

无奇异间接迭代学习控制及其在 机器人运动模仿中的应用¹⁾

蒋平¹ UNBEHAUEN Rolf²

¹(同济大学信息控制系 上海 200092)

²(Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik,
Universität Erlangen-Nürnberg, D-91058 Erlangen, Germany)

(E-mail: pjiang@robot.tongji.edu.cn; unbehauen@late.e-technik.uni-erlangen.de)

摘要 针对相当广泛的一类非线性系统有限时间轨迹跟踪问题,提出了间接迭代学习方案.采用最小二乘算法,根据重复跟踪历史辨识非线性系统的线性化模型.利用一个分段学习方案可保证学习控制总在有效线性近似区域内进行.探讨了如何在学习过程中避免控制奇异问题,提出了一种高效的参数修正方法,保证输入耦合矩阵的估计行列式不为零.本文将这一控制方案应用于未知机器人及摄像机模型下的机器人运动模仿中,而不面临任何奇异问题.这是一个采用摄像机替代传统程序编写的新的机器人编程方法.

关键词 迭代学习控制,自适应控制,视觉伺服

中图分类号 TP24

NONSINGULAR INDIRECT ITERATIVE LEARNING CONTROL AND ITS APPLICATION TO ROBOT MOVEMENT IMITATION

JIANG Ping¹ UNBEHAUEN Rolf²

¹(Department of Information and Control Engineering, Tongji University, Shanghai 200092)

²(Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik,
Universität Erlangen-Nürnberg, D-91058 Erlangen, Germany)

(E-mail: pjiang@robot.tongji.edu.cn; unbehauen@late.e-technik.uni-erlangen.de)

Abstract An indirect iterative learning control scheme for a general nonlinear system to track a trajectory with a finite time interval is presented, which uses the least square algorithm to identify the linearized model of the nonlinear system in terms of previous experiences of repetitive tracking. A segmented learning scheme is proposed to keep the learning only in the linear approximation region. How to avoid control singularity is discussed. A high efficient modification is proposed to ensure non-zero of the determinant of the estimated input matrix. The scheme is applied to robot movement imitation. Even without any knowledge about camera-robot relationship, the

1) 教育部优秀青年教师资助计划及德国洪堡基金会资助

收稿日期 2000-11-07 收修改稿日期 2001-05-09

controller faces no singularity. This might be a new way for robot trajectory programming by means of a camera instead of hard coding.

Key words Iterative learning control, adaptive control, visual servo

1 引言

针对不确定性系统轨线跟踪作业,迭代学习控制通过对期望轨线的反复跟踪历史改善跟踪性能^[1].通常设计者基于离散 Lyapunov 方法进行学习律设计,控制输入由过去的控制误差直接迭代加以修正,如 P 型及 D 型学习律^[2,3]:

$$u(t, i + 1) = u(t, i) + L(t)e(t, i) \text{ 和 } u(t, i + 1) = u(t, i) + L(t)\dot{e}(t, i)$$

其中 i 表示第 i 次跟踪.

但在以上学习律设计中,设计者必须对非线性结构、参数具有一定的先验知识,如学习增益 $L(t)$ 必须满足如下稳定条件:

$$\| I - C(t)B(t)L(t) \| < 1$$

其中 I 是单位矩阵, $C(t)$ 和 $B(t)$ 是系统输出及输入耦合矩阵.

针对具有线性输出的仿射非线性系统,显然矩阵 $C(t)B(t)$ 是系统输入至输出的 Jacobian 矩阵.因此以上稳定条件意味着学习增益 $L(t)$ 应该是对系统 Jacobian 矩阵逆的某种估计,并且这一估计的相对误差应小于 1.如何设计学习增益以满足以上稳定条件是相当困难的,设计者对系统矩阵 $C(t)$ 和 $B(t)$ 必须具有相当丰富的先验知识.

当系统具有未知输入矩阵(也称为未知控制方向)时,系统 Jacobian 矩阵的估计一直是控制理论的一个难点,在线性自适应理论中,一个基本前提假设是已知高频增益符号以避免奇异问题. Nussbaum 提出了第一个无需任何先验知识的自适应控制律^[4],用一种特殊的增益形式以使一个具有未知高频增益的一阶线性系统稳定.而后这一 Nussbaum 增益形式被许多研究者采用^[5~7].这一 Nussbaum 增益是一个震荡函数并且当自变量增大时该增益发散,所以采用该方法通常暂态品质难以保证,此外尚不清楚如何将该方法应用于多入多出系统中. Lozano 等人针对线性系统提出了一个替代方案以避免奇异问题^[8~10],这一方法被称为修正向量法,它利用互相关矩阵修正估计参数以避免奇异发生.其多数工作集中于单输入系统研究中,针对具有未知输入矩阵的多变量自适应控制问题, Moctezuma^[11]提出了一种参数修正方案以避免控制奇异,其中修正矩阵在一组常数矩阵中根据磁滞决策选取,但这一矩阵集合随系统维数 n 增加而急剧增大,在高维系统中难以采用.

本文将一个一般性的非线性系统沿期望轨线线性化,由于这一线性化过程是沿一时变轨迹进行的,因此这一线性化模型为一时变线性系统,通常的自适应控制方法无法应用于这类系统中.而迭代学习控制由于其学习方向是在迭代轴上进行,却可能对这类可重复但时变的未知系统进行控制,此时对于每次跟踪,系统在某一特定时刻的不确定性总是重复出现的,因此我们希望利用最小方差参数估计方法沿迭代轴对轨线各点的可重复未知参数进行估计,而后基于修正向量思想进行估计参数修正,在几乎无先验知识的条件下避免奇异问题,考虑到针对多入多出系统的修正向量法实现上的复杂性^[11],本文提出了一种高效的、基于奇异值分解的磁滞修正方案,将决策运算量减少到 n 次.在自适应控制中,通常有基于自

适应机构调节的直接自适应控制和基于参数估计的间接自适应控制,与之相应,我们称本文所提方法为间接迭代学习控制. 本研究的应用背景是设计一个通用的基于图像特征的机器人视觉伺服控制器,以完成机器人运动模仿,其通用性表现为比较任意的特征选取及未知的摄像机-机器人模型.

2 非线性系统线性化模型的间接迭代学习控制

考虑如下系统的重复跟踪问题,使状态跟踪有限时间期望轨迹 $x_d(t) (0 \leq t \leq t_f)$

$$\dot{x}(t, i) = f(t, i, x, u) \tag{1}$$

其中 t 为时间, i 为重复次数, $f(t, i, x, u) \in R^n$ 为一个连续可微的非线性函数, $x(t, i) \in R^n$, $u(t, i) \in R^n$ 分别是系统的状态和输入.

假设沿期望轨线系统(1)可逆,即存在一个控制输入 $u_d(t)$ 能够实现这一目标,则对任意时刻 $t, 0 \leq t \leq t_f$, 可得原非线性系统关于 $x_d(t)$ 及 $u_d(t)$ 的线性近似:

$$\dot{x}(t, i) = C(t, i, x_d(t)) + A(t, i, x_d(t))e(t, i) + B(t, i, x_d(t))u(t, i) \tag{2}$$

其中 $e(t, i) = x_d(t) - x(t, i)$.

设系统满足如下假设.

A1) 系统满足可重复条件:对于任意次重复跟踪 i ,

$$A(t, i, x_d(t)) = A(t, x_d(t)), B(t, i, x_d(t)) = B(t, x_d(t)), C(t, i, x_d(t)) = C(t, x_d(t)).$$

A2) 原系统在期望轨线附近是可逆的,即 $|\det[B(t, x_d(t))]| \geq \alpha$.

在以上基本假设中, A1) 说明系统的不确定性是可重复的,可通过迭代学习加以控制, A2) 是一个系统可逆性假设,反映系统(2)的能控性.

对于反复跟踪,系统(2)可以描述如下:

$$\dot{x}(t, i) = \theta^T(t)\phi(t, i), \quad 0 \leq t \leq t_f \tag{3}$$

其中 $\theta^T(t) = [B(t, x_d(t)), A(t, x_d(t)), C(t, x_d(t))] \in R^{n \times (2n+1)}$, $\phi^T(t, i) = [u^T(t, i), e^T(t, i), 1] \in R^{1 \times (2n+1)}$

采用最小方差算法沿迭代轴 i 估计每个采样时刻 t 的系统矩阵. 方程(3)的每行可写为下式

$$\dot{x}_j(t, i) = c_j(t, x_d(t)) + a_j^T(t, x_d(t))e(t, i) + b_j^T(t, x_d(t))u(t, i) = \theta_j^T(t)\phi(t, i) \tag{4}$$

其中 $\theta_j^T(t) = [b_j^T(t, x_d(t)), a_j^T(t, x_d(t)), c_j(t, x_d(t))]$, $j = 1, \dots, n$.

令第 i 次跟踪后的辨识误差为

$$\epsilon_j(t, i) = \dot{x}_j(t, i) - \hat{\theta}_j^T(t, i-1)\phi(t, i), \quad j = 1, \dots, n \tag{5}$$

其中 $\hat{\theta}_j(t, i-1)$ 是在 $(i-1)$ 次跟踪后的参数估计.

根据最小方差估计算法,第 i 次跟踪后的迭代估计方程应为

$$\hat{\theta}_j(t, i) = \hat{\theta}_j(t, i-1) + P(t, i)\phi(t, i)\epsilon_j(t, i) \tag{6}$$

$$P(t, i) = P(t, i-1) - \frac{P(t, i-1)\phi(t, i)\phi^T(t, i)P(t, i-1)}{1 + \phi^T(t, i)P(t, i-1)\phi(t, i)} \tag{7}$$

其中 $P(t, 0) > 0, 0 \leq t \leq t_f$.

对于具有可重复不确定性系统,虽然 $\hat{\theta}(t, i)$ 及 $P(t, i)$ 的收敛性可以被保证,但不一定能收敛到真值,因此若根据确定性等价原理设计控制律,在计算输入矩阵 $\hat{B}(t, i)$ 逆时,可能会

面临奇异问题. 下面根据修正向量法的思想对估计参数 $\hat{\theta}(t, i)$ 进行修正以避免这一奇异问题

$$\bar{\theta}(t, i) = \hat{\theta}(t, i) + P(t, i)\beta(t, i) \tag{8}$$

其应满足

P1) $\beta(t, i) \in R^{(2n+1) \times n}$ 有界且收敛;

P2) $\beta(t, i)$ 应使 $\bar{B}(t, i)$ 的行列式绝对值下有界.

采用以上修正后的参数 $\bar{\theta}(t, i)$ 替代方程(5)中的 $\hat{\theta}(t, i)$, 对应的修正辨识误差可以表示为

$$\bar{\epsilon}(t, i) = \dot{x}(t, i) - \bar{\theta}^T(t, i - 1)\phi(t, i) \tag{9}$$

并且具有如下特性^[11]:

$$P3) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\bar{\epsilon}(t, i)}{[1 + k(t)\phi^T(t, i)\phi(t, i)]^{1/2}} = \mathbf{0}, \quad k(t) = \lambda_{\max}[P(t, 0)].$$

因此可以得到如下结论:根据 P1), $\bar{\theta}(t, i)$ 自身是收敛的; 根据 P2), 控制律计算中的奇异问题可以避免. 由确定性等价原理, 可以设计如下控制律:

$$u(t, i) = \bar{B}(t, i - 1)^{-1}(\dot{x}_d(t) - \bar{C}(t, i - 1)x(t, i) - \bar{A}(t, i - 1)\Delta x(t, i) + Ke(t, i)), \quad 0 \leq t \leq t_f \tag{10}$$

至此方程(6)~(8)和(10)描述了本文所提出的间接迭代学习控制器.

定理 1. 对于线性化系统(2), 在(6)~(8)和(10)的控制下反复跟踪期望轨线 $x_d(t)$, $0 \leq t \leq t_f$, 当重复次数趋于无穷时, 最终控制误差特性将表现为一个时间轴指数稳定线性系统, 并且系统中所有信号有界.

证明见附录 A.

3 基于奇异值分解的参数修正方法

在定理 1 中, 避免控制奇异的关键点在于如何选择修正矩阵 $\beta(t, i) \in R^{(2n+1) \times n}$ 使条件 P1) 及 P2) 得以满足. 以下将提出一个具有计算阶数 n 的修正方案.

步骤 1. 对于输入矩阵的估计 $\hat{B}(t, i)$, 进行奇异值分解 $\hat{B}(t, i) = USV^T$, 其中 $S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

步骤 2. 将奇异值分解所得 V 阵左乘最小方差增益阵 $P(t, i)$ 的前 n 行 $P_{1,n}(t, i) \in R^{n \times (2n+1)}$ 得 $P'_{1,n}(t, i) = V^T P_{1,n}(t, i)$.

步骤 3. 给定奇异阈值 d , 从最小奇异值(σ_n)到最大奇异值(σ_1)顺序与 d 进行磁滞比较如图 1, 其中磁滞宽度为 δ ($\delta \ll d$), 则我们可以获得一个 n 维向量 $h = [h_1, h_2, \dots, h_n]$ 用以描述有多少奇异值(σ_1 到 σ_p), 即使无任何修正, 相对于给定阈值 d 已经足够大, 同时有多少奇异值(σ_{p+1} 到 σ_n)由于过小而可能面临奇异问题. 设经过 n 步决策后获得如下向量

$$h = [h_1, h_2, \dots, h_n] = [\underbrace{0, \dots, 0}_p, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-p}] \tag{11}$$

其表示前 p 个奇异值无需修正, 而后 $n-p$ 个奇异值需要修正.

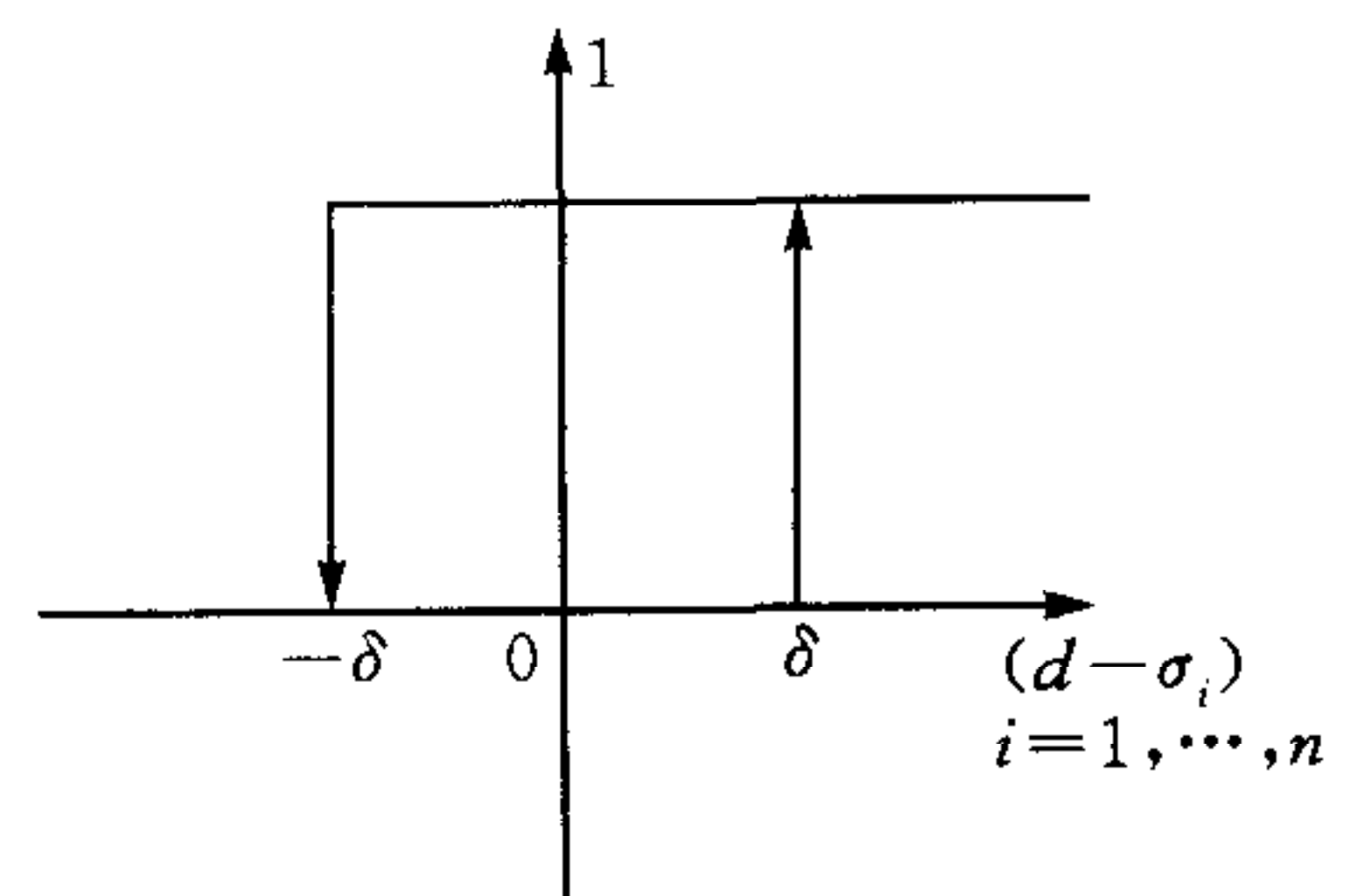


图 1 磁滞函数

步骤 4. 在确定 p 后,可以知道最后 $n-p$ 个奇异值必须进行修正. 对应于此,给定任意对角正定矩阵 $Y = \text{diag}(\sigma'_{p+1}, \dots, \sigma'_n) > 0$, 其中 $\sigma'_i > d, i = p+1, \dots, n$. 则式(8)中的修正矩阵 $\beta(t, i)$ 可由下式获得

$$\beta(t, i) = \begin{bmatrix} \underbrace{\lambda} & \underbrace{\lambda} \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} U^T \in R^{(2n+1) \times n}, \text{其中 } \lambda = P'_{p+1, n} \text{diag}(\sigma'_{p+1}, \dots, \sigma'_n) \quad (12)$$

步骤 5. 基于方程(8), 我们获得修正后的估计参数 $\bar{\theta}(t, i)$, 并可以进行控制律(10)计算而无任何奇异问题.

步骤 1 到 5 构成了一个高效的针对多输入系统的参数修正过程. 由于仅那些小于给定阈值的奇异值被修正, 因此它对原估计具有较小的影响.

定理 2. 在以上步骤 1 到 5 的修正过程中, 若选定阈值 d 及磁滞宽度 δ 满足 $d + \delta < \sqrt{P_M^2 \beta_M^2 + \alpha_1 - P_M \beta_M}$, 其中 P_M, β_M, α_1 是 3 个已知常数(在证明中定义), 则 P1) 及 P2) 得以满足.

证明见附录 B.

4 基于视觉伺服的机器人运动轨迹模仿

在这一节中, 我们将提出一个基于视觉反馈的机器人行为模仿方案, 这是一个由无知到有知的反复学习过程, 针对期望轨线作业, 首先令教师使用某种工具进行操作示范, 同时一台摄像机记录工具(或物体)上一些选定特征点在图象平面上的运动轨迹, 这些图象平面上的轨迹描述了机械手的期望运动, 而后令机械手使用同样工具进行重复训练, 采用所提出的迭代学习方案, 在对系统无任何先验知识的情况下, 机械手最终可以实现期望操作, 同时可避免视觉伺服中 Jacobian 矩阵的奇异发生.

针对单摄像机的三维位姿视觉伺服, 为了计算控制输入至少要求三个非共线特征点. 设这三个特征点在图象平面的投影为 $p(x, y) = [x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t), x_3(t), y_3(t)]^T$, 在一个局部有效范围内, 物体位姿可由该投影向量唯一确定. 设系统光流方程如下:

$$\dot{p} = J(p)\dot{\theta} \quad (13)$$

其中 $J(p) \in R^{6 \times 6}$ 为 Jacobian 矩阵, $\dot{\theta} \in R^6$ 为机械手末端点速度向量, 它是系统的控制输入, 设为 u .

由方程(13), 我们可以发现视觉伺服问题是一个典型的具有未知输入矩阵的控制问题. 针对重复跟踪, 沿期望轨线线性化得:

$$\dot{p}(t, i) = A(t, i, x_d(t))e(t, i) + J(t, i, x_d(t))u(t, i)$$

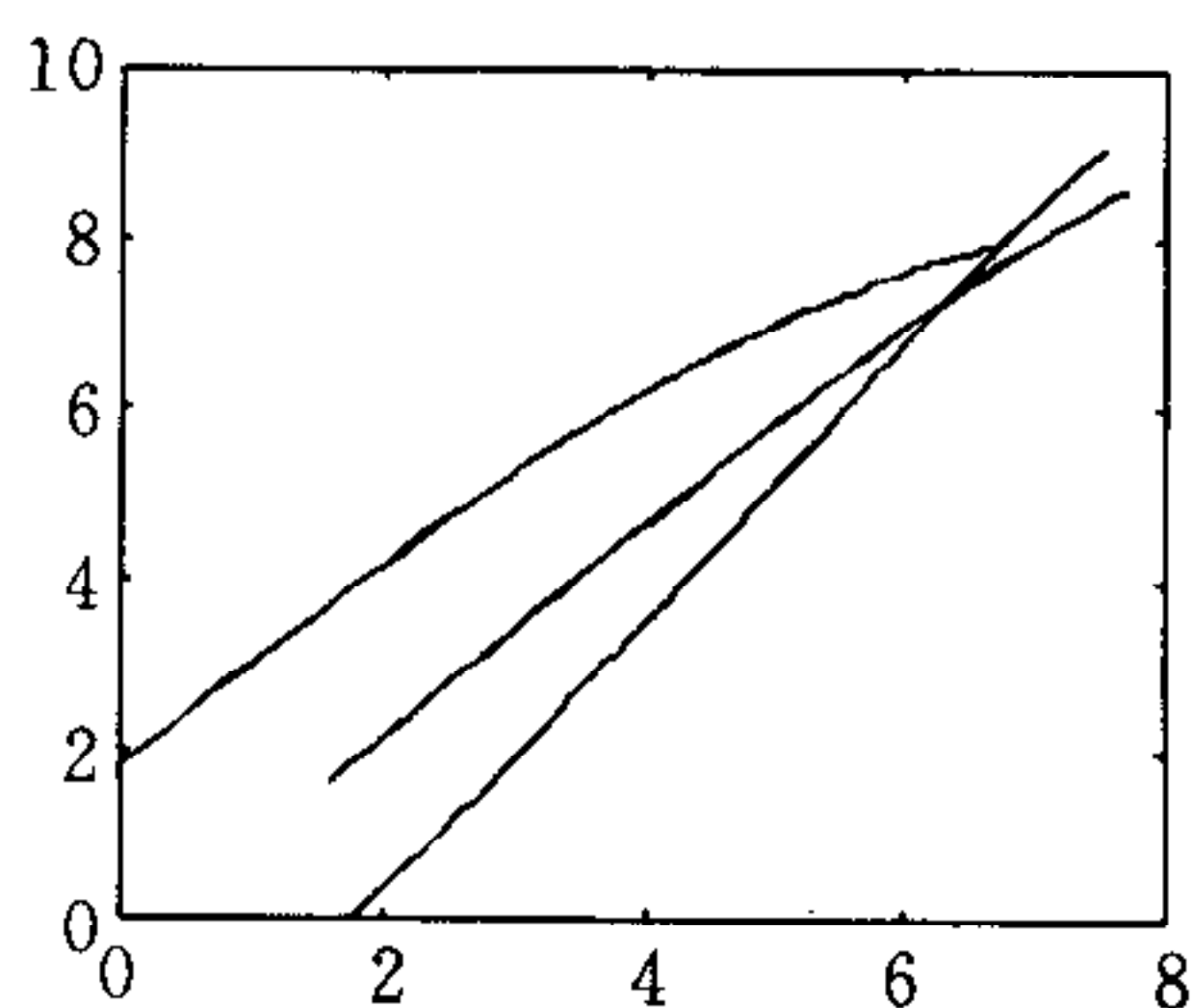


图 2 图像平面中的期望轨迹

首先令教师手握物体进行期望运动示范, 同时一个焦距为 16mm 的理想摄像机记录 3 个特征点在像平面的运动轨迹 $p_d(t) = [x_{d1}(t), y_{d1}(t), x_{d2}(t), y_{d2}(t), x_{d3}(t), y_{d3}(t)]^T$ 5 秒如图 2. 视频信号采样速率为 50Hz. 在图 3 所示工具坐标 F_t 中 3 个特征点为

$${}^{F_t}P_1 = [0.1 \ 0.1 \ 0]^T, {}^{F_t}P_2 = [0.1 \ 0 \ 0.1]^T, {}^{F_t}P_3 = [0 \ 0.1 \ 0.1]^T$$

设期望轨迹由如下速度作用于工具坐标 F_t 产生:

$$u = [V \ \omega]^T = \sin(0.6t) [0.3 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.3]^T.$$

工具坐标在基坐标中的初始条件为 ${}^{F_c}R_{F_t} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{F_c}P_{F_{t0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 F_c 是基坐标架,它固连于摄像机, ${}^{F_c}R_{F_t}$ 为 F_t 相对于 F_c 的旋转矩阵, ${}^{F_c}P_{F_{t0}}$ 为 F_t 原点在 F_c 中的坐标(如图 3).

为了获得(5)式辨识误差,采用一阶差分离线计算特征点光流. 设置辨识算法初始值: $P(t,0) = 100I$, $\hat{A}(t,0) = 0, \hat{J}(t,0) = 0$. 正是由于采用了第三节中的修正方案,这里初始 Jacobian 矩阵才可以如此随意选取为零,而无任何奇异问题. 反馈增益(10)被选为 $K = 20I$,在修正算法中,阈值及磁滞宽度分别被选为 $d = 1.6 \times 10^{-5}$ 和 $\delta = 8 \times 10^{-6}$. 在我们通过磁滞决策获得 p 后,可以如步骤 4 对奇异值 $p+1$ 到 n 进行修正,其中 σ'_i 选为 $0.01 (i = p+1, \dots, n)$.

下面可以对机械手进行训练,首先令机械手抓取物体运动到起始点,由于这是一个点到点运动,可以手动控制它较准确地到达该点. 设对于每次跟踪训练,系统具有一个在 $\pm 1\text{mm}$ 范围内的随机初始定位偏差 v .

由于所提迭代学习控制算法是针对非线性系统的线性化模型设计的,因此其只能保证局部收敛特性,为此在训练中,要求系统工作在一个有效区域内. 本文提出如下分段训练方案:在一个未经学习的控制作用下,通常控制误差会随期望轨迹的运动而逐渐增大,如果其未超出有效域 Ω_M ,则采用所提学习方法对相应轨迹点进行学习;若某时刻,跟踪误差到达 Ω_M 边界,则将期望轨迹分割为两段,停止本次跟踪,并重新由初始点开始仅对第一段进行重复跟踪学习. 根据定理 1,如果初始定位能够使 $x(0,i)$ 满足这一期望精度要求,第一段可以被训练至任意期望精度. 而后可以扩展第一段直至又一次到达 Ω_M 边界,进行新的分段学习. 重复以上过程,全部期望轨迹点可以被控制于期望精度内. 由于所提迭代学习方法是沿迭代轴进行的,从而轨迹点间是相互独立的,因此采用这种分段训练方法不会改变第二节中的稳定结论.

令用于分段的有效域 $\Omega_M = \{x: \|e(t,i)\|_\infty \leq 4 \times 10^{-4}\}$,图 4 显示了 50 次训练的跟踪误差,其中 i 为迭代轴, t 为时间轴, $z = \sum_{j=1}^3 \|E_j(t,i)\|$ 描述了 3 个特征点在工作空间的控制

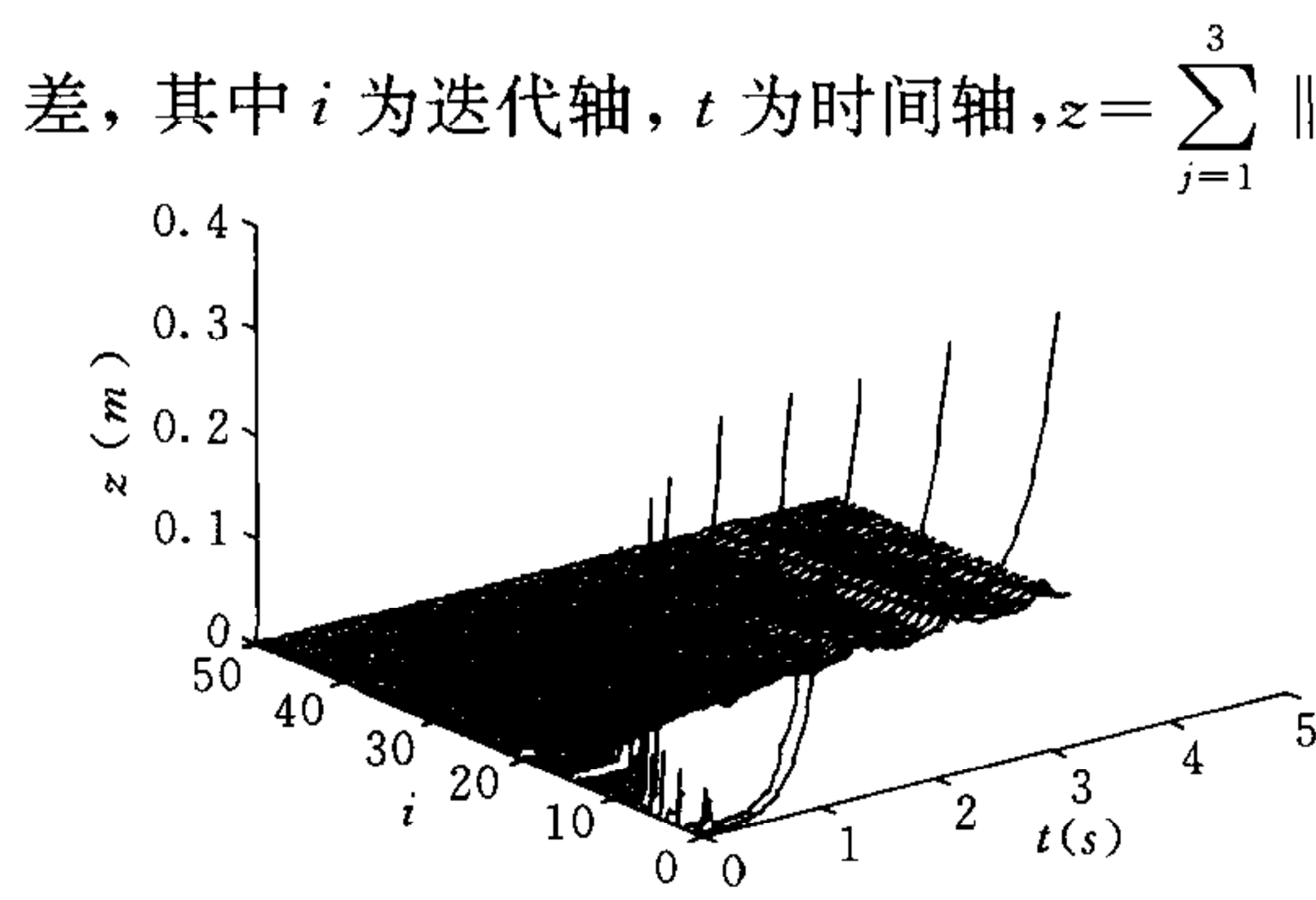


图 4 迭代学习误差序列

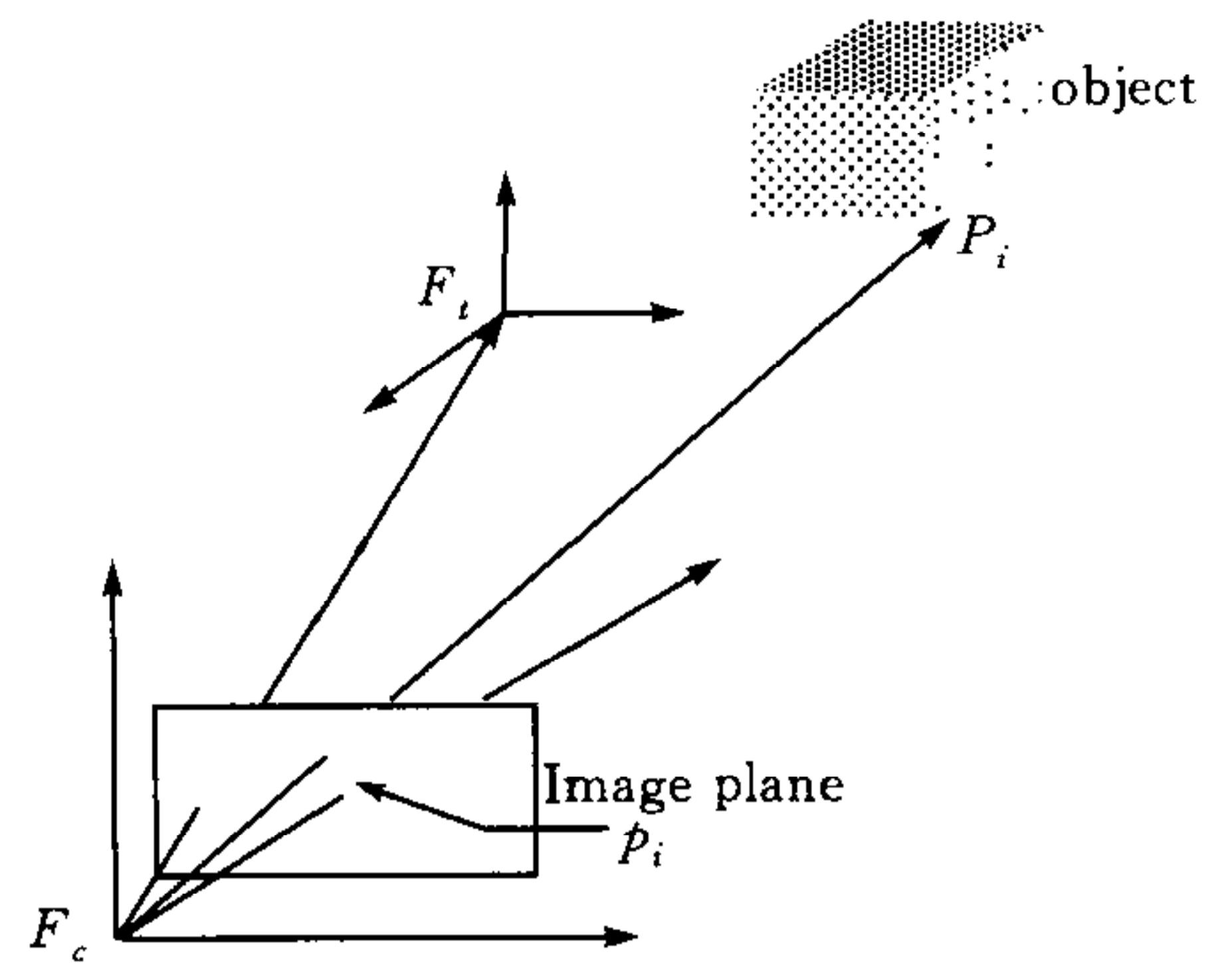


图 3 坐标系定义

误差总和. 这一训练历史清楚地描述了轨迹段的扩展过程,开始仅相对较短的跟踪段可保证控制误差维持在有效域内,通过重复学习,控制器获得了更多的关于系统的知识,跟踪段也随之延长. 在 50 次训练后,所有特征点的最大控制误差维持在 $0.71(\text{mm})$ 以内. 以上结果表明所提方案可以成功地应用于基于视觉的机器人轨迹运动模仿,并且在无任何

先验知识的前提下不会发生控制奇异问题. 同时由机器人行为模仿问题本身可以看出, 迭代学习控制是针对这一问题的理想解决方案.

5 结论

本文提出了基于参数辨识的间接迭代学习控制方法, 由于仅具有系统沿期望轨迹的可逆性及可线性化要求, 本方案可以认为是一个无模型控制方法. 利用线性化模型沿期望轨迹的可重复特点, 采用迭代学习控制思想进行期望轨迹的跟踪控制. 在无先验知识条件下为了避免控制奇异问题, 本文将自适应控制中的修正向量法引入迭代学习控制中并进行了相应改进, 提出了针对多输入系统的奇异值磁滞修正方案, 与自适应控制中的磁滞修正方法相比, 本方法将运算量减少到 n 阶. 最后本文提出了基于视觉的机器人行为模仿控制器, 该问题本身所表现出的诸多特点表明迭代学习控制非常适合于这一应用. 仿真结果验证了该方法的有效性.

参 考 文 献

- 1 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robotics System*, 1984, **1**(2):123~140
- 2 Saab S S. On the P-type learning control. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, **39**(11):2298~2302
- 3 Heinzinger G, Fenwick D, Paden B, Miyazaki F. Stability of learning control with disturbances and uncertain initial condition. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1992, **37**(1):110~114
- 4 Nussbaum R D. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *System Control Lett.*, 1983, **3**(5):243~246
- 5 Mudgett D R, Morse A S. Adaptive stabilization of linear systems with unknown high-frequency gains. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1985, **30**(6): 549~554
- 6 Martenson B. Remarks on adaptive stabilization of first order nonlinear systems. *System Control Lett.*, 1990, **14**(1):1~7
- 7 Ye X. Asymptotic regulation of time-varying uncertain nonlinear systems with unknown control directions. *Automatica*, 1999, **35**(5):929~935
- 8 Lozano R, Collado J, Mondie S. Model reference adaptive control without a priori knowledge of the high-frequency gain. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1990, **35**(1):71~78
- 9 Lozano R, Osorio A, Torres J. Adaptive stabilization of nonminimum phase first-order continuous-time systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, **39**(8): 1748~1751
- 10 Lozano R, Brogliato B. Adaptive control of a simple nonlinear system without a priori information on the plant parameters. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, **37**(1):30~37
- 11 Moctezuma R G, Lozano R. Singularity-free multivariable model reference adaptive control. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, **39**(9):1856~1860
- 12 Goodwin G C, Sin K S. Adaptive Filtering, Prediction and Control. New York: Prentice-Hall, 1984

附 录 A

定理 1 的证明.

令第 i 次跟踪误差为 $e(t, i) = x_d(t) - x(t, i)$, 则根据式(9)

$$\begin{aligned} \dot{e}(t, i) &= \dot{x}_d(t) - \dot{x}(t, i) = \\ & \dot{x}_d(t) - \bar{\theta}^T(t, i-1)\phi(t, i) - (\dot{x}(t, i) - \bar{\theta}^T(t, i-1)\phi(t, i)) = \end{aligned}$$

$$\dot{x}_d(t) - \bar{C}(t, i - 1) - \bar{A}(t, i - 1)\Delta x(t, i) - \bar{B}(t, i - 1)u(t, i) - \bar{\epsilon}(t, i)$$

将控制器(10)代入上式得

$$\dot{e}(t, i) = -Ke(t, i) - \bar{\epsilon}(t, i) \text{ 或 } \dot{e}(t, i) + Ke(t, i) = -\bar{\epsilon}(t, i) \tag{A. 1}$$

设第 i 次最大辨识误差为 $\bar{\epsilon}_M(i) = \{\bar{\epsilon}(t, i) : \max_{0 \leq t \leq t_f} (\|\bar{\epsilon}(t, i)\|)\}$, 根据 P3), 若迭代次数趋于无穷, 则

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\bar{\epsilon}_M(i)}{[1 + k(t)\phi_M^T(i)\phi_M(i)]^{1/2}} = \mathbf{0}, \quad 0 \leq t \leq t_f \tag{A. 2}$$

其中 $\phi_M(i)$ 为对应于第 i 次跟踪的最大误差 $\bar{\epsilon}_M(i)$ 时刻的对应向量.

考虑线性系统(A. 1), 因为 K 是一个正定对角矩阵, 所以存在正常数 κ_1 及 κ_2 使得

$$\|e(t, i)\| \leq \kappa_1 + \kappa_2 \max_{1 \leq \tau \leq i} \|\bar{\epsilon}_M(\tau)\|, \quad \forall t, 0 \leq t \leq t_f \tag{A. 3}$$

在控制律(10)中, 修正系数矩阵 $\bar{A}(t, i), \bar{B}(t, i), \bar{C}(t, i)$ 是矩阵 $\bar{\theta}(t, i)$ 的子矩阵, 根据 P1), 其有界, 根据 P2), $\bar{B}(t, i)$ 可逆, 由于 $\dot{x}_d(t)$ 有界, 所以存在正常数 κ_1 及 κ_2 使得

$$\|u(t, i)\| \leq \kappa_1 + \kappa_2 \max_{1 \leq \tau \leq i} \|\bar{\epsilon}_M(\tau)\|, \quad \forall t, 0 \leq t \leq t_f \tag{A. 4}$$

由式(A. 3), (A. 4)可知存在正常数 κ_1 及 κ_2 使下式满足

$$\|\phi_M(i)\| \leq \kappa_1 + \kappa_2 \max_{1 \leq \tau \leq i} \|\bar{\epsilon}_M(\tau)\|$$

对(A. 2)应用文献[12]的关键技术引理可得 $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\epsilon}_M(i) = \mathbf{0}$ 且系统中所有信号有界.

根据 $\bar{\epsilon}_M(i)$ 定义, 可进一步得 $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\epsilon}(t, i) = \mathbf{0}$. 代入式(A. 1), 可以得到结论: 系统通过学习最终表现为一个指数稳定线性系统:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} [\dot{e}(t, i) + Ke(t, i)] = 0 \tag{证毕.}$$

附录 B

定理 2 的证明.

根据最小方差特性, 实际参数 $\theta(t)$ 可以表示为

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t, i) + P(t, i)\beta^*(t) \tag{B. 1}$$

将式(B. 1)两端同乘以 $[I_{n \times n} \quad 0]_{n \times (2n+1)}$, 其中 $I_{n \times n}$ 是单位矩阵, 由式(3)中 $\theta(t)$ 的定义可知

$$B^T(t, x_d(t)) = \hat{B}^T(t, i) + P_{1,n}(t, i)\beta^*(t) \tag{B. 2}$$

其中 $P_{1,n}(t, i) \in R^{n \times (2n+1)}$ 是 $P(t, i)$ 中由前 n 行组成的子阵. 由第二节假设 A2)可知

$$|\det[B(t, x_d(t))]| \geq \alpha, \text{ 即 } |\det[\hat{B}^T(t, i) + P_{1,n}(t, i)\beta^*(t)]| \geq \alpha.$$

将估计输入矩阵的奇异值分解 $\hat{B}(t, i) = USV^T$ 代入(B. 2), 并利用上式得

$$|\det[\hat{B}^T(t, i) + P_{1,n}(t, i)\beta^*(t)]| = |\det V| |\det[S + P'_{1,n}(t, i)\beta^{*'}(t)]| |\det U| \geq \alpha$$

其中 $P'_{1,n}(t, i) = V^T P_{1,n}(t, i)$, $\beta^{*'}(t) = \beta^*(t)U$.

因为矩阵 V, U 都是正交矩阵, 所以

$$|\det[S + P'_{1,n}(t, i)\beta^{*'}(t)]| \geq \alpha \tag{B. 3}$$

设经过步骤 3, 我们获得 p , 满足 $\sigma_i > d - \delta, i = 1, \dots, p$, 而其它奇异值 $\sigma_i < d + \delta, i = p + 1, \dots, n$ 必须进行修正. 根据方程(B. 3)可知对于任意 $p, p = 0, \dots, n - 1$, 存在一个正常数 α_1 满足

$$\lambda_{\min} \left([S_{p+1,n} + P'_{p+1,n}(t, i)\beta^{*'}(t)] [S_{p+1,n} + P'_{p+1,n}(t, i)\beta^{*'}(t)]^T \right) \geq \alpha_1 \tag{B. 4}$$

其中 $S_{p+1,n}$ 是 S 矩阵中由 $p + 1$ 到 n 行构成的子阵, 即

$$S_{p+1,n} = [0_{(n-p) \times p} \quad \text{diag}(\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_n)]$$

对于任意 Hermitian 矩阵 A, B , 以下不等式成立:

$$\lambda_{\min}(A + B) \leq \min\{\lambda_{\max}(A) + \lambda_{\min}(B), \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(B)\}; \lambda_{\max}(A + B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B).$$

在(B. 4)左边运用以上结论得

$$\begin{aligned} \alpha_1 \leq & \lambda_{\max}(S_{p+1,n}S_{p+1,n}^T) + \lambda_{\max}\left(S_{p+1,n}\left[P'_{p+1,n}(t,i)\beta^{*'}(t)\right]^T + \left[P'_{p+1,n}(t,i)\beta^{*'}(t)\right]S_{p+1,n}^T\right) + \\ & \lambda_{\min}\left(\left[P'_{p+1,n}(t,i)\beta^{*'}(t)\right]\left[P'_{p+1,n}(t,i)\beta^{*'}(t)\right]^T\right) \leq \\ & \sigma_{p+1}^2 + 2\|P'_{p+1,n}(t,i)\|\|\beta^{*'}(t)\|\sigma_{p+1} + \lambda_{\max}\left(\beta^{*'}(t)\beta^{*'}(t)^T\right)\lambda_{\min}\left(P'_{p+1,n}(t,i)P_{p+1,n}'^T(t,i)\right) \end{aligned} \quad (B.5)$$

根据 $P(t,i)$ 及实际 $\beta^*(t)$ 的有界性, 可以假设

$$\|P'_{p+1,n}(t,i)\| \leq P_M, \quad \lambda_{\max}\left(\beta^{*'}(t)\beta^{*'}(t)^T\right) \leq \beta_M^2 \quad (B.6)$$

进一步由于 $\sigma_{p+1} < d + \delta$, 若我们设计阈值 d 使得 $\alpha_2 = \alpha_1 - 2P_M\beta_M(d + \delta) - (d + \delta)^2 > 0$, 即, $d + \delta < \sqrt{P_M^2\beta_M^2 + \alpha_1} - P_M\beta_M$, 式(B.5)可以保证 $\lambda_{\min}(P'_{p+1,n}(t,i)P_{p+1,n}'^T(t,i))$ 是以一正常数为下界的:

$$\lambda_{\min}(P'_{p+1,n}(t,i)P_{p+1,n}'^T(t,i)) \geq \alpha_2/\beta_M^2 \quad (B.7)$$

式(B.7)说明矩阵 $P'_{p+1,n}(t,i)$ 是满秩的, 则对于任意给定 y , 线性方程 $P'_{p+1,n}(t,i)x = y$ 有解 x . 因此在步骤 4 中, 对于任意给定有界矩阵 $Y = \text{diag}(\sigma'_{p+1}, \dots, \sigma'_n)$, $\sigma'_i > d$, $i = p+1, \dots, n$, 存在一个有界的 λ 满足 $P'_{p+1,n}(t,i)\lambda = Y$, 一个可能的解是由 Moore-Penrose 广义逆获得的最小泛数解, 同时它保证了步骤 4 中 $\beta(t,i)$ 的有界性. 由于最小方差估计算法保证 $P(t,i)$ 及矩阵 $U, V, \sigma_i, i = 1, \dots, n$, 的收敛性, 而在步骤 3 中, 使用 $d - \sigma_i$ ($i = 1, \dots, n$) 作为磁滞比较器的输入, 所以比较器输出向量 h 收敛, 从而 p 收敛. 因此步骤 4 中所有变量收敛, 它保证了 $\beta(t,i)$ 的收敛性, 即 P1) 满足.

将式(12)代入式(8), $\bar{B}(t,i)$ 得

$$\begin{aligned} \bar{B}^T(t,i) = & VSU^T + P_{1,n}(t,i)[0, \lambda]U^T = \\ & V\left(\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_n) + \begin{bmatrix} \overset{p}{0} & \overset{n-p}{P'_{1,n}\lambda} \end{bmatrix}\right)U^T = \\ & V\left[\begin{array}{cc} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) & P'_{1,p}(t,i)\lambda \\ 0 \cdots 0 & \text{diag}(\sigma_{p+1} + \sigma'_{p+1}, \dots, \sigma_n + \sigma'_n) \end{array}\right]U^T \end{aligned}$$

$$\text{则 } |\det \bar{B}(t,i)| = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_p(\sigma_{p+1} + \sigma'_{p+1})\cdots(\sigma_n + \sigma'_n) > (d - \delta)^p d^{n-p} > 0$$

因此 P2) 同样满足.

证毕.

蒋 平 1985, 1988, 1992 年于西安交通大学获工学学士、硕士、博士学位, 现为同济大学信控系教授、博士生导师. 目前研究方向为机器人控制与智能机器人.

UNBEHAUEN Rolf Received the Diplom-Mathematiker and Dr.-Ing. Degrees and the *venia legendi* in electrical engineering from the University of Stuttgart, Germany, in 1954, 1957, and 1964, respectively. Since 1966, he has been Professor of Electrical Engineering at the University of Erlangen-Nuernberg in Erlangen, Germany. His research interests include system theory, network theory, and field theory.