格耗散.

下面定理给出时滞系统(8)在不确定性(9)下鲁棒严格耗散性的分析结果. 为叙述简洁，引入如下简写符号

$$\begin{aligned}&H=[H_1\quad\cdots\quad H_L],\ H_z=[H_{z1}\quad\cdots\quad H_{zL}],\\&E=[E_1^{\mathrm T}\quad\cdots\quad E_L^{\mathrm T}]^{\mathrm T},\ E_d=[E_{d1}^{\mathrm T}\quad\cdots\quad E_{dL}^{\mathrm T}]^{\mathrm T},\ E_w=[E_{w1}^{\mathrm T}\quad\cdots\quad E_{wL}^{\mathrm T}]^{\mathrm T},\\&E_{pi}=[E_{pi,1}\quad\cdots\quad E_{pi,L}],\ i=1,\cdots,L,\ E_p=[E_{p1}^{\mathrm T}\quad\cdots\quad E_{pL}^{\mathrm T}]^{\mathrm T},\\&\varsigma=[x^{\mathrm T}(k)\quad x^{\mathrm T}(k-d)\quad w^{\mathrm T}(k)\quad p^{\mathrm T}(k)]^{\mathrm T}.\end{aligned} \tag{12}$$

在定理的证明中为突出思路避免繁琐的细节推导，进一步引入下列简写符号

$$\Xi=\begin{bmatrix}A^{\mathrm T}PA-P+V & A^{\mathrm T}PA_d & A^{\mathrm T}PB & A^{\mathrm T}PH\\ A_d^{\mathrm T}PA & A_d^{\mathrm T}PA_d-V & A_d^{\mathrm T}PB & A_d^{\mathrm T}PH\\ B^{\mathrm T}PA & B^{\mathrm T}PA_d & B^{\mathrm T}PB & B^{\mathrm T}PH\\ H^{\mathrm T}PA & H^{\mathrm T}PA_d & H^{\mathrm T}PB & H^{\mathrm T}PH\end{bmatrix} \tag{13a}$$

$$\Gamma=\begin{bmatrix} C^{\mathrm T}QC & 0 & C^{\mathrm T}QD+C^{\mathrm T}S & C^{\mathrm T}QH_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D^{\mathrm T}QC+S^{\mathrm T}C & 0 & D^{\mathrm T}QD+D^{\mathrm T}S+S^{\mathrm T}D+R & D^{\mathrm T}QH_z+S^{\mathrm T}H_z \\ H_z^{\mathrm T}QC & 0 & H_z^{\mathrm T}QD+H_z^{\mathrm T}S & H_z^{\mathrm T}QH_z \end{bmatrix} \tag{13b}$$

$$\Omega(Q_i,S_i,R_i,E_i,E_{di},E_{wi},E_{pi})=$$

$$\begin{bmatrix} E_i^{\mathrm T}R_iE_i & E_i^{\mathrm T}R_iE_{di} & E_i^{\mathrm T}R_iE_{wi} & E_i^{\mathrm T}S_{ii}^{\mathrm T}+E_i^{\mathrm T}R_iE_{pi} \\ E_{di}^{\mathrm T}R_iE_i & E_{di}^{\mathrm T}R_iE_{di} & E_{di}^{\mathrm T}R_iE_{wi} & E_{di}^{\mathrm T}S_{ii}^{\mathrm T}+E_{di}^{\mathrm T}R_iE_{pi} \\ E_{wi}^{\mathrm T}R_iE_i & E_{wi}^{\mathrm T}R_iE_{di} & E_{wi}^{\mathrm T}R_iE_{wi} & E_{wi}^{\mathrm T}S_{ii}^{\mathrm T}+E_{wi}^{\mathrm T}R_iE_{pi} \\ S_{ii}E_i+E_{pi}^{\mathrm T}R_iE_i & S_{ii}E_{di}+E_{pi}^{\mathrm T}R_iE_{di} & S_{ii}E_{wi}+E_{pi}^{\mathrm T}R_iE_{wi} & Q_{ii}+S_{ii}E_{pi}+E_{pi}^{\mathrm T}S_{ii}^{\mathrm T}+E_{pi}^{\mathrm T}R_iE_{pi} \end{bmatrix}$$

$$i=1,\cdots,L \tag{13c}$$

其中 $Q_{ii}=\mathrm{diag}\{0_1 \ \cdots \ 0_{i-1} \ Q_i \ 0_{i+1} \ \cdots \ 0_L\}$，$S_{ii}^{\mathrm T}=[0_1 \ \cdots \ 0_{i-1} \ S_i^{\mathrm T} \ 0_{i+1} \ \cdots \ 0_L]$.

定理 2. 系统(8)在假设 1 和假设 2 下鲁棒稳定且严格(Q,S,R)-耗散，如果存在对称矩阵 $P>0,V>0$ 和标量 $\lambda_i>0$，$i=1,\cdots,L$，使得下列 LMI 成立：

$$\Pi(A,A_d,B,C,D,H,H_z,E,E_d,E_w,E_p):=\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12}\\ \Pi_{12}^{\mathrm T} & \Pi_{22}\end{bmatrix}<0 \tag{14}$$

其中
$$\Pi_{11}=\Xi+\begin{bmatrix} 0 & 0 & C^{\mathrm T}S & -E^{\mathrm T}\hat S^{\mathrm T}\lambda_S \\ 0 & 0 & 0 & -E_d^{\mathrm T}\hat S^{\mathrm T}\lambda_S \\ S^{\mathrm T}C & 0 & D^{\mathrm T}S+S^{\mathrm T}D+R & S^{\mathrm T}H_z-E_w^{\mathrm T}\hat S^{\mathrm T}\lambda_S \\ -\lambda_S\hat SE & -\lambda_S\hat SE_d & H_z^{\mathrm T}S-\lambda_S\hat SE_w & -\lambda_Q\hat Q-\lambda_S\hat SE_p-E_p^{\mathrm T}\hat S^{\mathrm T}\lambda_S \end{bmatrix},$$

$$\Pi_{12}^{\mathrm T}=\begin{bmatrix} Q^{\frac12}C & 0 & Q^{\frac12}D & Q^{\frac12}H_z \\ \lambda_R\hat{\hat R}^{\frac12}E & \lambda_R\hat{\hat R}^{\frac12}E_d & \lambda_R\hat{\hat R}^{\frac12}E_w & \lambda_R\hat{\hat R}^{\frac12}E_p \end{bmatrix},\quad \Pi_{22}=\begin{bmatrix}-I & 0\\ 0 & -\lambda_R\end{bmatrix},$$

$\hat{\hat R}=-\hat R$，且 $\lambda_R,\lambda_S,\lambda_Q$ 分别是关于 λ_i 的适当维数的块对角阵.

证明. 由对称矩阵 $P>0,V>0$，构造如下正定函数

$$L(\boldsymbol x,k)=\boldsymbol x^{\mathrm T}(k)P\boldsymbol x(k)+\sum_{s=k-d}^{k-1}\boldsymbol x^{\mathrm T}(s)V\boldsymbol x(s) \tag{15}$$

对于系统(8)易于求得 $\Delta L(\boldsymbol x,t)=\varsigma^{\mathrm T}\Xi\varsigma$，不妨假设下式成立

$$\varsigma^{\mathrm T}(\Xi+\Gamma)\varsigma<0 \tag{16}$$

考虑到(8c)，当 $i=1,\cdots,L$ 时，不难证明下列不等式(17)对于(9)是充分的

$$\varsigma^{\mathrm T}\Omega(Q_i,S_i,R_i,E_i,E_{di},E_{wi},E_{pi})\varsigma\leqslant 0 \tag{17}$$

对于所有 $\varsigma\neq 0$，严格地讲，是所有$[\boldsymbol x^{\mathrm T}(k) \ \ \boldsymbol x^{\mathrm T}(k-d) \ \ \boldsymbol w^{\mathrm T}(k)]\neq 0$，因为事实上根据假设 2 中的 1)，集合$\{([\boldsymbol x^{\mathrm T}(k) \ \ \boldsymbol x^{\mathrm T}(k-d) \ \ \boldsymbol w^{\mathrm T}(k)],\boldsymbol p^{\mathrm T})\,|\,[\boldsymbol x^{\mathrm T}(k) \ \ \boldsymbol x^{\mathrm T}(k-d) \ \ \boldsymbol w^{\mathrm T}(k)]=0,\boldsymbol p^{\mathrm T}(k)\neq\boldsymbol 0\}$中不可能存在 ς 满足(17)，应用 S-procedure[7]，显然如果存在 $\lambda_1\geqslant 0,\cdots,\lambda_L\geqslant 0$，使得

$$\Xi+\Gamma-\sum_{i=1}^{L}\lambda_i\Omega(Q_i,S_i,R_i,E_i,E_{di},E_{wi},E_{pi})<0 \tag{18}$$

则式(16)和式(17)得到保证. 由式(16)，则总存在一个常数 $\alpha>0$，满足

$$\varsigma^{\mathrm T}(\Xi+\Gamma)\varsigma\leqslant-\alpha\boldsymbol w^{\mathrm T}\boldsymbol w \tag{19}$$

对不等式(19)从 $0\to T>0$ 求和，并令 $\beta(\boldsymbol\varphi(0))=\boldsymbol\varphi^{\mathrm T}(0)P\boldsymbol\varphi(0)+\sum_{s=-d}^{-1}\boldsymbol\varphi^{\mathrm T}(s)V\boldsymbol\varphi(s)$，得

$$L(\boldsymbol{x},T)-\beta(\boldsymbol{\varphi}(0))+\sum_{k=0}^{T}\boldsymbol{\varsigma}^{\mathrm{T}}(k)\Gamma\boldsymbol{\varsigma}(k)\leqslant-\alpha\sum_{k=0}^{T}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{w}(k) \tag{20}$$

由 $L(\boldsymbol{x},T)\geqslant 0$，并将式(13b)代入，根据定义 1，则系统(8)是鲁棒严格(Q,S,R)-耗散的.

进一步由(16)，令 $\boldsymbol{w}=0$，得 $\Delta L(\boldsymbol{x},k)+(C\boldsymbol{x}+H_z\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}Q(C\boldsymbol{x}+H_z\boldsymbol{p})<0$，考虑到假设 1 中的 2)，显然 $\Delta L(\boldsymbol{x},k)<0$，证明系统(8)是鲁棒稳定的.

令

$$\lambda_R=\mathrm{diag}\left\{\lambda_1 I_{h_1}\quad\cdots\quad\lambda_L I_{h_L}\right\},\ \lambda_Q=\lambda_S=\mathrm{diag}\left\{\lambda_1 I_{k_1}\quad\cdots\quad\lambda_L I_{k_L}\right\} \tag{21}$$

由式(18)得

$$\Xi+\Gamma-\Omega(\lambda_Q\hat{Q},\lambda_S\hat{S},\lambda_R\hat{R},E,E_d,E_w,E_p)<0 \tag{22}$$

注意到假设 2 中的 2)，又 $\hat{\hat{R}}=-\hat{R}$，则 $\hat{\hat{R}}\geqslant 0$，应用 Schur 补，即可得(14).　　证毕.

4.3　鲁棒耗散控制器设计

现在讨论鲁棒耗散控制综合问题. 考虑一类满足(11)的不确定离散时滞系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+A_d\boldsymbol{x}(k-d)+B\boldsymbol{w}(k)+B_2\boldsymbol{u}(k)+\sum_{i=1}^{L}H_i\boldsymbol{p}_i(k) \tag{23a}$$

$$\boldsymbol{z}(k)=C\boldsymbol{x}(k)+D\boldsymbol{w}(k)+D_2\boldsymbol{u}(k)+\sum_{i=1}^{L}H_{zi}\boldsymbol{p}_i(k) \tag{23b}$$

$$\boldsymbol{q}_i(k)=E_i\boldsymbol{x}(k)+E_{di}\boldsymbol{x}(k-d)+E_{wi}\boldsymbol{w}(k)+E_{ui}\boldsymbol{u}(k)+\sum_{j=1}^{L}E_{p_i,j}\boldsymbol{p}_j(k) \tag{23c}$$

$$i=1,\cdots,L,\ \boldsymbol{x}(k)=0,\ k\in[-d,0].$$

其中 $\boldsymbol{u}(k)\in R^m$ 是控制输入，B_2,D_2 和 E_{ui} 分别是适当维数的实常数矩阵，且令 $E_u=[E_{u1}^{\mathrm{T}}\quad\cdots\quad E_{uL}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，其它变量和矩阵的定义同系统(8).

定义 4. 给定对称矩阵 Q,R 和矩阵 S，对于系统(23)设计一个线性反馈控制器使得相应的闭环系统鲁棒稳定且严格(Q,S,R)-耗散，则称该反馈控制器为鲁棒耗散控制器.

考虑无记忆状态反馈情形，下列定理给出了鲁棒耗散控制器存在的条件和设计方法.

定理 3. 给定对称矩阵 Q,R，矩阵 S 以及不确定性描述权矩阵 Q_i,S_i,R_i，系统(23)在假设 1 和假设 2 条件下存在一个鲁棒耗散控制器，如果存在正定对称矩阵 $X,W\in R^{n\times n}$和矩阵 $Y\in R^{m\times n}$以及实标量 $\alpha_i>0(i=1,\cdots,L)$，使得以下 LMI 成立

$$\begin{bmatrix}-X+W & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -W & * & * & * & * & * \\ S^{\mathrm{T}}Z_C & 0 & D^{\mathrm{T}}S+S^{\mathrm{T}}D+R & * & * & * & * \\ -\hat{S}Z_E & -\hat{S}E_dX & \alpha_S H_z^{\mathrm{T}}S-\hat{S}E_w & -\hat{Q}\alpha_S-\hat{S}E_p\alpha_S-\alpha_S E_p^{\mathrm{T}}\hat{S}^{\mathrm{T}} & * & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}}Z_C & 0 & Q^{\frac{1}{2}}D & Q^{\frac{1}{2}}H_z\alpha_S & -I & * & * \\ \hat{\hat{R}}^{\frac{1}{2}}Z_E & \hat{\hat{R}}^{\frac{1}{2}}E_dX & \hat{\hat{R}}^{\frac{1}{2}}E_w & \hat{\hat{R}}^{\frac{1}{2}}E_p\alpha_S & 0 & -\alpha_R & * \\ Z_A & A_dX & B & H & 0 & 0 & -X\end{bmatrix}<0 \tag{24}$$

其中 $Z_E=EX+E_uY$；α_S,α_R 是由 $\alpha_i>0(i=1,\cdots,L)$组成的适当维数的块对角阵；“$*$”号表示关于对角线对称的项.

进而，如果 LMI (24)有解，则可得到基于无记忆状态反馈的鲁棒耗散控制器 $\boldsymbol{u}(k)=$

$YX^{-1}\boldsymbol{x}(k)$.

证明. 引入无记忆状态反馈器 $\boldsymbol{u}(k)=K\boldsymbol{x}(k)$，相应的闭环系统为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\bar{A}\boldsymbol{x}(k)+A_d\boldsymbol{x}(k-d)+B\boldsymbol{w}(k)+H\boldsymbol{p}(k) \tag{25a}$$

$$\boldsymbol{z}(k)=\bar{C}\boldsymbol{x}(k)+D\boldsymbol{w}(k)+H_z\boldsymbol{p}(k) \tag{25b}$$

$$\boldsymbol{q}(k)=\bar{E}\boldsymbol{x}(k)+E_d\boldsymbol{x}(k-d)+E_w\boldsymbol{w}(k)+E_p\boldsymbol{p}(k) \tag{25c}$$

式中

$$\bar{A}=A+B_2K,\ \bar{C}=C+D_2K,\ \bar{E}=E+E_uK \tag{26}$$

应用定理 2，系统(25)在假设 1 和假设 2 下鲁棒稳定且严格(Q,S,R)-耗散，如果存在对称矩阵 $P>0,V>0$ 和标量 $\lambda_i>0$，$i=1,\cdots,L$，使得

$$\Pi(\bar{A},A_d,B,\bar{C},D,H,H_z,\bar{E},E_d,E_w,E_p)<0 \tag{27}$$

将式(26)代人式(27)，并且前后各乘以 $\mathrm{diag}\{P^{-1}\quad P^{-1}\quad I\quad \lambda_S^{-1}\quad I\quad \lambda_R^{-1}\quad I\}$，注意到 $\lambda_S=\lambda_Q$，再进行如下的变量代换 $X=P^{-1},W=P^{-1}VP^{-1},Y=KP^{-1}$，$\alpha_S=\lambda_S^{-1}$ 和 $\alpha_R=\lambda_R^{-1}$，则式(27)等效于式(24). 证毕.

5 结语

本文提出线性离散时滞系统的鲁棒耗散控制问题，利用线性矩阵不等式，给出了无记忆状态反馈鲁棒控制律存在的条件及相应的鲁棒控制器设计方法. 本文的结果，不仅包括了线性时滞系统鲁棒 H_∞控制的一些已有结论，而且给出了统一的框架以解决线性时滞系统到目前还研究较少的课题，如正实控制问题，扇形约束控制问题等. 同时，当时滞项为零时，本文结果实际上将文献[6]的结果进一步推广到含耗散不确定性的情形.

参 考 文 献

1 Willems J C. Dissipative dynamical systems——Part 1: general theory. *Archive for Rational Mechanics Analysis*, 1972, **45**(5):321～351

2 Willems J C. Dissipative dynamical systems——Part 2: linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics Analysis*, 1972, **45**(5):352～393

3 Hill D J, Moylan P J. Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties. *Journal of Franklin Institute*, 1980, **309**(5):327～357

4 Xie S, Xie L, de Souza C E. Robust dissipative control for linear systems with dissipative uncertainty. *International Journal of Control*, 1998, **70**(2):169～191

5 Yuliar S, James M R, Helton J W. Dissipative control systems synthesis with full state feedback. *Mathematics of Control, Signal and Systems*, 1998, **11**(4):335～356

6 Tan Z, Soh Y C, Xie L. Dissipative control for linear discrete-time systems. *Automatica*, 1999, **35**(9):1557～1564

7 Horn R, Johnson C. Topics in Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1991

刘 飞 博士，副教授. 研究领域为鲁棒控制、时滞系统、工业过程模型化及控制、计算机实时控制系统等.

苏宏业 见本刊第 26 卷第 5 期.

褚 健 见本刊第 26 卷第 5 期.