第 28 卷 第 6 期
2002 年 11 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28,No. 6
Nov. ,2002

研究简报

系统的可靠性及其参数解分析[1)]

梅登华　　潘国梅
(广州大学计算机系　广州　510405)
(E-mail: meidh2001@yahoo.com.cn)

关键词　可靠性,参数解,Poisson 过程,故障
中图分类号　U224;TP202.1;TP311.5

THE SYSTEM RELIABILITY AND ITS PARAMETERS ANALYSIS

MEI Deng-Hua　PAN Guo-Mei
(*Department of Computer, Guangzhou University, Guangzhou*　510405)
(E-mail: meidh2001@yahoo.com.cn)

Key words　Reliability, resolve of parameters, Poisson process, failure

1　引　　言

系统运行过程中常常会发生各种难以预料的故障,因而对系统的可靠性的分析是了解系统目前运行情况的唯一途径. 本文通过运用非齐次 Poisson 过程,建立了系统可靠性模型,对系统模型中参数的求解进行了分析,通过在有完全故障数据和不完全故障数据时模型参数的分析,分别得到了参数解的充要条件.

设系统在 t 时刻发生的累计故障数 $\{N(t);t\geqslant 0\}$ 是一个独立的增量过程,$N(t)$ 服从期望函数为 $m(t)$ 的 Poisson 分布,$m(0)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} m(t)=a$, a 表示系统在生命期中经历的总失效数, a 为有限正数. 对于任意一个足够小的时间区间 $(t,t+\Delta t)$:

$$m(t+\Delta t)-m(t)=b[a-m(t)]\Delta t+o(\Delta t).$$

2　完全故障数据时的参数估计

设随机数序列 $\{t_k;k=1,2,\cdots\}$ 表示系统第 k 次故障的时间; $\{x_k;k=1,2,\cdots\}$ 表示系统从前一次故障时间为 t_k 后经过的间隔时间. 系统在经历第一次故障前的可靠度为

1) 四川省应用科技发展基金(981019)资助
收稿日期　2001-05-18　　收修改稿日期　2001-10-09

$$R(x_0)=P(N(x_0)=0)=\exp[-a(1-\mathrm{e}^{-bx_0})]$$

系统在 t_1时刻的可靠度和概率密度函数为

$$R(t_1)=\exp[-a(1-e^{-bt_1})],\quad f(t_1)=ab\exp(-bt_1)\exp[-a(1-\mathrm{e}^{-bt_1})]$$

对于一般情况，系统在前次故障时间为 t_{k-1}时

$$R(x_{k-1}|t_{k-1})=\exp\{-a[\exp(-bt_{k-1})-\exp(-b(t_{k-1}+x_{k-1}))]\}$$

$$f(x_{k-1}|t_{k-1})=ab\exp[-b(t_{k-1}+x_{k-1})]\exp\{-a[\exp(-bt_{k-1})-\exp(-b(t_{k-1}+x_{k-1}))]\}$$

联合概率密度函数为

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=(ab)^n\exp\left(-b\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\exp[-a(1-\mathrm{e}^{-bt_n})]=\exp[-m(t_n)]\prod_{i=1}^{n}[ab\exp(-bt_i)]$$

对于给定的系统故障时间序列 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，对数似然函数为

$$L(a,b|t)=n\ln a+n\ln b-a(1-\mathrm{e}^{-bt_n})-b\sum_{i=1}^{n}t_i \tag{1}$$

对未知参数 a,b 分别求偏导数得对数似然方程组为

$$\begin{cases} n=a[1-\exp(-bt_n)] & (2)\\ \dfrac{n}{b}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}t_i+at_n\exp(-bt_n) & (3)\end{cases}$$

定理 1. $g(b)=\dfrac{n}{b}-\sum_{i=1}^{n}t_i-\dfrac{nt_n}{\exp(bt_n)-1}$是 b 的单调递减函数.

证明. $g'(b)=\dfrac{-n[\exp(bt_n)+\exp(-bt_n)]+n(2+b^2t_n^2)}{b^2[\exp(bt_n)-1]^2}\exp(bt_n)$.

$\exp(bt_n)$在 $bt_n=0$ 点的 Taylor 展开式为

$$\exp(bt_n)=1+bt_n+\frac{(bt_n)^2}{2!}+\cdots+\frac{(bt_n)^n}{n!}+R_i(bt_n)$$

其中 $R_i(bt_n)$为余项. $\exp(-bt_n)$在 $bt_n=0$ 点的 Taylor 展开式为

$$\exp(-bt_n)=1+(-bt_n)+\frac{(-bt_n)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-bt_n)^n}{n!}+R_i'(-bt_n)$$

其中 $R'(-bt_n)$为余项. 于是可以得到

$$\exp(bt_n)+\exp(-bt_n)\geqslant 2+\frac{(bt_n)^2}{2!}$$

又可得到

$$g'(b)\leqslant\frac{-n(2+b^2t_n^2)+n(2+b^2t_n^2)}{b^2[\exp(bt_n)-1]^2}=0$$

因而 $g(b)$是 b 的单调递减函数.　　证毕.

定理 2. 对数似然方程组(2),(3)有有限正数解的充要条件为 $t_n>\dfrac{2\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)}{n}$

证明. 由(2)式得

$$a = \frac{n}{1 - \exp(-bt_n)} \tag{4}$$

当且仅当 $b>0$ 时 a 有有限正数解. 将式(4)代入式(3)得

$$\frac{n}{b} - \sum_{i=1}^{n} t_i - \frac{nt_n}{\exp(bt_n) - 1} = 0 \tag{5}$$

$$\lim_{b\to 0} g(b) = -\sum_{i=1}^{n} t_i + n \lim_{b\to 0} \frac{\exp(bt_n) - bt_n - 1}{b[\exp(bt_n) - 1]}$$

其中 $\lim\limits_{b\to 0} \frac{\exp(bt_n)-bt_n-1}{b[\exp(bt_n)-1]}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式.

根据 L'Hospital 法则: $\lim\limits_{b\to 0} \frac{\exp(bt_n)-bt_n-1}{b[\exp(bt_n)-1]} = \frac{t_n}{2}$, 得到

$$\lim_{b\to 0} g(b) = -\sum_{i=1}^{n} t_i + \frac{nt_n}{2}$$

又 $\lim\limits_{b\to\infty} g(b) = -\sum\limits_{i=1}^{n} t_i < 0$, 由定理 1 知 $g(b)$ 是 b 的单调递减函数. 当且仅当 $\lim\limits_{b\to 0} g(b) > 0$ 时(5)式有一个正数解. 即 $\lim\limits_{b\to 0} g(b) = -\sum\limits_{i=1}^{n} t_i + \frac{nt_n}{2} > 0$. 故定理 2 得证. 证毕.

定理 3. 当且仅当 $t_n > \frac{2\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i\right)}{n}$ 时, 存在唯一的正数 a 和 b 满足对数似然方程组(2)和(3).

证明. 由定理 1 和定理 2 可得. 证毕.

3 不完全故障数据的参数估计

系统在现场运行时, 由于各种复杂条件限制, 难以将系统每次的故障情况全部记录下来. 所谓运行不完全故障数据是指: $Y_{ic} = \{y_i\}, \exists\ i, i \in \{1,2,\cdots,\tau\} \to (y_i - y_{i-1}) > 1$, τ 为任意正整数.

例如在某时间间隔 (t_{i-1}, t_i) 内只记录到 $k(k>1)$ 次故障, 至于这 k 次故障的具体时间没有记录到, 可认为是随机的. 这时前面的完全故障数据参数估计方法就不适用. 可以得到概率

$$P\{N(t_1) = y_1, N(t_2) = y_2, \cdots, N(t_n) = y_n\} =$$
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{[a(e^{-bt_{i-1}} - e^{-bt_i})]^{y_i - y_{i-1}}}{(y_i - y_{i-1})!} \exp[-a(1 - e^{-bt_n})] =$$
$$\prod_{i=1}^{n} \frac{[m(t_i) - m(t_{i-1})]^{y_i - y_{i-1}}}{(y_i - y_{i-1})!} \exp[-m(t_n)] = L_{\mathrm{inc}}$$

$$\ln L_{\mathrm{inc}} = -m(t_n) + \sum_{i=1}^{n} \{(y_i - y_{i-1}) \ln[m(t_i) - m(t_{i-1})] - \ln[(y_i - y_{i-1})!]\}$$

由 $\frac{\partial \ln L_{\mathrm{inc}}}{\partial a} = 0$ 得

$$[a - a\exp(-bt_n)] - y_n = 0 \tag{6}$$

由 $\frac{\partial \ln L_{\mathrm{inc}}}{\partial b} = 0$ 得

$$t_n a\exp(-bt_n)+\sum_{i=1}^{n}\left[(y_i-y_{i-1})\frac{t_{i-1}\exp(-bt_{i-1})-t_i\exp(-bt_i)}{\exp(-bt_{i-1})-\exp(-bt_i)}\right]=0 \tag{7}$$

定理 4. $g_1(b)=2c^2[ch(bd)-1]+2d^2[1-ch(bc)],b>0,0<c<d$. 则 $g_1(b)>0$.

证明. $g_1(b)$对 b 求导得：

$$g'_1(b)=2dc^2\left[sh(bd)-\frac{d}{c}sh(bc)\right]$$

设 $v=\dfrac{d}{c}>1,w=bc>0$,得到

$$g'_1(b)=2vdc^2\left[\frac{sh(wv)}{v}-sh(w)\right]=2wvdc^2\left[\frac{sh(wv)}{wv}-\frac{sh(w)}{w}\right]$$

设 $h(x)=\dfrac{sh(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{sh(x)}{x}$是$\dfrac{0}{0}$型未定式. 由 L'Hospital 法则,得 $\lim\limits_{x\to0+}h(x)=\lim\limits_{x\to0}ch(x)=1$, $h'(x)=\dfrac{xch(x)-sh(x)}{x^2}$. 设 $f(x)=xch(x)-sh(x)$.

当 $x>0$ 时,$f'(x)=xsh(x)>0$,知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是单调递增的函数. 由 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$ 得在区间$(0,+\infty)$上 $f(x)>0$. 由 $h'(x)>0$ 知在区间$(0,+\infty)$上 $h(x)$是单调递增的函数.

由 $0<w<wv$,得$\dfrac{sh(wv)}{wv}>\dfrac{sh(w)}{w}$;由$\dfrac{sh(wv)}{wv}-\dfrac{sh(w)}{w}>0$ 可得 $g'_1(b)>0$. 因此可知 $g_1(b)$在$(0,+\infty)$上是单调递增的函数. 因为 $g_1(0)=0$,故在区间$(0,+\infty)$上 $g_1(b)>0$.

证毕.

定理 5. 不完全故障数据参数对数似然方程组(6),(7)存在有限正数解的充要条件为

$$t_n y_n>\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_{i-1})(t_i+t_{i-1})$$

证明. 由式(6)得

$$a=\frac{y_n}{1-\exp(-bt_n)} \tag{8}$$

当且仅当 $0<b<+\infty$时,a 有有限正数解. 将式(8)代入式(7)化简后得

$$-\sum_{i=1}^{n}\left\{(y_i-y_{i-1})\frac{t_{i-1}\exp[b(t_i-t_{i-1})]-t_i}{\exp[b(t_i-t_{i-1})]-1}+\frac{t_n}{\exp(bt_n)-1}\right\}=0 \tag{9}$$

设
$$h_1(b)=-\sum_{i=1}^{n}\left\{(y_i-y_{i-1})\frac{t_{i-1}\exp[b(t_i-t_{i-1})]-t_i}{\exp[b(t_i-t_{i-1})]-1}+\frac{t_n}{\exp(bt_n)-1}\right\},$$

$$\lim_{b\to0}h_1(b)=-\sum_{i=1}^{n}[(y_i-y_{i-1})t_{i-1}]+\lim_{b\to0}\sum_{i=1}^{n}\left\{(y_i-y_{i-1})\left[\frac{t_i-t_{i-1}}{\exp[b(t_i-t_{i-1})]-1}-\frac{t_n}{\exp(bt_n)-1}\right]\right\}$$

设
$$h_3(b)=\lim_{b\to0}\left\{\frac{t_i-t_{i-1}}{\exp[b(t_i-t_{i-1})]-1}-\frac{t_n}{\exp(bt_n)-1}\right\}=$$
$$\lim_{b\to0}\frac{[\exp(bt_n)-1](t_i-t_{i-1})-t_n\{\exp[b(t_i-t_{i-1})]-1\}}{\{\exp[b(t_i-t_{i-1})]-1\}[\exp(bt_n)-1]}$$

上式为$\dfrac{0}{0}$型未定式,根据 L'Hospital 法则可化简得:$h_3(b)=\dfrac{t_n-(t_i-t_{i-1})}{2}$

故
$$\lim_{b\to0}h_1(b)=\frac{t_ny_n-\sum\limits_{i=1}^{n}[(y_i-y_{i-1})(t_i+t_{i-1})]}{2} \tag{10}$$

又 $\lim\limits_{b\to+\infty} h_1(b)=-\sum\limits_{i=1}^{n}[(y_i-y_{i-1})t_{i-1}]<0$ 且

$$h_1'(b)=-\sum_{i=1}^{n}\left\{(y_i-y_{i-1})\left[\frac{(t_i-t_{i-1})^2\exp[b(t_i-t_{i-1})]}{\{\exp[b(t_i-t_{i-1})]-1\}^2}-\frac{t_n^2\exp(bt_n)}{(\exp(bt_n)-1)^2}\right]\right\}$$

令 $c=t_i-t_{i-1}, d=t_n$. 又

$$\frac{c^2\exp(bc)}{[\exp(bc)-1]^2}-\frac{d^2\exp(bd)}{[\exp(bd)-1]^2}=$$

$$\frac{\exp[b(c+d)]}{[\exp(bc)-1]^2[\exp(bd)-1]^2}\{c^2[\exp(bd)+\exp(-bd)-2]-d^2[\exp(bc)+\exp(-bc)-2]\}$$

上式中花括号里的多项式即等于定理 4 中的 $g_1(b)$. 由于在区间$(0,+\infty)$上,$g_1'(b)>0$ 且 $h_1'(b)<0$,故 $h_1(b)$在区间$(0,+\infty)$上是 b 的单调递减函数. 又由 $\lim\limits_{b\to+\infty} h_1(b)<0$,故式(9)有一个正数解当且仅当$\lim\limits_{b\to 0}h_1(b)>0$. 由式(10)即得 $t_n y_n>\sum\limits_{i=1}^{n}[(y_i-y_{i-1})(t_i+t_{i-1})]$. 证毕.

定理 6. 若 a,b 是对数似然方程组(6)和(7)的有限正数解,则它也是唯一解.

证明. 由以上证明显然可得. 证毕.

4 结论

本文通过对系统的可靠性建立非齐次 Poisson 过程模型,并对完全故障数据和不完全故障数据时的模型参数解的情况分析,得到了参数解的充分必要条件. 该模型及其参数分析适用于对变压器故障预测及分析等多种场合. 使用该论文的研究成果做成可靠性软件分析系统,通过收集到的系统失效数据,可以预测系统未来若干时期可靠性的变化情况,并可直观地绘出可靠性的变化曲线.

参 考 文 献

1 Sheldon M R. Stochastic Processes. USA:John Wiley & Sons, Inc Press, 1983. 31～54

2 Mei Deng-Hua. A new fuzzy information optimization processing technique for monitoring the transformer. IEE 8th Dielectric Materials, Measurements and Applications. Edinburgh: IEE Publisher Conference, 2000. **473**: 192～196

梅登华 副教授,1989 年大学本科毕业于华中理工大学计算机系,1994 年硕士毕业于西南交通大学计算机系,1999 年博士毕业于西南交通大学,2001 年从东南大学博士后出站到广州大学计算机系工作. 研究方向主要有智能型控制系统;专家系统、人工智能方面的研究;系统可靠性方面的研究;无限扩频、CDMA 通讯研究;网络技术研究;电力系统自动化的研究等.

潘国梅 1993 年于西南交通大学本科毕业. 现在广州大学信息学院计算机科学与技术系工作.